Springer Lehrbuch

Partielle Differentialgleichungen

von Ben Schweizer

Korrekturanmerkungen, Stand 30.1.2017

Auf den nachfolgenden Seiten sind die mir bekannten *mathematischen* Fehler aufgelistet. Die besonders ärgerlichen Fehler sind mit einem Stern markiert.

S. 33 Zeile 18: Es muss $-u_0'(x-t)$ heißen, also ein $-$ anstelle des gedruckten $+$

S. 37 Letzte Formel: Der letzte curl-Eintrag ist $\partial_{x_1} V_2 - \partial_{x_2} V_1$ (letzter Index 1, nicht 3)

S. 40 Bezeichnungen in Abbildung 3.1. Der Zylinder sollte U heißen, nicht Z. Die Ebene sollte H heißen, nicht H_x. Der Vektor w sollte vorkommen; er muss nicht mit ν übereinstimmen

S. 40 Zeile 7: Das "kompakt enthalten"-Zeichen $\subset\subset$ muss erklärt werden

S. 52 Der Beweis von Satz 3.14 beruht auf der Hölder-Ungleichung, nicht auf der Jensen-Ungleichung

S. 53 In der Formel in Zeile 10 sollte statt $< f >$ nur f stehen

S. 54 In der Definition sollte Ω offen sein

S. 55 Zeile 23: ersetze $j \in \{1, ..., n\}$ durch $j \in \{1, ..., m\}$

*S. 61 In Zeile 17 wird die $H^1(\Omega)$-Norm definiert, nicht die $L^2(\Omega)$-Norm.

S. 62 Es sollte bemerkt werden, dass Gauß für H_0^1-Funktionen (ohne Randterme) auch gilt, wenn das Gebiet *nicht* Lipschitz-stetig ist. Ebenso für Poincaré auf Seite 87

S. 66 Übung 3.7: In der Identität für die Matrix F fehlt auf der rechten Seite ein Quadrat

*S. 68 Übung 3.17. Auf der rechten Seite muss die H^1-Norm von u stehen, nicht die L^2-Norm des Gradienten

S. 68 Übung 3.17: Die rechte Seite muss den Term niedrigerer Ordnung zweimal enthalten, zum Beispiel in der Form ... $\leq C\|u\|_{L^2}(\|\nabla u\|_{L^2} + \|u\|_{L^2})$.

S. 68 Übung 3.18. Ersetze "u klassische Lösung" durch "$u \in C^2(\bar{\Omega})$ klassische Lösung"

S. 72 Zwischen Theorem 4.4 und Theorem 4.5 sollte nicht stehen, dass das nächste Theorem eine "Konsequenz aus 4.4" ist. Theorem 4.5 ist eine Aussage, die wie Theorem 4.4 aus dem Baire'schen Kategoriensatz folgt

S. 82 Zeile 3: Ersetze $\|x_{k_l} - x\|$ durch $d(x_{k_l}, x)$

S. 82 Übung 4.8. "normierter" Vektorraum

S. 85 In Übung 4.9 sollte der Satz für allgemeine Gebiete formuliert werden (denn so wird er später einmal verwendet). Der Beweis soll als Übung für beschränkte Gebiete Ω geführt werden.

S. 103 $x_n|x-y|^{-n}$ ist harmonisch. Begründung muss abgeändert werden: Zu verifizieren entweder durch Nachrechnen oder mit Hilfe der Herleitung: $\Phi(x-y)$ und $\Phi(\tilde{x}-y)$ sind beide harmonisch in x, also ist auch für beide Funktionen die y_n-Ableitung harmonisch in x.

