

# Nichtlineare Analysis

**Ben Schweizer**

Material für das Wintersemester 2024/25

Version vom 14.11.2024  
(wird während des Semesters bearbeitet)



# Contents

<b>I. Der Abbildungsgrad</b>	<b>7</b>
<b>1. Beschreibung des Abbildungsgrades</b>	<b>8</b>
1.1. Einführung, topologische Begriffe, Windungszahl . . . . .	8
1.2. Die Axiome des Abbildungsgrades . . . . .	13
1.3. Lemma von Sard, Funktionen vorgegebener Divergenz . . . . .	14
<b>2. Konstruktion des Grades im Endlichdimensionalen</b>	<b>17</b>
2.1. Definition des Grades für $C^2$ -Abbildungen . . . . .	17
2.2. Äquivalente Darstellungen . . . . .	19
2.3. Der Grad für $C^0$ -Abbildungen . . . . .	22
<b>3. Anwendungen des Abbildungsgrades</b>	<b>24</b>
3.1. Wichtiges Hilfsmittel: Fortsetzungssätze . . . . .	24
3.2. Der Satz vom Igel, Satz von Borsuk . . . . .	27
3.3. Der Satz von Brouwer . . . . .	31
<b>4. Kompakte Operatoren</b>	<b>33</b>
4.1. Definition, endlichdimensionale Approximationen . . . . .	34
4.2. Der Fixpunktsatz von Schauder . . . . .	37
4.3. Beispiel: Einbettungen . . . . .	39
<b>5. Der Abbildungsgrad im Banachraum</b>	<b>41</b>
5.1. Konstruktion des Grades . . . . .	41
5.2. Der Index einer Lösung . . . . .	43
<b>II. Calculus im Banachraum</b>	<b>46</b>
<b>6. Differenzierbarkeit</b>	<b>47</b>
6.1. Ableitung und Richtungsableitung . . . . .	47
6.2. Euler-Lagrange Gleichungen . . . . .	49
<b>7. Implizite Funktionen</b>	<b>51</b>
7.1. Der Satz über Implizite Funktionen . . . . .	51
7.2. Lokale und globale Inverse . . . . .	53
7.3. Anwendung auf Differenzialgleichungen: Stetige Abhängigkeit . . . . .	55
7.4. Lagrange-Multiplikatoren . . . . .	57

<b>8. Fredholmoperatoren</b>	<b>59</b>
8.1. Definition, Stabilität . . . . .	59
8.2. Ljapunov-Schmidt Reduktion . . . . .	61
<b>III. Verzweigungstheorie</b>	<b>64</b>
<b>9. Lokale Verzweigung</b>	<b>65</b>
9.1. Ein topologisches Kriterium für eine Verzweigung . . . . .	66
9.2. Der Satz von Krasnoselskii . . . . .	67
9.3. Lokale Verzweigung im einfachen Eigenwert . . . . .	70
<b>10. Stabilität der stationären Zweige</b>	<b>76</b>
10.1. Stabilität und Eigenwerte . . . . .	76
10.2. Der Satz von Crandall-Rabinowitz . . . . .	79
<b>11. Globale Verzweigung</b>	<b>83</b>
11.1. Der Satz von Rabinowitz . . . . .	83
11.2. Beispiel für globale Verzweigung . . . . .	86
<b>12. Hopf-Verzweigung</b>	<b>87</b>
12.1. Aufgabenstellung . . . . .	87
12.2. Fixpunkte der Zeit- $t$ -Abbildung . . . . .	88
12.3. Der Satz von Hopf . . . . .	90
12.4. Ein alternativer Beweis der Hopf-Verzweigung . . . . .	92

## Konzeption der Vorlesung

**Inhalte der Vorlesung.** In dieser Vorlesung werden wir Methoden kennenlernen, mit denen man nichtlineare Probleme aus der Analysis studieren kann. Die wichtigsten Werkzeuge sind dabei

- Implizite Funktionen
- Fixpunktsätze
- Reduktionsmethoden
- Der Abbildungsgrad
- Verzweigungstheorie

Man kann diese Methoden auch einteilen in *lokale* und *globale* Methoden. Das fundamentale Werkzeug der lokalen Theorie sind die Impliziten Funktionen, sie liefern eine Reduktionsmethode (Ljapunov-Schmidt), und die lokale Verzweigungstheorie basiert größtenteils auf den Impliziten Funktionen. Das fundamentale Werkzeug der globalen Theorie ist der Abbildungsgrad. Mit ihm können Fixpunktsätze und globale Verzweigungsergebnisse abgeleitet werden. Die Trennung ist allerdings nicht scharf, oft werden verschiedene Methoden kombiniert.

Ein anderer Einteilungsversuch wäre der nach den getroffenen *Aussagen*. Die meisten unserer Aussagen betreffen die Existenz. Für eine nichtlineare Gleichung

$$F(u) = 0$$

mit  $F : X \rightarrow Y$ ,  $X, Y$  Banachräume, zeigen wir die Existenz einer Lösung  $u \in X$ . Dies ist eine typische Aussage in all den obigen Methoden. Für uns liegt dann das Interesse darin, wie wir eine gegebene Anwendung (z.B. eine Differenzialgleichung) in die obige Form bringen, also: Was wählen wir als  $F$ , was als  $u$ ? Oft noch wichtiger: Welche Räume  $X, Y$  sind geeignet? Was für eine Struktur hat  $F$ , damit wir etwas aussagen können?

Die Existenzaussage gewinnt an Wichtigkeit, wenn sie auf einer konstruktiven Methode basiert. Dann kann man z.B. numerische Verfahren ableiten. Andere Aussagen betreffen: Struktur der Lösungsmenge, Qualitative Eigenschaften der Lösungen, Stabilität, Regularität oder stetige Abhängigkeit von Daten.

**Zum Namen der Vorlesung.** Der Titel “Nichtlineare Analysis” ist nicht standard, es ist auch für Experten nicht unbedingt klar, welche Themen in eine solche Vorlesung gehören. Eher standardisiert ist der Name “Nichtlineare Funktionalanalysis”. Diese Vorlesung orientiert sich an einer typischen Stoffauswahl für Nichtlineare Funktionalanalysis, ist aber so konzipiert, dass weder die Vorlesung “Lineare Funktionalanalysis” noch “Partielle Differenzialgleichungen” vorausgesetzt wird. Insbesondere werden als Anwendungen gewöhnliche Differenzialgleichungen betrachtet und keine partiellen Differenzialgleichungen — oder zumindest nur selten ;-)

Der Satz über *Implizite Funktionen* im Banachraum erlaubt folgendes Vorgehen. Wir betrachten die parameterabhängige Differentialgleichung  $\partial_t u = f_\lambda(u)$  auf einem Zeitintervall  $[0, T]$  mit festen Startwerten  $u_0$ . Wir können  $u$  als Nullstelle einer Gleichung im Banachraum auffassen:

$$X := \{u \in C^1([0, T], \mathbb{R}^n) \mid u(0) = u_0\},$$

$$F : X \times \mathbb{R} \ni (u, \lambda) \mapsto F(u, \lambda) := \partial_t u - f(u, \lambda) \in Y := C^0([0, T], \mathbb{R}^n).$$

Angenommen, für  $\lambda = 0$  haben wir eine Lösung  $u^0$  gegeben, also  $F(u^0, 0) = 0$ . Dann können wir versuchen, mit dem Satz über Implizite Funktionen aufzulösen. Wir finden dann für kleine  $\lambda \in \mathbb{R}$  Nullstellen  $u^\lambda \in X$  mit  $F(u^\lambda, \lambda) = 0$ , also Lösungen der Differentialgleichung zu  $\lambda \neq 0$ .

Der *Abbildungsgrad* ordnet einer stetigen Funktion  $f : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und einem Wert  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  eine ganze Zahl zu,

$$d(f, \Omega, y_0) \in \mathbb{Z}.$$

Diese Zahl sieht die *topologischen Eigenschaften* von  $f$ , in dem Sinne, dass eine kleine (genauer: eine  $C^0$ -kleine) Störung von  $f$  denselben Abbildungsgrad hat. Weitere Eigenschaften: 1.) der Grad hängt nur von den Werten am Rand ab, also von  $f|_{\partial\Omega}$  und 2.) der Grad der Identität ist 1 für  $y_0 \in \Omega$ . Das *Lösungskriterium* besagt: Falls  $d(f, \Omega, y_0) \neq 0$ , so gibt es einen Punkt  $x \in \Omega$  mit  $f(x) = y_0$ .

Anwendung: Sei  $f : \mathbb{R}^n \supset B_1(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit  $f|_{\partial B_1(0)} = \text{id}|_{\partial B_1(0)}$ . Dann hat  $f$  eine Nullstelle. Bemerkung: Im Falle  $n = 1$  ist dies gerade der Zwischenwertsatz.

Beweis:  $d(f, B_1(0), 0) = d(\text{id}, B_1(0), 0) = 1$  wegen der Unabhängigkeit von den Werten im Inneren und wegen der Normalisierung. Das Lösungskriterium schließlich liefert, dass  $f$  eine Nullstelle hat.

Die *Verzweigungstheorie* beschäftigt sich im einfachsten Fall mit dem Problem, die Nullstellenmenge von

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(\lambda, x) = x\lambda + g(x, \lambda)$$

zu bestimmen, wo  $g$  quadratisch in  $x$  ist.

Antwort in diesem Fall: Für  $g \equiv 0$  ist die Nullstellenmenge ein Kreuz in  $\mathbb{R}^2$ , d.h. für  $\lambda \neq 0$  ist die einzige Nullstelle von  $f(\cdot, \lambda)$  die Null, für  $\lambda = 0$  sind alle  $x \in \mathbb{R}$  Nullstellen von  $f(\cdot, \lambda)$ . Der Effekt von  $g$  sollte in der Nähe von  $(x, \lambda) = (0, 0)$  klein sein. Wir erwarten also (und dies wird in Teil 3 der Vorlesung auch bestätigt), dass die Nullstellen in der Nähe der 0 wieder topologisch die Form eines Kreuzes haben.

*Anwendung: Differentialgleichungen.* In dieser Vorlesung betrachten wir Differentialgleichungen als *die* Anwendung der entwickelten Methoden. Wir messen die Stärke der Theorie daran, wie schnell oder wie elegant sie uns einen Zugang zu Aussagen über Differentialgleichungen gestattet, und ob sie uns ein tieferes Verständnis von Differentialgleichungen gewährt.

# **Part I.**

## **Der Abbildungsgrad**

# 1. Beschreibung des Abbildungsgrades

Der Abbildungsgrad soll zu einer Funktion  $f : G \rightarrow Y$  und einem Bildpunkt  $y_0 \in Y$  eine Zahl  $d(f, G, y_0) \in \mathbb{Z}$  liefern. Diese Zahl soll etwas über die Existenz von Lösungen  $x \in G$  der Gleichung  $f(x) = y_0$  aussagen.

## 1.1. Einführung, topologische Begriffe, Windungszahl

### In einer Dimension: Der Zwischenwertsatz

Betrachte stetige  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Falls  $\text{sgn}(f(a)) \neq \text{sgn}(f(b))$  gilt, dann hat die Gleichung

$$f(x) = 0$$

eine Lösung  $x \in (a, b)$ .