S. 107 Zeile -7: In der Abschätzung $|b_k| \leq |a_k|$ fehlt ein l_i-abhängiger Faktor

S. 110 Übung 5.3: Hier ist $n = 3$. Zudem: die e_3-Ableitung von u ist gleich $-\rho$.

S. 133 Die Reihe definiert $\tilde{u}$ und nicht u

S. 136 Vor Schritt 2: Es sollte auf eine zusätzliche Übungsaufgabe verwiesen werden, PDG 1 im WS 15/16, Aufgabe 1 auf Blatt 10

S. 138 Übung 6.2: für beschränkte Lipschitz-Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit einer Konstanten $C_0 = C_0(\Omega)$

S. 139 Übung 6.6: Besser als die Verwendung der Regularitätsabschätzung: Verwende die Identität $\int_\Omega |D^2u|^2 = \int_\Omega |\Delta u|^2$ für glatte Funktionen mit kompaktem Träger

S. 140 Übung 6.7: Die Konstante ist 1 und *nicht* $C = C(\tilde{\Omega})$

S. 140 Hier und im restlichen Text: Korrekte Schreibweise ist *Caccioppoli*

S. 140 Übung 6.9: In der Definition der Menge darf rechts kein $*$ stehen.

S. 142 Zeile 19 (im Fließtext): Anstelle von $Lu \geq 0$ und $Lu > 0$ muss hier $Lu \leq 0$ und $Lu < 0$ stehen

S. 143 Zeile 11: Den Ausdruck $\geq c(x_0)m \geq$ weglassen

*S. 145 Zeile -5: Ein solcher Punkt z kann (nur) gewählt werden, weil Ω zusammenhängend ist. Man sollte einen stetigen Weg von x_0 zu z_0 betrachten und auf dem Weg den Punkt z nah an Σ wählen.

S. 146 Zeile -8: Die Funktion $\vartheta \circ u$ ist nur in $W^{1,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$

S. 147 Zeile 13: Im Limes muss $\theta'_\varepsilon(u)$ durch $\mathbf{1}_{\{u>0\}}$ ersetzt werden

*S. 147 In Theorem 7.5 (und auch in Übung 7.2) sollte Ω ein beschränktes Lipschitz-Gebiet sein (Verwendung des Spursatzes)

S. 156 Zeile 5: Besser ist: "für $y \in \bar{B}_r(0)$ gilt". Die Konstante ist $C_1(n) = 2^n/\omega_n$.

S. 158 In der Harnack-Ungleichung muss Ω_0 beschränkt sein

S. 159 Zeile 2: $u \in C^0(\bar{\Omega})$ und nicht $u \in C^0(\partial\Omega)$

S. 160 Mitte: $r < R$ und nicht $r > R$

S. 161 Zeile 9: harmonisch in B_ρ, nicht: harmonisch in B_r

S. 161 Zeile -10: Da Ω beschränkt ist(!), ist die Perron-Klasse nicht leer

S. 166 Zeile 10: ... falls für jede beschränkte Menge der *Abschluss* des Bildes kompakt ist

S. 180 Beweis von Theorem 9.5: Die Annahme der Anfangswerte sollte gleich im Anschluss an den ersten Absatz festgestellt werden (und nicht erst im letzten Satz des Beweises, denn sie folgt nicht aus der Konvergenz von u_m auf kompakten Teilmengen)

S. 181 Das Maximum von u_0 muss nicht existieren, ersetze daher max durch sup

S. 188 Übung 9.3: Auf der rechten Seite sollte vor dem Integral nicht $x/(4\sqrt{\pi})$ stehen sondern $x/(2\sqrt{\pi})$

S. 195 Zeile 4: Die Summe stimmt mit u_{N+1} überein, nicht mit u_N

*S. 200 Beweis von Proposition 10.8. Die Konvergenz in (10.20) gilt nur für $t \in (0,T)$, nicht für alle $t \in [0,T]$ (der formale Punkt ist, dass $\partial_t u_\varepsilon = (\partial_t u) * \eta_\varepsilon$ auf $(T-\varepsilon,T)$ und $(0,\varepsilon)$ nicht gilt). Die Aussage der Proposition ist dennoch richtig. Im Beweis kann die Stetigkeit von $\tilde{u}$ auf ganz $[0,T]$ aus der Formel (10.20) für $\tilde{u}$ und dem Bochner-Theorem geschlossen werden wegen $\|\tilde{u}(t_2)-\tilde{u}(t_1)\|_X \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t u(s)\|_X \, ds$. Dass $\tilde{u}$ in Randpunkten mit der Spur übereinstimmt, folgt aus der Formel für die Spur und der Formel für $\tilde{u}$.