Man könnte so formulieren: Bilde die Zahl

$$d := \frac{1}{2} \text{sgn}(f(b)) - \frac{1}{2} \text{sgn}(f(a)). \quad (1.1)$$

Der Zwischenwertsatz besagt: Wenn  $d \neq 0$ , dann hat die Gleichung  $f(x) = 0$  eine Lösung.

Man kann die Zahl  $d$  auch anders ausdrücken. Wir wollen mit  $d$  die Anzahl der Nullstellen mit Vorzeichen zählen. Dazu bilden wir

$$d = \sum_{x \in (a, b), f(x)=0} \text{sgn}(f'(x)). \quad (1.2)$$

Dies ist sinnvoll möglich, falls  $f \in C^1$  und 0 ein regulärer Wert von  $f$  ist, wenn es also kein  $x \in (a, b)$  gibt mit  $f(x) = 0$  und  $f'(x) = 0$ .

Das  $d \in \mathbb{Z}$  aus (1.1) ist genau der Abbildungsgrad im Eindimensionalen.

- (1)  $d$  hängt nur von den Werten von  $f$  am Rand  $\partial(a, b)$  ab
- (2)  $d$  ist ganzzahlig
- (3) Lösungskriterium: Falls  $d \neq 0$  hat *jedes*  $f$  mit diesen Randwerten eine Lösung
- (4)  $d$  zählt die Nullstellen mit Vorzeichen

Wichtiger Punkt:  $f$  mit  $d = 0$  kann sehr wohl Nullstellen haben.

Homotopie: Wir bemerken, dass jede stetige Deformation von  $f$  (bei der die Endpunkte nie die Null treffen) die Zahl  $d$  unverändert lässt.

## In zwei Dimensionen: Die Windungszahl

Ein Weg im  $\mathbb{R}^2$  ist eine stetige Abbildung  $g : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Der Weg heißt *geschlossen*, falls  $g(L) = g(0)$ . Durch Reparametrisierung können wir das Intervall normieren und nur Wege  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  betrachten.

Zwei Wege  $g_0 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $g_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  können homotop sein: Wir schreiben  $g_0 \sim g_1$ , falls es eine stetige Abbildung  $h : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt mit  $h(\cdot, 0) = g_0$  und  $h(\cdot, 1) = g_1$ .

Geschlossene Wege mit gleichem Fußpunkt  $g_0(0) = g_1(0)$  können aneinandergesetzt werden: Wir schreiben  $g_0 * g_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$  für den Weg  $g$ , der definiert ist durch:  $g(x) = g_0(2x)$  für  $x \in [0, \pi]$  und  $g(x) = g_1(\pi + 2(x - \pi))$  für  $x \in [\pi, 2\pi]$ .

**Liftung.** Zu jedem geschlossenen Weg  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  (wir erinnern, dass wir bei Wegen immer Stetigkeit voraussetzen) existiert eine stetige Winkelvariable  $\Theta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass sich der Weg schreiben lässt als

$$g(x) = |g(x)|(\cos(\Theta(x)), \sin(\Theta(x))). \quad (1.3)$$

Der Winkel ist nur bis auf Vielfache von  $2\pi$  eindeutig. Allerdings ist die Funktion  $\Theta$  eindeutig bestimmt, sobald man einen Winkel  $\Theta(0) \in \mathbb{R}$  mit  $(\cos(\Theta(0)), \sin(\Theta(0))) = g(0)/|g(0)|$  festgelegt hat.

Die Funktion  $\Theta$  wird auch als *Liftung* bezeichnet. Abstrakt können wir die Aufgabe wie folgt beschreiben: Gegeben ist eine Funktion  $\Phi : I \rightarrow S^1$  auf dem Intervall  $I = [0, 2\pi]$ , gegeben durch  $\Phi(x) := g(x)/|g(x)|$ . Weiterhin ist eine Überlagerung der Kreislinie gegeben durch  $E : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ,  $E(x) = e^{ix}$ . Diese Abbildung ist surjektiv, nicht injektiv, aber lokal injektiv. Gesucht ist eine stetige Abbildung  $\Theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $\Phi = E \circ \Theta$ . Die Liftung  $\Theta$  existiert, lax formuliert, weil wir immer in der Umgebung eines Punktes  $\Phi(x) \in S^1$  stetig nach dem Winkel  $\Theta$  auflösen können.

**Windungszahl.** Mit Hilfe der Liftung können wir die *Windungszahl* des Weges  $g$  wie folgt definieren: Wir definieren die *Windungszahl* als

$$w(g, 0) := \frac{\Theta(2\pi) - \Theta(0)}{2\pi} \in \mathbb{Z}. \quad (1.4)$$

Wir zählen also, wie oft sich der Weg um den Nullpunkt (in mathematisch positiver Richtung) herumwindet.

Für die Verkettung von Wegen gilt:  $w(g_0 * g_1) = w(g_0) + w(g_1)$ .

**Abbildungsgrad.** Wir betrachten den Definitionsbereich  $G := \bar{B}_1^2 \subset \mathbb{R}^2$  (die abgeschlossene Einheitskreisscheibe) und eine stetige Abbildung  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Wir fordern, dass die Bildwerte des Randes nie den Wert  $y_0 = 0$  haben, dass also  $f(\partial G) \cap \{0\} = \emptyset$ . Wir bemerken, dass wir die Abbildung  $g := f|_{\partial G}$  als einen Weg auffassen können,  $g(x) := f(e^{ix})$ . Mit Hilfe dieses Weges setzen wir

$$d := d(f, G, y_0) := w(f|_{\partial G}, y_0). \quad (1.5)$$

Wir zählen also beim Abbildungsgrad, wie oft sich die Randwerte um den Punkt  $y_0$  herumwinden.

Der Abbildungsgrad in  $n = 2$  hat die obigen Eigenschaften (1)–(4). Dabei sind (1) und (2) klar, die anderen Eigenschaften werden wir später einsehen. Zudem ist der Abbildungsgrad unabhängig von Deformationen von  $f$ , solange die Deformationen nie den Nullpunkt treffen.

## Homotopien und Nullhomotopien

**Definition 1.1** (Homotopie). *Seien  $M, N$  topologische Räume und  $f, g \in C^0(M, N)$ . Dann heißt  $f$  homotop zu  $g$  und wir schreiben  $f \sim g$ , falls es eine Homotopie zwischen  $f$  und  $g$  gibt, also eine Abbildung  $h \in C^0(M \times [0, 1], N)$  mit*

$$h(\cdot, 0) = f, \quad h(\cdot, 1) = g. \quad (1.6)$$

Wir nennen  $f$  nullhomotop, falls es einen Punkt  $y_0 \in N$  gibt mit  $f \sim y_0$ ; genauer:  $f \sim g$  für die konstante Abbildung  $g(x) = y_0 \forall x$ .

Bemerkung: Die Homotopie definiert eine Äquivalenzrelation " $\sim$ ". Die Relation ist symmetrisch, denn Homotopien können rückwärts durchlaufen werden. Sie ist transitiv, denn Homotopien können aneinandergesetzt werden.

**Zweidimensionaler Fall.** Wie bereits in der Definition des Abbildungsgrades geschehen, identifizieren wir immer eine Abbildung  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit dem geschlossenen Weg  $\tilde{g} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\tilde{g}(x) = g(e^{ix})$ .

Wir betrachten Abbildungen  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  und deren Deformationen. Dabei betrachten wir nur Deformationen (Homotopien) mit dem Zielraum  $N = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , also Homotopien, die nie den Nullpunkt treffen.

**Lemma 1.2** (Homotopie von Kurven in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ). *Für Wege sind die Homotopieklassen durch die Windungszahl  $w$  bestimmt. Für zwei Wege  $g_0, g_1 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  gilt:*

$$g_0 \sim g_1 \iff w(g_0, 0) = w(g_1, 0). \quad (1.7)$$

Die Schritte des Beweises sollen in den Übungen besprochen werden. Ein wesentlicher Schritt ist, zu zeigen, dass ein Weg  $g$  mit  $w(g, 0) = k \in \mathbb{Z}$  zu dem Standardweg  $g_k(e^{ix}) = e^{ikx}$  homotop ist.

**Fundamentalgruppe.** Ein Charakteristikum eines topologischen Raumes  $N$  ist seine Fundamentalgruppe. Für einen Fußpunkt  $y_0 \in N$  setzen wir

$$\pi_1(N, y_0) := \{g : [0, 2\pi] \rightarrow N \text{ ein geschlossener Weg mit } g(0) = y_0\} / \sim. \quad (1.8)$$

Multiplikation von Wegen ist durch die Zusammensetzung gegeben. Für wegzusammenhängende Räume  $N$  ist die Gruppe unabhängig von  $y_0$ .

Für  $N = S^1$ : Die Fundamentalgruppe  $\pi_1(S^1)$  besteht aus geschlossenen Wegen in die  $S^1$ , wobei zwei Wege identifiziert werden, die homotop sind. Lemma 1.2

impliziert, dass  $\pi_1(S^1)$  mit  $\mathbb{Z}$  identifiziert werden kann, die Windungszahl liefert einen Gruppenisomorphismus.

Für uns ist vor allem diese einfache Tatsache wichtig: Es gibt Wege  $g : [0, 2\pi] \rightarrow N := S^1$  (oder, äquivalent, Wege  $g : [0, 2\pi] \rightarrow N := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ), die *nicht nullhomotop* sind.

**Allgemeine Dimension: Es gibt topologische Kriterien.** Wir sind an Nullstellen von Abbildungen interessiert, daher betrachten wir folgenden Begriff.

**Definition 1.3** (Wesentliche Abbildungen). *Eine Abbildung  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  heißt wesentlich wenn gilt: Jede stetige Fortsetzung  $f : \bar{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  von  $\varphi$  hat eine Nullstelle.*

**Satz 1.4** (Wesentliche Abbildungen und Nullhomotopie). *Sei  $\varphi$  eine Abbildung  $\varphi : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . Wir betrachten die Normalisierung  $\psi : S^{n-1} \rightarrow S^{m-1}$ , gegeben durch  $\psi := \frac{\varphi}{|\varphi|}$ . Dann gilt*

$$\varphi \text{ wesentlich} \iff \psi \text{ nicht nullhomotop (als Abbildung nach } S^{m-1}\text{)}. \quad (1.9)$$

Der Satz sagt: Die Randwerte können topologische Eigenschaften haben, so dass es unmöglich ist, ohne eine Nullstelle fortzusetzen. Hier: Falls die Randwerte  $\varphi$  so sind, dass ihre Normierung  $\psi$  nicht nullhomotop ist, so können die Randwerte nicht ohne Nullstelle fortgesetzt werden. Im Zweidimensionalen wegen Lemma 1.2: Wenn die Randwerte eine Windungszahl ungleich 0 haben, dann können sie nicht nullhomotop sein, also hat jede stetige Fortsetzung der Randwerte eine Nullstelle.

Bemerkung: Im Fall  $m > n$  ist keine Abbildung wesentlich.

*Beweis.* Wir wollen die Äquivalenz (A)  $\iff$  (B) aus (1.9) zeigen. Wir beginnen mit der einfachen Richtung.

“ $\Leftarrow$ ”: Anstelle von (B) $\Rightarrow$ (A) zeigen wir  $\neg(A) \Rightarrow \neg(B)$ . Wir nehmen also an, dass  $\varphi$  nicht wesentlich ist. Dann existiert eine stetige Fortsetzung ohne Nullstelle, wir wählen eine solche Fortsetzung  $f : \bar{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Mit Hilfe von  $f$  definieren wir eine Homotopie durch

$$h(x, t) := \frac{f(tx)}{|f(tx)|}.$$

Dann ist  $h$  stetig, weil  $f$  stetig ist und keine Nullstelle hat. Für  $t = 1$  gilt  $h(x, 1) = \psi(x)$ . Für  $t = 0$  gilt  $h(x, 0) = y_0$  für den Punkt  $y_0 := \frac{f(0)}{|f(0)|}$ . Damit ist  $h$  eine Homotopie von  $\psi$  nach  $y_0$ . Die Abbildung  $\psi$  ist also nullhomotop.

“ $\Rightarrow$ ”: Wir nehmen nun  $\neg(B)$  an, es sei also  $\psi$  nullhomotop,  $\psi \sim 0$ . Es gibt daher eine Homotopie  $h \in C^0(S^{n-1} \times [0, 1], S^{m-1})$  von  $\psi$  zu einem Punkt  $y_0$ . Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass  $\varphi$  eine stetige Fortsetzung  $f$  ohne Nullstelle besitzt. Wir verwenden die Homotopie  $h$  und setzen

$$f(x) := \begin{cases} \left(1 - |x| \left(1 - \left|\varphi\left(\frac{x}{|x|}\right)\right|\right)\right) \cdot h\left(\frac{x}{|x|}, 1 - |x|\right) & \text{für } x \neq 0, \\ y_0 & \text{für } x = 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Die Funktion  $f$  erfüllt  $f = \varphi$  auf  $S^{n-1}$ : Für  $x \in S^{n-1}$  gilt  $|x| = 1$ , also

$$f(x) = (1 - (1 - |\varphi(x)|)) \cdot h(x, 0) = |\varphi(x)| h(x, 0) = |\varphi(x)| \psi(x) = \varphi(x).$$

Daher ist  $f$  eine Fortsetzung von  $\varphi$ .

Die Abbildung  $f$  ist stetig für  $x \neq 0$ . Sie ist auch stetig in  $x = 0$ , weil die Funktionen  $h(\cdot, s) : S^{n-1} \rightarrow S^{m-1}$  für  $s \rightarrow 1$  gleichmäßig gegen  $y_0$  konvergieren (denn  $S^{n-1}$  ist kompakt) und  $\varphi$  beschränkt ist.

Wir behaupten, dass  $f$  keine Nullstelle hat, also  $f(x) \neq 0 \forall x$ . Tatsächlich können wir rechnen:

$$f(x) = 0 \iff 1 - |x| \left( 1 - \left| \varphi \left( \frac{x}{|x|} \right) \right| \right) = 0,$$

und es gilt immer

$$|x| \left( 1 - \left| \varphi \left( \frac{x}{|x|} \right) \right| \right) < |x| \leq 1.$$

Damit ist die nullstellenfreie Fortsetzung  $f$  gefunden. □

## Komplexe Formel für $n = 2$

In diesem kurzen Abschnitt sind die Rechnungen teilweise etwas formal, was heißen soll: Die Rechnungen lassen sich zwar alle nachweisen, aber die Rechnungen sind in der vorliegenden Form kein Beweis für die behaupteten Formeln. Sie sind aber so, dass sie (hoffentlich) die Formeln glaubwürdig machen.

Wir rechnen komplex, also in  $\mathbb{C}$ . Für eine Zahl  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ist das Winkelargument gegeben durch  $\Theta = \arg(z)$ . Dieses Winkelargument ist auch ein Teil des Logarithmus: Für  $z = r e^{i\Theta}$  gilt  $\log(z) = \log(r) + i\Theta$ . Daher ist also das Winkelargument  $\Theta$  der Imaginärteil des Logarithmus. (Hier ist schon die erste problematische Stelle: Wir müssen hier eigentlich immer die Logarithmusfunktion lokal fortsetzen, der Imaginärteil "nimmt mit einer Umdrehung immer um  $2\pi$  zu oder ab.)

Wir verwenden  $S^1 = \partial B_1 \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$  und rechnen im Komplexen, fassen also insbesondere eine Abbildung  $g : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  auf als Abbildung  $g : \mathbb{C} \supset S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . In der nachfolgenden Rechnung verwenden wir: (i) Die Definition der Windungszahl, im Wesentlichen als Integral über die Winkelableitung. (ii) Die Tatsache  $\Theta = \text{Im } \log(z)$  und die Tatsache, dass der Realteil verschwindet, denn das Integral über die Ableitung von  $\log(|g(e^{it})|)$  verschwindet nach dem Hauptsatz. (iii) Die Ableitung des Logarithmus.

$$w(g, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Theta'(e^{it}) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} [\log(g(e^{it}))]'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{g'(e^{it})}{g(e^{it})} i e^{it} dt.$$

Wir betrachten nun eine holomorphe Fortsetzung  $f$  der Randwerte  $g$ , also  $f|_{S^1} = g$  und  $f$  holomorph. Für  $f$  schreiben wir wegen  $z = e^{it}$  und  $dz = i e^{it} dt$  (eine zweite problematische Stelle!):

$$w(f|_{S^1}, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f'}{f}.$$

In dieser Formel wollen wir den Residuensatz anwenden. Dazu betrachten wir eine Nullstelle  $z_0$  von  $f$ . In der Nullstelle entwickeln wir  $f$  in sein Taylorpolynom und

betrachten den ersten nichttrivialen Beitrag, für  $k \in \mathbb{N}$  also  $f(z) = a_k(z - z_0)^k + \dots$  mit  $a_k \neq 0$ . Wir nennen dann  $k$  die Vielfachheit der Nullstelle und schreiben dafür  $v_f(z_0) = k$ . Die Funktion  $f'/f$  hat um den Punkt  $z_0$  herum die Form  $(f'/f)(z) = k(z - z_0)^{-1} + \dots$ . Der Residuensatz liefert daher

$$w(f|_{S^1}, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S^1} \frac{f'}{f} = \sum_z v_f(z). \quad (1.11)$$

Dabei geht die Summe über alle  $z \in B_1 \subset \mathbb{C}$  mit  $f(z) = 0$  und  $v_f(z)$  ist die Vielfachheit  $k$  der Nullstelle.

Formel (1.11) liefert insbesondere: Für  $w(f|_{S^1}, 0) \neq 0$  hat jede Fortsetzung der Randwerte eine Nullstelle.

Im Zweidimensionalen haben wir mit der Windungszahl genau den Abbildungsgrad gefunden:

$$d(f, B_1, 0) = w(f|_{S^1}, 0).$$

## 1.2. Die Axiome des Abbildungsgrades

Wir fordern für den Abbildungsgrad  $d$  die folgenden Eigenschaften (d1)–(d5).

(d1) (Ganzzahligkeit)  $X$  sei ein Banachraum,  $G \subset X$  offen, beschränkt,  $f : \bar{G} \rightarrow X$  stetig,  $y_0 \notin f(\partial G)$ . Dann ist der Abbildungsgrad eine ganze Zahl

$$d(f, G, y_0) \in \mathbb{Z}.$$

Im Unendlichdimensionalen: Fordere  $f = \text{id} + g$  mit  $g$  kompakt.

(d2) (Lösungskriterium)

$$d(f, G, y_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists x \in G : f(x) = y_0.$$

(d3) (Normierung)

$$d(\text{id}, G, y_0) = \begin{cases} 1 & y_0 \in G \\ 0 & y_0 \notin \bar{G}. \end{cases}$$

(d4) (Homotopieinvarianz)  $h : \bar{G} \times [0, 1] \rightarrow X$  stetig,  $y : [0, 1] \rightarrow X$  stetig,  $y(t) \notin h(\partial G, t) \forall t$ . Dann gilt

$$t \mapsto d(h(\cdot, t), G, y(t)) \quad \text{konstant.}$$

Im Fall  $\dim(X) = \infty$  fordern wir, dass  $h(x, t) = x + g(x, t)$  mit  $g$  kompakt auf  $G \times [0, 1]$ .

(d5) (Ausschneiden)  $G_1, G_2 \subset G$  offen,  $\bar{G}_1 \cap \bar{G}_2 = \emptyset$ ,  $f : \bar{G} \rightarrow X$  stetig,  $y_0 \notin f(\bar{G} \setminus (G_1 \cup G_2))$ . Dann gilt

$$d(f, G, y_0) = d(f, G_1, y_0) + d(f, G_2, y_0).$$

Der Rest von Teil I dieses Textes beschäftigt sich mit zwei Fragen:

- Existiert ein Abbildungsgrad, also ein  $d$  mit den Eigenschaften (d1)–(d5)?
- Welche mathematischen Aussagen können wir beweisen, indem wir ausnutzen, dass es einen Abbildungsgrad gibt?

**Satz 1.5** (Eindeutigkeit des Abbildungsgrades). *Die Eigenschaften (d1) zusammen mit (d3)–(d5) bestimmen den Grad eindeutig.*

Wir werden dieses Theorem im Folgenden nicht verwenden, für uns ist nur die Existenz des Abbildungsgrades wichtig. Zum Beweis des Satzes verweisen wir auf Deimling [4], Chapter 1, §1 und die Übungen.

Als eine typische Anwendung des Abbildungsgrades zeigen wir schon hier den Satz von Schauder:

**Satz 1.6** (Schauder). *Sei  $X$  ein Banachraum,  $\bar{B} \subset X$  die abgeschlossene Einheitskugel und  $g : \bar{B} \rightarrow \bar{B}$  stetig und kompakt. Dann hat  $g$  einen Fixpunkt.*

*Beweis.* Wir setzen  $f := \text{id} - g$ ,  $y_0 := 0$  und  $G := B$ . Wir suchen Nullstellen von  $f$ . Daher können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $f$  keine Nullstelle auf  $\partial B$  hat. Wegen (d2) reicht es zu zeigen:

$$d(f, G, 0) \neq 0.$$

Wir benutzen die Homotopie  $h(x, t) = x - t \cdot g(x)$  zwischen  $f$  (für  $t = 1$ ) und  $\text{id}$  (für  $t = 0$ ). Wir behaupten, dass die Homotopie zulässig ist: Für  $x$  mit  $|x| = 1$  gilt

$$|h(x, t)| \geq 1 - t|g(x)| > 0 \quad \text{für } t < 1$$

und

$$|h(x, t)| = |f(x)| > 0 \quad \text{für } t = 1.$$

Die Homotopie ist also tatsächlich zulässig.

Aus (d4) und (d3) folgt  $d(f, G, 0) = d(\text{id}, G, 0) = 1$ . Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$

## 1.3. Lemma von Sard, Funktionen vorgegebener Divergenz

### Kritische Punkte und das Lemma von Sard

In diesem Text benötigen wir eine einfache Version des Lemmas von Sard. Das Lemma besagt, dass eine Funktion nicht viele kritische Werte haben kann.

**Definition 1.7.** *Wir betrachten  $X \subset \mathbb{R}^n$  und  $Y = \mathbb{R}^k$  und Funktionen  $F \in C^1(X, Y)$ .*

1. Ein Punkt  $x_0 \in X$  heißt *regulärer Punkt* von  $F$ , wenn  $DF(x_0)$  maximalen Rang hat, also  $\text{Rg}(DF(x_0)) = \min\{n, k\}$ .

2. Ein Punkt, der nicht regulär ist, heißt kritischer Punkt.
3. Ein Punkt  $y_0$  in  $Y$  heißt kritischer Wert, falls  $F^{-1}(y_0)$  einen kritischen Punkt enthält.