S. 200 Zeile -12: Ersetze $t \in [t_0,T]$ durch $t \in [0,T]$

S. 204 Lemma 10.10 sollte heißen: Ableitung der *geraden* Fortsetzung

S. 205 In Lemma 10.11 ist die Reflexivität von V nicht notwendig

S. 210 In Übung 11.1 ist gemeint: $y_0 \geq 0$ und $C \geq 0$. Der letzte Satz der Anleitung sollte ersetzt werden durch: “Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion z, dass es genügt, $y_0 = 0$ zu betrachten. Betrachten Sie im Fall $y_0 = 0$ die Funktion $h(t) := e^{-Ct} \int_0^t y(s)\, ds$. Für stetige y findet man damit die Aussage, für $y \in L^1$ verwenden Sie Bemerkung 2 nach Theorem 10.9.”

S. 214 Für die affine Interpolation muss auch g_0^N definiert werden, zum Beispiel als $g_0^N := g_1^N$.

S. 224 In Lemma 11.11 sind die Definitionsbereiche von u und v vertauscht

S. 226 Drei Zeilen vor dem Halbgruppenabschnitt muss $|\nabla u|$ durch $|\nabla u|^2$ ersetzt werden.

S. 228 Übung 11.5: Zeigen Sie *unter einer geeigneten Zusatzannahme* die umgekehrte Implikation von Lemma 11.3

S. 230 Die Schallgeschwindigkeit ist die Wurzel aus dem angegebenen Ausdruck

S. 232 In Lemma 12.1 lebt w auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

S. 234 Formel in der Mitte: Die Anfangswerte sind u_0 und u_1, nicht u_0 und u_0

S. 259 In Übung 13.1 c) muss f nicht unterhalbstetig sein (dies ist deshalb relevant, weil in der Jensen Ungleichung Übung 13.5 darauf zurückgegriffen wird). Die Anleitung für c) ist allerdings nur mit Unterhalbstetigkeit direkt umsetzbar. Weiterhin muss in der Anleitung für c) "abgeschlossenen und konvexen Super-Graphen" ersetzt werden durch "konvexen Super-Graphen"

S. 273 Zeile 10: Q bildet nach $\mathbb{R}$ ab

S. 275 In Formel (14.12) wird nicht konsistent im *ersten* Argument der Sesquilinearform gequert

S. 310 Übung 11.1: $C \geq 0$ muss erwähnt werden

S. 312 Zeile 2: $Y := C^{2,\alpha}(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ mit der Norm von $C^{2,\alpha}(\Omega)$, damit $Y \subset X$ gilt (ohne weitere Konsequenzen)

S. 315 Formel in der Mitte der Seite: Ersetze C_0^2 durch $C_0^2|\Omega|$ (ohne wichtige Konsequenzen)

*S. 337 Theorem 17.15 ist zwar korrekt, für den hier geführten Beweis muss aber noch die Eigenschaft "F beschr. auf beschr. Mengen" vorausgesetzt werden (damit im letzten Abschnitt von Schritt 1 des Beweises Fu_k beschränkt ist)

S. 341 Der Punkt x_0 muss als Konvexkombination gebildet werden, wobei aber 0 mit verwendet wird. Daher: Ersetze m durch $m+1$ in der Definition von x_0.

S. 342 Übung 17.2: Das Gebiet soll beschränkt sein

S. 374 Übung 19.2: Ersetze $\partial_t u_t$ durch $\partial_t u$. Zu Beginn der Aufgabe: Sei u *klassische* Lösung

S. 389 Zeile -7: $\liminf$ anstelle von $\limsup$

S. 391 Formeln (20.33) und nachfolgende: Summation über k sollte mit $k = 1$ starten

S. 406 Formel (21.18): Streiche "≤ 0"

S. 443 Übung 22.5: Vorzeichenfehler in der rot-rot-Formel (ohne weitere Konsequenzen)

S. 450f Zeile -4: Ersetze den Quader $(0, \pi)^n$ durch den Quader $(0, 2\pi)^n$. Dies ändert die Konstante C_1 auf Seite 451 in $|\Omega| = (2\pi)^n$. Zudem: N statt n

S. 453 Zeile -3: streiche ∇ vor u_k

S. 455 Übung 23.1: Es fehlt der Faktor 1/2 vor der Dirichlet-Energie, das negative Vorzeichen vor dem Druckterm und der Term $\int f \cdot v$. Der Raum für v ist $H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, also mit Randbedingung.