**Satz 1.8** (Lemma von Sard, einfache Version). Sei  $Q = [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$  ein abgeschlossener Würfel und  $F \in C^1(Q, \mathbb{R}^n)$ , insbesondere also mit beschränkter und gleichmäßig stetiger Ableitung. Dann hat die Menge der kritischen Werte von  $F$  das  $n$ -dimensionale Lebesguemaß 0 in  $\mathbb{R}^n$ .

*Beweis.* Durch Aufteilen jeder Seite in  $N$  gleich lange Abschnitte wird der Würfel in  $N^n$  Würfel  $W_k \subset Q$  der Kantenlänge  $N^{-1}$  geteilt. Für zwei Punkte  $x, x_0$  in demselben Teilwürfel  $W_k$  gilt

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_0) + \int_0^1 DF(x_0 + t(x - x_0)) \cdot (x - x_0) dt \\ &= F(x_0) + DF(x_0) \cdot (x - x_0) + \rho(x_0, x, N), \end{aligned}$$

wobei wegen gleichmäßiger Stetigkeit von  $DF$  für den Fehler  $\rho$  gilt

$$\rho_0(N) := \sup_k \sup_{x_0, x \in W_k} \rho(x_0, x, N), \quad N\rho_0(N) \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Wir wollen nun die "kritischen Würfel" betrachten und setzen

$$J := \{k \mid W_k \text{ enthält einen kritischen Punkt}\}.$$

Für einen Index  $k \in J$  gibt es also  $x_0 \in W_k$ , so dass  $x_0$  ein kritischer Punkt von  $F$  ist. Wegen  $\det DF(x_0) = 0$  ist für die Funktion  $F_{app}(x) := F(x_0) + D_x F(x_0) \cdot (x - x_0)$  das Bild  $F_{app}(W_k)$  in einer  $(n - 1)$ -dimensionalen Hyperebene des  $\mathbb{R}^n$  enthalten. Die Bildpunkte  $F(x)$  haben höchstens den Abstand  $\rho(x_0, x, N)$  von  $F_{app}(x)$ , daher ist die Bildmenge  $F(W_k)$  in einem Quader enthalten, dessen Breite in  $n - 1$  Richtungen sich durch  $CN^{-1}$  abschätzen lässt und dessen Höhe maximal  $\rho_0(N)$  ist. Das Volumen des Bildwürfels  $F(W_k)$  ist also abgeschätzt durch

$$\mathcal{L}^n(F(W_k)) \leq CN^{-(n-1)} \rho_0(N). \quad (1.12)$$

Wir berechnen nun das Bildvolumen aller Würfel  $W_k$ , die kritische Punkte von  $F$  enthalten. Es gibt höchstens  $N^n$  Stück und daher gilt für die Volumina,  $|\cdot| = \mathcal{L}^n$ ,

$$\begin{aligned} \left| F \left( \bigcup_{k \in J} W_k \right) \right| &= \left| \bigcup_{k \in J} F(W_k) \right| \leq \sum_{k \in J} |F(W_k)| \\ &\leq CN^n \left( \frac{1}{N} \right)^{n-1} \rho_0(N) = CN\rho_0(N) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $N \rightarrow \infty$ . Die Menge aller kritischen Werte ist also in der Menge  $F \left( \bigcup_{k \in J} W_k \right)$  von beliebig kleinem Maß enthalten. Die Menge der kritischen Werte muss also eine Nullmenge sein.  $\square$

## Funktionen mit vorgegebener Divergenz

Als Hilfsaussage beweisen wir noch ein anderes Resultat von unabhängigem Interesse. Die Aussage wird für  $\varepsilon$ -Würfel bewiesen, da wir später solche Würfel betrachten werden.

**Satz 1.9** (Funktion mit gegebener Divergenz und Nullrandwerten). *Für  $\varepsilon > 0$  sei  $K := K^n := (-\varepsilon, \varepsilon)^n$  ein Würfel in  $\mathbb{R}^n$ . Zu jeder Funktion  $q \in C_c^1(K, \mathbb{R})$  mit  $\int_K q = 0$  existiert ein  $w \in C_c^1(K, \mathbb{R}^n)$ , so dass  $q = \operatorname{div}(w)$ .*

*Beweis.* Wir führen einen Induktionsbeweis mit Induktion über die Dimension  $n$ . Für  $n = 1$  setzen  $w(t) := \int_{-\varepsilon}^t q(\xi) d\xi$ . Diese Funktion  $w$  hat kompakten Träger in  $K^1$ , ist von der Klasse  $C^1$ , und hat die Ableitung (also die Divergenz)  $q$ . Damit ist die Aussage für  $n = 1$  bewiesen.

Wir nehmen nun an, dass der Satz in  $n$  Dimensionen bewiesen ist. Wir wollen ihn in  $n + 1$  Dimensionen beweisen und wählen die Koordinaten  $x = (y, t) = (y_1, \dots, y_n, t) \in K^{n+1}$ . Zunächst führen wir eine neue Größe ein: Die Masse von  $q$  in den Linien über den einzelnen Punkten  $y$ ,

$$m(y) := \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} q(y, t) dt.$$

Die Funktion  $m$  ist wieder von der Klasse  $C^1$  und hat einen kompakten Träger im Würfel  $K^n$ . Nach Induktionsvoraussetzung können wir daher  $m$  darstellen als  $m(y) = \operatorname{div}_n(g_1, \dots, g_n)(y)$  mit  $g \in C_c^1(K^n)$ . Wir wählen nun eine beliebige Abschneidefunktion  $\eta \in C_c^1((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R})$  mit  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \eta = 1$ . Damit setzen wir

$$g_{n+1}(y, t) := \int_{-\varepsilon}^t (q(y, s) - \eta(s) m(y)) ds.$$

Dann hat  $g_{n+1}$  seinen Träger kompakt enthalten in  $K = K^{n+1}$ . Die Funktion

$$w(y, t) := (\eta(t)g_1(y), \dots, \eta(t)g_n(y), g_{n+1}(y, t))$$

hat kompakten Träger und erfüllt

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{n+1} w(y, t) &= \eta(t) \operatorname{div}_n(g_1, \dots, g_n)(y) + \partial_t g_{n+1}(y, t) \\ &= \eta(t)m(y) + q(y, t) - \eta(t)m(y) = q(y, t). \end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

## 2. Konstruktion des Grades im Endlichdimensionalen

### 2.1. Definition des Grades für $C^2$ -Abbildungen

In diesem Abschnitt definieren wir den Abbildungsgrad explizit mit Hilfe eines Integrals. Im Folgenden ist  $G \subset \mathbb{R}^n$  immer offen und beschränkt.

Für  $\varepsilon > 0$  führen wir den Raum  $\mathcal{A}_\varepsilon$  der Glättungsfunktionen mit kleinem Träger ein,

$$\mathcal{A}_\varepsilon := \left\{ \omega \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}^n} \omega = 1, \text{supp}(\omega) \subset B_\varepsilon^n(0) \right\}. \quad (2.1)$$

Wir betrachten immer Funktionen  $f \in C^0(\bar{G}, \mathbb{R}^n)$  und Werte  $y_0 \notin f(\partial G)$ . Für eine solche Funktion gilt

$$\varepsilon := \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{dist}(f(\partial G), y_0) > 0, \quad (2.2)$$

da  $\partial G$  kompakt ist und daher auch  $f(\partial G)$  kompakt ist. Der Faktor  $\sqrt{n}$  dient dazu, dass auch der Würfel  $y_0 + [-\varepsilon, \varepsilon]^n$  das Bild  $f(\partial G)$  nicht trifft (d.h.: der Schnitt der beiden Mengen ist leer).

**Definition 2.1** (Definition des Grades für  $C^2$ -Abbildungen). *Zu  $f \in C^0(\bar{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(G, \mathbb{R}^n)$  und  $y_0 \notin f(\partial G)$  wählen wir  $\varepsilon$  aus (2.2) und eine Glättungsfunktion  $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon$ . Mit der Funktionaldeterminante  $\mathcal{J}_f : G \rightarrow \mathbb{R}$  von  $f$ ,  $\mathcal{J}_f(x) := \det(Df(x))$ , setzen wir*

$$d(f, G, y_0) := \int_G \omega(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) dx. \quad (2.3)$$

Wir müssen zeigen: (i) Diese Zahl ist unabhängig von der Wahl von  $\omega$ . (ii) Die Eigenschaften (d1)–(d5) gelten.

Das nachfolgende Lemma zeigt (i) und damit die Wohldefiniertheit von  $d(f, G, y_0)$ .

**Lemma 2.2** (Wohldefiniertheit des Grades). *Seien  $f, G, y_0$  und  $\varepsilon$  wie in Definition 2.1 und  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}_\varepsilon$ . Dann gibt es  $v \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$  mit Träger enthalten in  $G$  und*

$$\omega_1(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) - \omega_2(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) = \text{div } v(x) \quad \forall x \in G. \quad (2.4)$$

*Insbesondere ist der Grad für  $C^2$ -Abbildungen wohldefiniert.*

*Beweis.* Wir geben zwei Beweise an. Beide basieren darauf, dass die  $C^1$ -Funktion  $\omega_1(y) - \omega_2(y)$  mit kompaktem Träger als Divergenz geschrieben wird

$$\omega_1(y) - \omega_2(y) = \text{div } w(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

für eine  $C^1$ -Funktion  $w$  mit einem Träger, der kompakt im Würfel  $(-\varepsilon, \varepsilon)^n$  enthalten ist. Die Funktion  $w$  existiert nach Satz 1.9.

In unserem ersten Beweis benutzen wir eine Eigenschaft der Kofaktormatrix, die wir hier nicht beweisen. Der zweite Beweis benutzt Differenzialformen.

1. *Beweis:* Wir benutzen die Kofaktor-Matrix  $A$  von  $Df$ . Diese ist definiert durch  $A_{kj}(x) := (-1)^{k+j} D_{kj}(x)$ , wobei  $D_{kj}(x)$  die Determinante der Matrix ist, die man aus  $Df(x)$  durch Streichen der  $k$ -ten Zeile und der  $j$ -ten Spalte erhält. Die Kofaktor-Matrix hat (als Funktion in  $x$ ) die Eigenschaft, dass die Divergenz jeder Zeile verschwindet. Es gilt (hier ohne Beweis):

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial A_{kj}(x)}{\partial x_j} = 0 \quad \forall k \leq n. \quad (2.6)$$

Wir benutzen nun  $w$  aus (2.5) und definieren  $v$  mit einer Verkettung,

$$v_j(x) := \sum_k w_k(f(x) - y_0) A_{kj}(x).$$

Für diese Funktion können wir mit der Kettenregel nachrechnen:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} v &\stackrel{(2.6)}{=} \sum_{k,j} \partial_{x_j} [w_k(f(x) - y_0)] A_{kj}(x) \\ &= \sum_{k,j,i} \partial_{y_i} w_k(f(x) - y_0) \partial_{x_j} f_i(x) A_{kj} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k,i} \partial_{y_i} w_k(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) \delta_{i,k} \\ &= (\operatorname{div} w)(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) \\ &\stackrel{(2.5)}{=} (\omega_1 - \omega_2)(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x). \end{aligned}$$

In der mit (\*) markierten Zeile haben wir die Entwicklungsformel für die Determinante benutzt,  $\sum_i \partial_j f_i(x) A_{kj} = \det Df(x) \delta_{i,k}$ . Damit ist (2.4) bewiesen.