S. 463 Erste Formel: Schreibe statt $B_h(v - \phi_h)$ besser $[B(v - \phi_h)]|_{X_h}$ (zweimal)

*S. 468 Beweis von Theorem 23.15. Die rechte Seite f ist nur als L^2 in der Zeit vorausgesetzt, daher ist auch die rechte Seite in (23.33) nur von der Klasse $L^2(0, T; \mathbb{R}^K)$ und die Lösung v_K ist im Allgemeinen nicht stetig differenzierbar. Die Aussage des Satzes ist dennoch richtig, im Beweis muss die rechte Seite f durch Glättungen f_K approximiert werden.

S. 473 Theorem 23.17. Ω beschränktes *Lipschitz*-Gebiet (für Poincaré-Ungleichung)

S. 475 Übung 23.3: In der Formel für die Stokes'sche Reibungskraft fehlt der Faktor $|U|$

S. 475 Übung 23.6: Ω offen und zusammenhängend

S. 476 Übung 23.12: Ω glatt berandet und beschränkt

S. 483 Zeile -2: Problematisch ist, dass die Relation $u \in H_0^\gamma(0,T;V_0)$ nicht offensichtlich ist. Besser sollte daher das nachfolgende Argument (bis Seite 484, Zeile 10) mit der Folge u_m durchgeführt werden, mit dem Resultat, dass $|\tau|^\gamma(\mathcal{F}u_m)(\tau) \rightharpoonup |\tau|^\gamma(\mathcal{F}u)(\tau)$ in $L^2(\mathbb{R}, V_0)$ (was äquivalent ist zu (24.11))

*S. 488 Theorem 24.4: Im Beweis muss die rechte Seite f geglättet werden, vergleiche Korrektur zu Theorem 23.15 von Seite 468.

S. 489 Zeile -6: in der formalen Begründung $\tilde{g}_K^j$ statt g_K^j

S. 512 Formel (25.7) und beide Formeln danach: Da an *positive Drehung* um den Winkel α gedacht wird, sollte die Drehmatrix das Minuszeichen rechts oben haben, nicht links unten

S. 514 Mittlerer Absatz. Es sollte heißen: Das Verhältnis von Scherkraft zu *Scherung* heißt der Schermodul. In der darauffolgenden Formel sollte μ_S mit dem zusätzlichen Faktor 1/2 definiert werden.

S. 520 In der trivialen Korn'schen Ungleichung von Lemma 25.3 sollte nicht $u \in H^2$ gefordert werden. Grund: Dieses Lemma wird für später für H_0^1-Funktionen auf nicht-Lipschitz-Gebieten verwendet

S. 532 In Abb. 26.1 sollte es $y_2 = U(y_1)$ heißen

S. 536 Die Energie der Saite wird in dem Fall berechnet, dass die Endpositionen fixiert sind

S. 538 Einleitend sollte für diesen Abschnitt festgestellt werden, dass alle Rechnungen für glatte Funktionen Φ mit $\det(D\Phi) > 0$ durchgeführt werden

S. 543 Zeile -8: Ersetze "liefert eine zusätzliche Feldgleichung" durch "liefert formal eine zusätzliche Feldgleichung" und ergänze: "Für Gesetze $\mathcal{G}$ mit $\mathcal{G}(A)A^T = A\mathcal{G}(A)^T \; \forall A$ ist die Drehmomentengleichung immer erfüllt."