2. *Beweis:* Für diesen Beweis muss man die Rechenregeln für Differenzialformen kennen. Wieder benutzen wir (2.5), schreiben also  $\omega_1(y) - \omega_2(y) = \operatorname{div} w(y)$ . Dann gilt mit den Differenzialformen  $dV = dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n$  und

$$w \, dS = \sum_j w_j(y) (-1)^j dy_1 \wedge \dots \wedge dy_{j-1} \wedge dy_{j+1} \wedge \dots \wedge dy_n$$

die Rechnung (hier zur Vereinfachung der Notation für  $y_0 = 0$ )

$$\begin{aligned} &(\omega_1(f(x)) - \omega_2(f(x))) \mathcal{J}_f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= [\operatorname{div} w](f(x)) df_1 \wedge \dots \wedge df_n \\ &= f^*(\operatorname{div} w \, dV) = f^*d(w \, dS) = d(f^*(w \, dS)). \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die linke Seite als äußere Ableitung geschrieben werden kann. Daher ist der Vorfaktor  $(\omega_1 - \omega_2)(f(x)) \mathcal{J}_f(x)$  der Volumenform die Divergenz einer vektorwertigen Funktion. Dies zeigt wieder (2.4).  $\square$

An diesem Punkt haben wir eine wohlgestellte Definition des Grades für  $C^2$ -Abbildungen zur Verfügung. Wir wollen nun erste Eigenschaften des Grades beweisen.

**Proposition 2.3.** *Der Abbildungsgrad aus Definition 2.1 erfüllt (d3) und (d5). Weiterhin gilt für Homotopien wie in (d4) mit  $h \in C^2(G \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ , dass die Abbildung*

$$t \mapsto d(h(\cdot, t), G, y(t))$$

*stetig ist.*

*Beweis.* a) *Normierung.* Die Normierungseigenschaft (d3) folgt sofort aus der Definition. Für  $f = \text{id}$  und  $y_0 \in G$  erhalten wir

$$d(f, G, y_0) = \int_G \omega(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) dx = \int_G \omega(x - y_0) dx = 1.$$

Analog findet man aufgrund von  $\text{supp}(\omega) \subset B_\varepsilon(0)$  auch  $d(f, G, y_0) = 0$  für  $y_0 \notin G$ .

b) *Homotopie.* Wir betrachten eine Homotopie  $h \in C^2(G \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ . Die zwei Mengen

$$R := \{(t, h(x, t)) | x \in \partial G, t \in [0, 1]\}$$

(Evolution der Randbilder) und

$$Q := \{(t, y(t)) | t \in [0, 1]\}$$

(Evolution der Werte) sind kompakt und haben nach Voraussetzung in (d4) einen leeren Schnitt; sie haben daher einen positiven Abstand  $\varepsilon > 0$ . Für  $\omega \in \mathcal{A}_{\varepsilon/(2\sqrt{n})}$  hängt der Ausdruck

$$d(h(\cdot, t), G, y(t)) = \int_G \omega(h(x, t) - y(t)) \mathcal{J}_{h(\cdot, t)}(x) dx$$

stetig von  $t$  ab. Dies zeigt die stetige Abhängigkeit des Grades.

c) *Ausschneiden.* Für die Ausschneideeigenschaft (d5) sei  $y_0 \notin f(\bar{G} \setminus (G_1 \cup G_2))$ . Dies impliziert wegen der Kompaktheit der Bildmenge  $\varepsilon := \text{dist}(y_0, f(\bar{G} \setminus (G_1 \cup G_2))) > 0$ . Wir benutzen dieses  $\varepsilon > 0$ , um die Grade  $d(f, G, y_0)$ ,  $d(f, G_1, y_0)$  und  $d(f, G_2, y_0)$  mit Formel (2.3) zu berechnen. Aussage (d5) folgt aus der Formel, weil der Integrand auf  $\bar{G} \setminus (G_1 \cup G_2)$  verschwindet und weil das Integral über  $G_1 \cup G_2$  in zwei Anteile additiv aufgeteilt werden kann.  $\square$

Mit den bisherigen Resultaten benötigen wir nur noch die Ganzzahligkeit und den Grad für nicht- $C^2$  Funktionen.

## 2.2. Äquivalente Darstellungen

### Summenformel

Notation: Summen über die leere Menge werden gleich 0 gesetzt.

**Satz 2.4** (Gezählte Nullstellen). *Sei  $f \in C^2(G)$  so, dass der Abbildungsgrad  $d(f, G, y_0)$  wie in Definition 2.1 gebildet werden kann. Falls  $y_0$  ein regulärer Wert von  $f$  ist, so gilt*

$$d(f, G, y_0) = \sum_{x \in f^{-1}(y_0)} \operatorname{sgn} \mathcal{J}_f(x). \quad (2.7)$$

*Beweis.* Für  $f^{-1}(y_0) = \emptyset$  sind beide Seiten Null.

Die Menge  $f^{-1}(y_0)$  ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Da  $y_0$  ein regulärer Wert ist, gilt  $f^{-1}(y_0) = \bigcup_k \{x_k\}$  mit endlich vielen  $x_k \in G$ . Weiterhin gilt wegen der Regularität der Punkte (Satz über die lokale Existenz der Umkehrfunktion):

$$f|_{B_\rho(x_k)} : B_\rho(x_k) \rightarrow f(B_\rho(x_k)) \quad \text{ist ein Diffeomorphismus}$$

für  $\rho > 0$  hinreichend klein. Insbesondere ist  $\operatorname{sgn} \mathcal{J}_f$  konstant in jeder Kugel. Wir können weiterhin annehmen (Verkleinerung von  $\rho$ , falls notwendig), dass die Kugeln  $B_\rho(x_k)$  disjunkt sind.

Wir verkleinern nun eventuell zusätzlich  $\varepsilon = \frac{1}{2} \operatorname{dist}(f(\partial G), y_0)$ , um auch die Bedingung

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(f(\bar{G} \setminus \bigcup_k B_\rho(x_k)), y_0)$$

zu erfüllen. Wir berechnen für  $\omega \in \mathcal{A}_\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} d(f, G, y_0) &= \int_G \omega(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) \, dx \\ &= \sum_k \int_{B_\rho(x_k)} \omega(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) \, dx \\ &= \sum_k \operatorname{sgn} \mathcal{J}_f(x_k) \int_{B_\rho(x_k)} \omega(f(x) - y_0) |\mathcal{J}_f(x)| \, dx \\ &= \sum_k \operatorname{sgn} \mathcal{J}_f(x_k) \int_{f(B_\rho(x_k))} \omega(y - y_0) \, dy \\ &= \sum_k \operatorname{sgn} \mathcal{J}_f(x_k). \end{aligned}$$

Damit haben wir die behauptete Summenformel (2.7) erhalten. □

**Corollar 2.5.** *Der Abbildungsgrad aus Definition 2.1 erfüllt (d1)–(d5) für  $f \in C^2$  und glatte Homotopien  $h \in C^2(G \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ .*

*Beweis.* Eigenschaften (d3) und (d5) wurden in Proposition 2.3 nachgewiesen.

*Ganzzahligkeit (d1).* Falls  $y_0$  regulärer Wert ist, wenden wir Gleichung (2.7) an. Ganzzahligkeit und Lösungskriterium folgen.

Sei  $y_0$  ein kritischer Wert (also ein nicht regulärer Wert). Dann gibt es nach dem Lemma von Sard, Lemma 1.8, beliebig nahe an  $y_0$  einen regulären Wert  $y_1$ . Der Grad  $d(f, G, y_1)$  ist ganzzahlig. Da der Grad stetig von  $y$  abhängt (Proposition 2.3), ist auch  $d(f, G, y_0)$  ganzzahlig.

*Lösungskriterium (d2).* Zu  $y_0$  gibt es eine Folge regulärer Werte  $y_k \rightarrow y_0$ . Für alle  $k \geq k_0$  gilt

$$d(f, G, y_0) \neq 0 \Rightarrow d(f, G, y_k) \neq 0 \Rightarrow \exists x_k : f(x_k) = y_k.$$

Die Folge  $x_k$  von approximativen Lösungen hat (nach Auswahl einer Teilfolge) einen Limes  $x \in \bar{G}$  mit  $f(x) = y_0$ . Dabei verwenden wir die Kompaktheit von  $\bar{G}$  und die Stetigkeit von  $f$ .

*Homotopien (d4).* Für Homotopien gilt: Der Abbildungsgrad  $d(h(\cdot, t), G, y_0(t))$  ist ganzzahlig und nach Proposition 2.3 stetig. Daher ist der Grad konstant.  $\square$

## Darstellung als Randintegral

**Satz 2.6** (Randintegral). *Wir betrachten ein beschränktes Lipschitz-Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$ . Für  $f \in C^2(G, \mathbb{R}^n) \cap C^1(\bar{G}, \mathbb{R}^n)$  gilt*

$$d(f, G, y_0) = \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial G} \frac{\langle f - y_0, \mathcal{A}_f^T \cdot \nu \rangle}{|f - y_0|^n} d\mathcal{H}^{n-1}. \quad (2.8)$$

Dabei ist  $\nu$  die Normale an  $\partial G$  und  $\mathcal{A}_f := (A_{jk})_{jk}$  die Kofaktormatrix  $A_{jk} = (-1)^{j+k} \det(\partial_l f^m)_{l \neq k, m \neq j}$ .

*Beweis.* Wir verwenden zur Berechnung des Grades eine rotationssymmetrische Funktion  $\omega(y) = w(|y|)$ , also

$$d(f, G, y_0) = \int_G w(|f(x) - y_0|) \mathcal{J}_f(x) dx.$$

Unser Ziel ist es wie in Lemma 2.2, die rechte Seite als Divergenz zu schreiben. Als ersten Schritt schreiben wir  $\omega$  als Divergenz: Für  $r > 0$  setzen wir

$$\varphi(r) := r^{-n} \int_0^r w(t) t^{n-1} dt.$$

Für  $r > \varepsilon$  gilt  $\varphi(r) = r^{-n}/|S^{n-1}|$ . Wir setzen

$$\Phi(y) := \varphi(|y|) y,$$

und stellen fest, dass  $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  gilt. Dann gilt mit  $r = |y|$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \Phi(y) &= \sum_k \partial_k \Phi_k(y) = \varphi(|y|) n + \partial_r \varphi(|y|) r \\ &= \varphi(|y|) n - n \frac{1}{r} \varphi(|y|) r + \frac{1}{r^n} w(r) r^{n-1} r = w(r). \end{aligned}$$

Damit ist  $\operatorname{div} \Phi = \omega$  gezeigt.

Wie in Lemma 2.2 gilt nun

$$\omega(f(x) - y_0) \mathcal{J}_f(x) = \operatorname{div} \left[ \sum_k \Phi_k(f(x) - y_0) A_{jk}(x) \right]_j.$$

Mit der Anwendung des Gaußschen Satzes finden wir

$$\begin{aligned}
 d(f, G, y_0) &= \int_G w(|f(x) - y_0|) \mathcal{J}_f(x) \, dx \\
 &= \int_G \operatorname{div} \left[ \sum_k \Phi_k(f(x) - y_0) \cdot A_{jk}(x) \right]_j \, dx \\
 &= \int_{\partial G} \nu \cdot \left[ \sum_k \Phi_k(f(x) - y_0) \cdot A_{jk}(x) \right]_j \, d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\
 &= \frac{1}{|S^{n-1}|} \int_{\partial G} \sum_j \nu_j(x) \cdot \sum_k \frac{(f(x) - y_0)_k}{|f(x) - y_0|^n} \cdot A_{jk}(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}(x),
 \end{aligned}$$

und damit die behauptete Formel. □

Mit obiger Formel läßt sich der Abbildungsgrad aus den Werten von  $f$  und  $Df$  auf dem Rand berechnen.

**Bemerkung:** Auch ohne die Randintegral-Formel lässt sich leicht zeigen: Der Abbildungsgrad hängt nur von den Werten von  $f$  am Rand ab. Beweis: Sei  $g : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $g = f$  auf  $\partial G$ . Dann ist  $h(x, t) := tf(x) + (1-t)g(x)$  eine zulässige Homotopie (ohne  $y_0$ -Stellen auf dem Rand), also gilt  $d(g, G, y_0) = d(f, G, y_0)$ .

## 2.3. Der Grad für $C^0$ -Abbildungen

**Satz 2.7** (Satz von Rouché). *Der Abbildungsgrad aus Definition 2.1 hat die folgende Eigenschaft: Seien  $f, g \in C^0(\bar{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(G, \mathbb{R}^n)$  und  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ . Falls*

$$|f(x) - g(x)| < |f(x) - y_0| \quad \forall x \in \partial G,$$

so gilt

$$d(f, G, y_0) = d(g, G, y_0).$$

*Beweis.* Die Homotopie

$$h(x, t) := (1-t) \cdot f(x) + t \cdot g(x)$$

ist  $C^2$  und zulässig, da für alle  $x \in \partial G$

$$|h(x, t) - y_0| \geq |f(x) - y_0| - t \cdot |f(x) - g(x)| > 0.$$

Wir können daher die Homotopieeigenschaft (d4) anwenden (diese ist bereits gezeigt für glatte  $h$ , siehe Proposition 2.3). □

Der Satz von Rouché macht die nachfolgende Definition möglich (die Definition ist unabhängig von der Wahl von  $g$ ).

**Definition 2.8** (Abbildungsgrad für  $C^0$ -Funktionen). Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, offen,  $f \in C^0(\bar{G}, \mathbb{R}^n)$  und  $y_0 \notin f(\partial G)$ . Dann wählen wir eine Approximation  $g \in C^0(\bar{G}, \mathbb{R}^n) \cap C^2(G, \mathbb{R}^n)$  von  $f$  mit  $|f(x) - g(x)| < \frac{1}{4}|f(x) - y_0|$  für alle  $x \in \partial G$  und definieren

$$d(f, G, y_0) := d(g, G, y_0).$$

Für die Wohldefiniertheit des Grades: Seien  $g_1$  und  $g_2$  wie in der Definition. Wegen

$$\begin{aligned} |f(x) - y_0| &\leq |f(x) - g_1(x)| + |g_1(x) - y_0| \\ &\leq \frac{1}{4}|f(x) - y_0| + |g_1(x) - y_0| \end{aligned}$$

gilt dann  $|f(x) - y_0| \leq \frac{4}{3}|g_1(x) - y_0|$ . Es folgt

$$\begin{aligned} |g_1(x) - g_2(x)| &\leq |g_1(x) - f(x)| + |f(x) - g_2(x)| \\ &\leq \frac{1}{2}|f(x) - y_0| < |g_1(x) - y_0|. \end{aligned}$$

**Satz 2.9.** Definition 2.8 liefert eine Funktion  $d$ , die die Axiome (d1)–(d5) erfüllt.

*Beweis.* Eigenschaften (d1), (d3) und (d5) folgen unmittelbar aus der Definition. Zu (d4): Approximiere eine (nur) stetige Homotopie  $h$  durch eine  $C^2$  Abbildungen  $h_1$ . Es gilt  $d(h(\cdot, t), G, y_0(t)) = d(h_1(\cdot, t), G, y_0(t))$ , die Funktion ist daher unabhängig von  $t$ . Zu (d2): Falls  $d(f, G, y_0) \neq 0$ , so haben beliebige Approximationen  $f_n$  von  $f$  Lösungen  $f_n(x_n) = y_0$ . Jeder Limes  $x$  von (Teilfolgen von)  $x_n$  ist eine Lösung zu  $f(x) = y_0$ .  $\square$

# 3. Anwendungen des Abbildungsgrades

## 3.1. Wichtiges Hilfsmittel: Fortsetzungssätze

### Elementare Fortsetzungen

Schon im  $\mathbb{R}^2$  kann man sich überlegen: Es gibt Mengen  $A \subset \mathbb{R}^2$  und stetige Abbildungen  $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , welche keine stetige Fortsetzung auf  $\mathbb{R}^2$  besitzen. Es genügt hierfür, die Menge  $A = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})$  zu betrachten und  $g(x) = \operatorname{sgn}(x_2)$ . Der nachfolgende Satz zeigt, dass sich keine Gegenbeispiele finden lassen, bei denen  $A$  abgeschlossen ist.

**Satz 3.1** (Fortsetzungssatz von Tietze). *Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subset X$  abgeschlossen,  $Y$  ein Banachraum,  $g : A \rightarrow Y$  stetig. Dann existiert eine stetige Fortsetzung von  $g$  in die konvexe Hülle des Bildes, also ein*

$$\bar{g} : X \rightarrow \operatorname{conv}(g(A)) \text{ stetig, } \bar{g}|_A = g.$$

Bemerkung: Falls  $g$  kompakt ist, so kann auch  $\bar{g}$  kompakt konstruiert werden.

*Beweis.* Zu jedem  $x \in X \setminus A$  wähle  $\delta(x) := \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x, A) > 0$ . Dann ist die Familie  $B_{\delta(x)}(x)$  mit Indexmenge  $x \in X \setminus A$  eine Überdeckung von  $X \setminus A$ .

Aus der Überdeckung  $(B_{\delta(x)}(x))_{x \in X \setminus A}$  können wir nach dem Satz von Stone eine lokal endliche Überdeckung  $(B_j)_j$  auswählen, also eine Überdeckung, bei der jeder Punkt  $x \in X \setminus A$  eine Umgebung hat, die nur von endlich vielen  $B_j$  getroffen wird. Wir werden den Fortsetzungssatz nur im  $\mathbb{R}^n$  anwenden, dort kann man (für beschränktes  $A$ ) die lokal endliche Überdeckung einfach erhalten: man wählt für jede der kompakten Mengen  $K_m := \{x \in X \mid 2^{-m-1} \leq \operatorname{dist}(x, A) \leq 2^{-m+1}\}$  eine endliche Überdeckung aus.

Zur lokal endlichen Überdeckung  $(B_j)_j$  konstruieren wir eine stetige Zerlegung der 1 durch

$$\varphi_j(x) := \frac{\operatorname{dist}(x, X \setminus B_j)}{\sum_k \operatorname{dist}(x, X \setminus B_k)}.$$

Zu jedem  $B_j$  gibt es  $a_j \in A$  mit  $\operatorname{dist}(a_j, x_j) < 2 \operatorname{dist}(A, x_j)$ . Wir setzen

$$\bar{g}(x) := \begin{cases} g(x) & x \in A, \\ \sum_j \varphi_j(x) g(a_j) & x \notin A. \end{cases}$$

Mit diesen Definitionen gilt  $\bar{g} = g$  auf  $A$ , die Eigenschaft  $\bar{g} : X \rightarrow \operatorname{conv}(g(A))$ , ebenso die Stetigkeit von  $\bar{g}$  auf  $X \setminus \partial A$ .

Wir müssen noch für einen beliebigen Punkt  $x^* \in \partial A$  die Stetigkeit von  $\bar{g}$  in  $x^*$  nachweisen. Dazu stellen wir zunächst fest, dass für  $x \notin A$

$$\|\bar{g}(x) - \bar{g}(x^*)\| \leq \sup\{\|g(a_j) - g(x^*)\| : j \text{ mit } x \in B_j\}.$$

Wegen der Stetigkeit von  $g$  im Punkt  $x^*$  ist daher nur folgende Behauptung zu zeigen:

Beh.: Falls  $x$  nah an  $x^*$  ist, so ist für jedes  $j$  mit  $x \in B_j$  der Punkt  $a_j$  nah an  $x^*$ .

Wenn die Behauptung gezeigt ist, kann man eine Folge  $x = x^\ell$  mit  $x^\ell \rightarrow x^*$  betrachten und dazu das  $a_j = a_j^\ell$ , für das  $\|g(a_j^\ell) - g(x^*)\|$  maximal ist. Wenn  $a_j^\ell \rightarrow x^*$  gilt, so auch  $\|\bar{g}(x^\ell) - \bar{g}(x^*)\| \leq \|g(a_j^\ell) - g(x^*)\| \rightarrow 0$ .

Um die Behauptung zu zeigen nehmen wir für  $x \in X \setminus A$  und  $\varepsilon > 0$  die Kleinheit  $\text{dist}(x^*, x) \leq \varepsilon$  an. Dann gilt trivialerweise  $\text{dist}(A, B_j) \leq \varepsilon$  und  $\text{dist}(A, x_j) \leq \text{dist}(A, B_j) + \delta(x_j) \leq \varepsilon + \delta(x_j)$ . Für  $\delta(x_j)$  gilt daher

$$\delta(x_j) = \frac{1}{2} \text{dist}(x_j, A) \leq \frac{1}{2} (\varepsilon + \delta(x_j)) ,$$

also

$$\delta(x_j) \leq \varepsilon .$$

Die Dreiecksungleichung erlaubt wegen  $\text{dist}(x, x_j) < \delta(x_j)$  die Rechnung

$$\begin{aligned} \text{dist}(x^*, a_j) &\leq \text{dist}(x^*, x) + \text{dist}(x, a_j) < \varepsilon + \delta(x_j) + \text{dist}(x_j, a_j) \\ &\leq 2\varepsilon + \text{dist}(x_j, a_j) \leq 2\varepsilon + 2\text{dist}(A, x_j) \\ &= 2\varepsilon + 4\delta(x_j) \leq 6\varepsilon . \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt: Für jedes  $\varepsilon > 0$  impliziert die Ungleichung  $|x - x^*| \leq \varepsilon$  die Ungleichung  $|a_j - x^*| \leq 6\varepsilon$  für alle relevanten  $j$  (alle  $j$ , so dass  $x \in B_j$ ).

Nach dem obigen Argument ist damit die Stetigkeit von  $\bar{g}$  gezeigt.  $\square$

## Fortsetzungen ohne Nullstellen

Das nächste Lemma sagt aus, dass im  $\mathbb{R}^m$ ,  $m > n$ , viel Platz für Fortsetzungen ist.

**Lemma 3.2.** *Sei  $W \subset \mathbb{R}^n$  ein Würfel,  $K \subset W$  kompakt und  $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  stetig mit  $m > n$ . Dann kann  $\psi$  stetig fortgesetzt werden zu*

$$\bar{\psi} : W \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

*Beweis. Schritt 1: Eine glatte Funktion, die approximativ eine Fortsetzung ist.* Wir setzen

$$c_0 := \min\{|\psi(y)| : y \in K\} > 0.$$

Sei  $\psi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine Fortsetzung von  $\psi$  nach Tietze, Lemma 3.1. Es ist nicht klar, ob  $\psi_1$  nullstellenfrei ist, daher sind wir hier noch nicht fertig.