S. 547 Die Menge Ω in Definition 26.4 sollte beschränkt sein

S. 549 In Lemma 26.6 muss (26.36) nicht vorausgesetzt werden

S. 550 Im Beweis von Lemma 26.6 wird die Quasikonvexität von f in (26.39) verwendet; allerdings ist die Folge u_j nur in $W^{1,p}$ und nicht in $W^{1,\infty}$ (wie in Def. 26.4 gefordert). Ausweg: Vor Lemma 26.6 sollte auf eine neue Übungsaufgabe verwiesen werden. Diese lautet: Zeigen Sie für quasikonvexes f mit Eigenschaft (26.35), dass die Quasikonvexitäts-Ungleichung (26.33) auch für $\varphi \in W^{1,p}$ gilt. Anleitung: Verwenden Sie die Dichtheit glatter Funktionen in $W^{1,p}$ und den starken Lebesgue Konvergenzsatz aus Übung 4.9.

S. 550 In den ersten beiden Absätzen muss $|\nabla u_j|^2$ durch $|\nabla u_j|^p$ ersetzt werden

S. 551 Formel (26.45): Der Laufindex p sollte ersetzt werden, denn p ist auch der Integrabilitätsexponent. Wegen der p-ten Potenz sollte in (26.45) gefordert werden: $\|\nabla u - \xi\|_{L^p(\Omega_h)} \le \varepsilon$

*S. 552 Existenzsatz 26.8. Es fehlt die Schranke nach unten in der Wachstumsannahme an f, zum Beispiel $|\xi|^p \le C(1 + f(\xi))$

S. 554 Übung 26.4: Es fehlt die Angabe einer Randbedingung. Ergänze nach dem ersten Satz der Aufgabe den folgenden Satz: "Wir betrachten hier einen gelagerten Stab, in dem kein lokales Drehmoment an den Stabenden wirkt, also die Randbedingen $\partial_x\Theta(0) = \partial_x\Theta(L) = 0$."

S. 557 Zeile 5 der konvexen Analysis: Das Subdifferential bildet nicht nach $\mathcal{P}(X)$ ab, sondern nach $\mathcal{P}(X')$. Im nächsten Satz: Ψ^* lebt nicht auf X, sondern auf X'.

S. 561 Abbildung 27.1: Die Kurve Σ ist zu schwach und kaum erkennbar. Schlimmer: Sie ist auch falsch. Sie muss im Punkt 3 abknicken und im Punkt 4 bereits 0 sein.

S. 564 Zeile -8: Für reelle Parameter $\alpha, \beta > 0$ *und* $C := \mathbb{A}^{-1}$ gelte

S. 566 Der erste Satz im Beweis von Lemma 27.3 muss sein: Um die nachfolgende Rechnung zu vereinfachen, nehmen wir in diesem Beweis $\partial_t U_0 = 0$ an.

S. 565 Zwei Formeln in der Mitte der Seite: In beiden Formeln fehlt ein Integralzeichen

S. 574 Hooke's Gesetz

S. 576 In Ungleichung (27.57): $\mathcal{L}$ ist als Integral über Ω definiert, hier steht also ein Ω-Integral zu viel

S. 577 Ein Satz nach (27.58), nach "impliziert" einschieben: Dies folgt im Fall $K = \{0\}$ sofort aus $\Psi^* \equiv 0$. Andernfalls argumentieren wir wie folgt: ... Die Rechnung danach kann abgekürzt werden mit $\Psi(\eta) = \Psi^{**}(\eta) = \sup \eta : \xi - \Psi^*(\xi) \le 0$.

S. 579 In Zeile 3 nach Erwähnung der Dreiecksungleichung einschieben: "(diese folgt direkt aus Konvexität und 1-Homogenität)"

S. 580 Zeile 5: Ersetze "quadratisches Funktional" durch "durch die quadratischen Beiträge ist das Funktional streng konvex". Verweise auf die neue Übung zu streng konvexen Funktionalen.

S. 580 Direkt vor Schritt 5 die folgende Bemerkung einschieben: Da die Folgen $\hat{u}^K$ und $\hat{p}^K$ stark in L^2L^2 beziehungsweise L^2H^{-1} konvergieren, folgen mit Lemma 11.3 auch dieselben starken Konvergenzen für $\bar{u}^K$ und $\bar{p}^K$ (mit denselben Grenzfunktionen u und p

S. 583 Übung 27.4: K muss abgeschlossen sein. In der letzten Zeile muss ein Σ durch K ersetzt werden.