Wir setzen  $\varepsilon := c_0/6$ . Wir approximieren  $\psi_1$  mit einer Funktion  $\psi_2 \in C^\infty$  mit der Qualität  $|\psi_2 - \psi| < \varepsilon$  auf  $K$ . Wegen der Glattheit ist das Bild von  $\psi_2$  eine Nullmenge im  $\mathbb{R}^m$ . Wir finden daher  $y_0 \in \mathbb{R}^m$  mit  $|y_0| < \varepsilon$ , so dass  $\psi_2$  den Punkt  $y_0$  nicht trifft.

Indem wir gegebenenfalls anstelle von  $\psi_2$  die Funktion  $\psi_2 - y_0$  betrachten, können wir annehmen, dass  $\psi_2$  die Null nicht trifft. Es gilt noch  $|\psi_2 - \psi| < 2\varepsilon$  auf  $K$ .

*Schritt 2: Eine approximative Fortsetzung mit Abstand von der Null.* Wir modifizieren  $\psi_2$  zu einer Funktion  $\psi_3$ , die von der Null weit weg bleibt. Wir wollen erreichen, dass  $\psi_3 = \psi_2$  auf  $K$  gilt und

$$|\psi_3(x)| \geq \varepsilon$$

für alle  $x \in W$ . Wir benutzen folgende Konstruktion. Wir definieren  $\eta : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$\eta(t) := \begin{cases} t/(3\varepsilon) & t \leq 3\varepsilon \\ 1 & t > 3\varepsilon \end{cases}$$

und setzen

$$\psi_3(x) := \frac{\psi_2(x)}{\eta(|\psi_2(x)|)}.$$

Diese Funktion erfüllt  $|\psi_3(x)| \geq 3\varepsilon$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$ . Wir stellen weiter fest, dass für  $x \in K$  die Abschätzung  $|\psi_2(x)| \geq c_0 - 2\varepsilon = 4\varepsilon$  gilt. Insbesondere gilt  $\eta(|\psi_2(x)|) = 1$  für  $x \in K$  und daher  $\psi_3 = \psi_2$  auf  $K$ .

*Schritt 3: Die gewünschte Fortsetzung.* Auf  $K$  gilt  $|\psi_3 - \psi| = |\psi_2 - \psi| \leq 2\varepsilon$ . Wir können daher  $\psi_3 - \psi$  wie in Satz 3.1 zu einer Funktion  $\varphi$  auf  $W$  fortsetzen, auch die Fortsetzung  $\varphi$  bildet in die kleine Kugel  $\bar{B}_{2\varepsilon}(0)$  ab. Die Funktion  $\bar{\psi} := \psi_3 - \varphi$  liefert die gewünschte Fortsetzung von  $\psi$ . Tatsächlich gilt für jeden Punkt  $x \in W$ :

$$\bar{\psi}(x) = 0 \Rightarrow \psi_3(x) = \varphi(x) \in \bar{B}_{2\varepsilon}(0)$$

Dies ist im Widerspruch zu  $|\psi_3(x)| \geq 3\varepsilon$ , es gibt also keine Nullstelle von  $\bar{\psi}$ .  $\square$

## Ungerade Fortsetzungen ohne Nullstellen

Ein Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  heißt *symmetrisch* falls  $G = -G$ . Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *ungerade*, falls  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in G$ .

Wir wollen die Fortsetzungssätze abschließen mit einem Satz über ungerade Fortsetzungen ohne Nullstellen. Das nachfolgende Lemma überträgt Lemma 3.2 in die Situation, dass die Fortsetzung ungerade sein soll.

**Lemma 3.3.** *Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt, offen und symmetrisch mit  $0 \notin \bar{D}$ . Sei  $\psi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$  stetig und ungerade, die Raumdimension des Zielraumes sei  $m > n$ . Dann kann  $\psi$  stetig fortgesetzt werden zu einer ungeraden Funktion*

$$\bar{\psi} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

*Beweis.* Wir führen eine Induktion über  $n$ . Für  $n = 1$  kann der Beweis elementar geführt werden. Rechts der Null, also auf  $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ , setzen wir  $\psi$  ohne Nullstelle fort (Lemma 3.2). Anschließend spiegeln wir diese Fortsetzung nach links.

*Induktionsschritt.* Das Lemma sei für die Dimension  $n - 1$  bereits bewiesen, wir wollen das Lemma für die Dimension  $n$  zeigen.

Wir betrachten zunächst den  $(n - 1)$ -dimensionalen Schnitt  $D_0 := D \cap \{x | x_n = 0\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Durch Einschränkung liefert uns die Funktion  $\psi$  auch eine stetige Funktion  $\psi : \partial D_0 \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ . Nach Induktionsvoraussetzung können wir diese Abbildung fortsetzen zu einer ungeraden Funktion

$$\psi_0 : \bar{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Wir betrachten nun die “obere Hälfte” der Menge  $D$ , also  $D_+ := D \cap \{x | x_n > 0\}$ . Der Rand dieser Menge besteht aus zwei Teilen, zum einen  $\partial D_+ \cap \{x | x_n > 0\}$ , zum anderen  $\partial D_+ \cap \{x_n = 0\} = D_0$ . Auf dem ersten Teil sind Randwerte durch  $\psi$  gegeben, auf dem zweiten Teil durch  $\psi_0$ . Diese Randwerte setzen wir mit Lemma 3.2 ohne Nullstellen fort zu einer Funktion

$$\tilde{\psi} : \bar{D}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Durch Spiegelung von  $\tilde{\psi}$  erhalten wir eine ungerade stetige Funktion auf ganz  $\bar{D}$ ,

$$\bar{\psi}(x) := \begin{cases} \tilde{\psi}(x) & \text{falls } x_n \geq 0, \\ -\tilde{\psi}(-x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist die Fortsetzung  $\bar{\psi}$  konstruiert. □

## 3.2. Der Satz vom Igel, Satz von Borsuk

Der Satz vom Igel lautet:

“Einen Igel kann man nicht stetig kämmen.”

Als mathematische Aussage: Wir betrachten Abbildung  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , so dass in jedem Punkt  $x$  der Vektor  $f(x)$  tangential an  $S^2$  ist (also:  $x \cdot f(x) = 0 \forall x \in S^2$ ). Dann gilt:  $f$  ist nicht stetig oder  $f$  hat eine Nullstelle.

**Satz 3.4** (Satz vom Igel). *Die Dimension  $n$  sei ungerade und das offene, beschränkte Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^n$  enthalte die 0. Die Abbildung  $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  sei stetig. Dann gibt es einen Punkt  $x \in \partial G$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit*

$$f(x) = \lambda x.$$

*Beweis.* Sei  $\bar{f} : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Fortsetzung der Randwerte. Diese Fortsetzung hat einen Abbildungsgrad  $d(\bar{f}, G, 0) \in \mathbb{Z}$ .

1. Fall:  $d(\bar{f}, G, 0) \neq 1$ . Wir betrachten eine Homotopie von  $\bar{f}$  zur Identität,

$$h(x, t) := (1 - t) \cdot \bar{f}(x) + t \cdot x.$$

Die Homotopie kann nicht zulässig sein, denn die Abbildungsgrade von  $\bar{f}$  und  $\text{id}$  sind unterschiedlich. Es gibt also  $x \in \partial G$  mit

$$0 = h(x, t) = (1 - t) \cdot \bar{f}(x) + t \cdot x.$$

Wir bemerken, dass diese Relation nicht für  $t = 1$  gilt. Damit ist die Behauptung mit  $\lambda = -t(1-t)^{-1}$  bewiesen.

2. *Fall:*  $d(\bar{f}, G, 0) = 1$ . In diesem Fall nutzen wir aus, dass die Dimension  $n$  ungerade ist: In ungerader Raumdimension gilt  $d(-\text{id}, G, 0) = -1$ . Wir betrachten daher die Homotopie zu  $-\text{id}$ , also  $h(x, t) := (1-t) \cdot \bar{f}(x) - t \cdot x$ . Wieder kann diese Homotopie nicht zulässig sein und wir schließen, dass für ein  $x \in \partial G$  und ein  $t$  gelten muss, dass

$$0 = h(x, t) = (1-t) \cdot \bar{f}(x) - t \cdot x.$$

Dies impliziert die Behauptung mit  $\lambda = t(1-t)^{-1}$ . □

Mit Hilfe des Abbildungsgrades werden wir weitere interessante Aussagen über Funktionen im  $\mathbb{R}^n$  beweisen. Ein hilfreicher Zwischenschritt ist der nun folgende Satz von Borsuk. Dieser Satz ist leicht zu glauben: Ungerade Funktionen haben einen ungeraden Abbildungsgrad. Im Wesentlichen lautet die Begründung: Der Abbildungsgrad zählt die Nullstellen, jede Nullstelle  $x$  zählt so viel (bis auf Vorzeichen), wie die gespiegelte Nullstelle  $-x$ . Die Nullstelle  $x = 0$  allerdings liefert einen ungeraden Beitrag. Daher ist der Grad ungerade.

Für alternative Beweise verweisen wir auf Gromes [6] oder [4].

**Satz 3.5** (Satz von Borsuk). *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  symmetrisch mit  $0 \in G$ . Die Abbildung  $f : \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig, ungerade und  $0 \notin f(\partial G)$ . Dann ist  $d(f, G, 0)$  ungerade.*

*Beweis.* 1. *Ausschneiden der 0 und Fortsetzung.* Wir wählen  $\varepsilon > 0$  klein, so dass  $\bar{B}_\varepsilon(0) \subset G$ . Sei  $\bar{f}$  eine Fortsetzung von folgenden Werten: (a)  $\bar{f} = f$  auf  $\partial G$ . (b)  $\bar{f} = \text{id}$  auf  $\bar{B}_\varepsilon(0)$ . Diese Fortsetzung ist im Allgemeinen nicht ungerade. Dennoch können wir für den Abbildungsgrad etwas aussagen, denn der Grad  $d$  hängt nur von den Randwerten ab. Unter Ausnutzung von (d5) und (d3) finden wir für  $G_\varepsilon := G \setminus \bar{B}_\varepsilon(0)$

$$\begin{aligned} d(f, G, 0) &= d(\bar{f}, G, 0) \\ &= d(\bar{f}, B_\varepsilon(0), 0) + d(\bar{f}, G_\varepsilon, 0) \\ &= 1 + d(\bar{f}, G_\varepsilon, 0). \end{aligned}$$

Es bleibt nun zu zeigen, dass der Grad auf der rechten Seite gerade ist.

2.  $d(\bar{f}, G_\varepsilon, 0) \in 2\mathbb{Z}$  für ungerade Randwerte auf  $G_\varepsilon$ . Wir schließen allein aus der Tatsache, dass die Randwerte von  $\bar{f}$  auf  $\partial G_\varepsilon$  ungerade sind. Die Abbildung

$$\bar{f} : \partial G_\varepsilon \cap \{x_n = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

wird mit Lemma 3.3 ungerade fortgesetzt zu

$$\psi : \bar{G}_\varepsilon \cap \{x_n = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Damit haben wir ungerade Randwerte definiert, die wir mit dem Fortsetzungssatz von Tietze, Lemma 3.1, zu einer Funktion  $F$  auf das Gebiet  $G_+^\varepsilon := G_\varepsilon \cap \{x_n > 0\}$  fortsetzen. Dabei fordern wir: (a)  $F = \text{id}$  auf  $\partial B_\varepsilon(0)$ . (b)  $F = \psi$  auf  $\bar{G}_\varepsilon \cap \{x_n = 0\}$ . (c)  $F = \bar{f}$  auf  $\partial G \cap \{x_n > 0\}$ . Durch Spiegelung können wir  $F$  zu einer ungeraden

Funktion fortsetzen. Da die Randwerte mit  $f$  übereinstimmen und auf der Fläche  $\{x_n = 0\}$  nirgends verschwinden, können wir rechnen

$$d(\bar{f}, G_\varepsilon, 0) = d(F, G_\varepsilon, 0) = d(F, G_+^\varepsilon, 0) + d(F, -G_+^\varepsilon, 0).$$

Wir behaupten, dass die rechte Seite gerade ist. Für glatte Funktionen mit nur regulären Nullstellen rechnet man für eine Nullstelle  $x_0 \in G_+^\varepsilon$  mit der Symmetrie von  $F$  wie folgt:

$$\partial_{y_j}[F(-x_0 + y)]|_{y=0} = \partial_{y_j}[-F(x_0 - y)]|_{y=0} = \partial_{y_j}[F(x_0 + y)]|_{y=0}.$$

Jede Nullstelle  $x_0 \in G_+^\varepsilon$  trägt also dieselbe Zahl zum Grad bei, wie die Nullstelle  $-x_0 \in G_-^\varepsilon$ . Es gilt also  $d(F, G_+^\varepsilon, 0) = d(F, -G_+^\varepsilon, 0)$ . Für allgemeine Funktionen kann man entweder mit einer Approximation argumentieren oder die Integralformel betrachten. Wir haben damit nachgewiesen, dass der Grad von  $\bar{f}$  auf  $G_\varepsilon$  gerade ist.

Insgesamt haben wir nachgewiesen, dass der Grad von  $f$  auf  $G$  ungerade ist.  $\square$

## Anwendungen von Borsuk

Der nächste Satz ist der Satz vom Wetter: Es gibt auf der Erde immer zwei einander gegenüberliegende Punkte, an denen Temperatur und Luftdruck identisch sind.

**Satz 3.6** (Der Satz vom Wetter). *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch mit  $0 \in G$ . Die Bilddimension sei kleiner als die Urbilddimension,  $m < n$ . Die Abbildung  $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^m$  sei stetig. Dann existiert ein  $x \in \partial G$  mit  $f(x) = f(-x)$ .*

*Beweis.* Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass keine Antipodenpunkte mit identischen Werten von  $f$  auf  $\partial G$  existieren.

Wir setzen zunächst  $f$  stetig fort auf  $\bar{G}$ . Mit der Fortsetzung  $f$  definieren wir  $g(x) := f(x) - f(-x)$ ; die Funktion  $g$  ist ungerade, wir fassen sie als Abbildung nach  $\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$  auf. Da keine Antipodenpunkte mit identischen Werten existieren, hat  $g$  keine Nullstelle auf  $\partial G$ . Der Satz von Borsuk liefert, dass  $d(g, G, 0)$  ungerade ist, also insbesondere  $d(g, G, 0) \neq 0$ . Wegen der Homotopieeigenschaft gilt dann auch  $d(g, G, \delta e_n) \neq 0$  für eine hinreichend kleine Zahl  $\delta \neq 0$ . Das Lösungskriterium impliziert, dass eine Lösung  $x$  existiert mit  $g(x) = \delta e_n$ . Dies ist ein Widerspruch wegen  $\delta e_n \notin \mathbb{R}^m$ .  $\square$

Um den nachfolgenden Satz zu genießen, denke man bei  $A_1, A_2, A_3$  an die Teilmengen von  $\mathbb{R}^3$ , die von Brot, Käse und Schinken eingenommen werden.

**Corollar 3.7** (Der Satz vom Schinken-Käse-Sandwich). *Seien  $A_1, A_2, A_3$  drei meßbare Teilmengen des  $\mathbb{R}^3$  mit endlichem Volumen (Lebesgue-Maß). Dann gibt es eine Ebene, die alle drei Mengen in zwei gleiche Volumina teilt.*

*Beweis.* Wir wollen eine stetige Funktion auf der Sphäre konstruieren,  $V : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , so dass Antipodenpunkte mit identischen Werten die gesuchte Schnittebene liefern.

1. *Definition von Ebenen, die  $A_3$  halbieren.* Sei  $x \in S^2$  eine beliebige Richtung. Wir betrachten die Schar  $E(t; x)$  von Ebenen senkrecht zu  $x$ , die die Achse  $\mathbb{R}x$  im Punkt  $tx$  schneiden, also

$$E(t; x) := \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y \cdot x = t\} .$$

Beginnend mit  $t = -\infty$  finden wir einen ersten Punkt  $t_a(x)$  und einen letzten Punkt  $t_b(x)$ , an dem  $E(t; x)$  das Volumen von  $A_3$  halbiert. Wir setzen

$$t_0(x) := \frac{1}{2}(t_a(x) + t_b(x)) .$$

Aufgrund der Eigenschaften des Lebesgue-Maßes ist  $t_0$  stetig in  $x$ .

2. *Die Abbildung  $V$ .* Wir bezeichnen mit  $V_1(x) \in \mathbb{R}$  das Volumen der Teilmenge von  $A_1$ , die auf der einen Seite der Schnittebene  $E(t_0(x); x)$  liegt; ebenso für  $V_2$ . Genauer setzen wir

$$V_k(x) := |\{y \in A_k \mid y \cdot x < t_0(x)\}| , \quad k = 1, 2 .$$

Die Volumina  $V_1$  und  $V_2$  hängen stetig von  $x$  ab und definieren  $V : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Nach Satz 3.6 gibt es einen Punkt  $x_0 \in S^2$  mit  $V_1(x_0) = V_1(-x_0)$  und  $V_2(x_0) = V_2(-x_0)$ . Dieses  $x_0$  liefert die gesuchte Ebene.  $\square$

**Satz 3.8** (Satz der Gebietsinvarianz). *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal injektiv. Dann ist  $f$  eine offene Abbildung.*

*Beweis.* Wir betrachten einen beliebigen Punkt in  $G$ . Ohne Einschränkung sei dieser Punkt der Nullpunkt  $0 \in G$  und der Wert sei  $f(0) = 0$ . Wir müssen zeigen, dass für ein beliebiges  $r > 0$  gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad B_\varepsilon(0) \subset f(B_r(0)) . \tag{3.1}$$

Durch eventuelles Verkleinern von  $r$  können wir annehmen, dass  $f|_{\bar{B}_r(0)}$  injektiv ist. Wir betrachten auf dieser Kugel die Homotopie

$$h(x, t) := f\left(\frac{1}{1+t}x\right) - f\left(-\frac{t}{1+t}x\right)$$

für  $t \in [0, 1]$  und  $x \in \bar{B}_r(0)$ . Die Homotopie  $h$  ist stetig und homotopiert  $h(x, 0) = f(x)$  in die ungerade Funktion  $h(x, 1) = f(\frac{1}{2}x) - f(-\frac{1}{2}x)$ . Wir behaupten, dass die Homotopie zulässig ist. Tatsächlich impliziert  $h(x, t) = 0$  dass

$$f\left(\frac{1}{1+t}x\right) = f\left(-\frac{t}{1+t}x\right) ,$$

wegen der Injektivität von  $f$  also

$$\frac{1}{1+t}x = -\frac{t}{1+t}x ,$$

und damit  $x = 0$ . Dies ist kein Randpunkt. Wegen der Homotopieinvarianz und dem Satz von Borsuk gilt

$$d(f, G, 0) = d(h(\cdot, 1), G, 0) \neq 0.$$

Also ist die Gleichung  $f(x) = y$  für eine Umgebung  $B_\varepsilon(0)$  des Nullpunkts  $f(0) = 0$  lösbar; damit ist (3.1) gezeigt.  $\square$

Beim nachfolgenden Satz denke man an  $G = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$ , die zweidimensionale Sphäre  $\partial G = S^2$  und einen Atlas mit 3 Karten.

**Satz 3.9** (Ein Atlas mit 3 Karten). *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und symmetrisch mit  $0 \in G$ . Der Rand  $\partial G$  sei überdeckt mit  $n$  abgeschlossenen Mengen  $A_k$ , die Kartenanzahl entspricht also der Dimension des Grundraumes. Dann enthält eines der  $A_k$  ein Paar von Antipodenpunkten  $x$  und  $-x$ .*

*Beweis.* Für  $k \leq n$  betrachten wir die Abstandsfunktionen  $d_k : \partial G \rightarrow \mathbb{R}$

$$d_k(x) := \text{dist}(x, A_k),$$

und die vektorwertige Funktion  $f : \partial G \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$f(x) := (d_1(x), \dots, d_{n-1}(x)).$$

Nach Satz 3.6 (Satz vom Wetter) gibt es zu  $f$  einen Punkt  $x$  mit  $f(x) = f(-x)$ .

Der Punkt  $x$  mit dieser Antipodeneigenschaft liegt in einer der Karten; wir wählen den kleinsten geeigneten Index,  $k = \min\{j \mid x \in A_j\}$ . Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall:  $k < n$ . Wegen  $x \in A_k$  gilt  $d_k(x) = 0$  und damit auch  $f_k(x) = 0$ . Wegen  $f_k(x) = f_k(-x)$  gilt dann auch  $d_k(-x) = 0$ . Wir erhalten, dass die beiden Punkte  $x$  und  $-x$  in  $A_k$  liegen.

2. Fall:  $k = n$ . Da  $k$  der kleinste passende Index ist, gilt  $d_k(x) > 0$  für alle  $k < n$ . Wegen der Antipodeneigenschaft von  $x$  dann aber auch  $d_k(-x) > 0$  für alle  $k < n$ . Dann sind beide Punkte  $x$  und  $-x$  in der Menge  $A_n$ .  $\square$

### 3.3. Der Satz von Brouwer

**Satz 3.10** (Starker Satz von Brouwer). *Sei  $K \subset \mathbb{R}^n$  nichtleer, kompakt und konvex oder homöomorph zu einer solchen Menge. Die Abbildung  $f : K \rightarrow K$  sei stetig. Dann hat  $f$  einen Fixpunkt.*

*Beweis.* In Satz 1.6 haben wir dieses Resultat gezeigt für den Fall, dass  $K$  eine Kugel ist. Für konvexes  $K \subset B_R(0)$  können wir mit Satz 3.1 die Abbildung  $f$  stetig fortsetzen zu einer Abbildung

$$\bar{f} : B_R(0) \rightarrow K \subset B_R(0).$$

Satz 1.6 liefert einen Fixpunkt  $x \in B_R(0)$  für  $\bar{f}$ . Wegen  $x = \bar{f}(x) \in K$  ist  $x$  auch Fixpunkt für  $f$ .

Wenn  $K$  nur homöomorph zu einer kompakten konvexen Menge  $A$  ist, dann betrachten wir einen Homöomorphismus  $\Phi : A \rightarrow K$  und die stetige Abbildung  $\Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$  auf  $A$ . Der Fixpunkt  $x \in A$  dieser Abbildung liefert einen Fixpunkt  $\Phi(x) \in K$  von  $f$ .  $\square$

## Eine Anwendung auf gewöhnliche Differenzialgleichungen

Wir betrachten die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(t=0) = u_0, \quad (3.2)$$

wobei wir annehmen, dass  $f$  Lipschitz-stetig ist. Dann ist (3.2) für jedes  $u_0$  eindeutig lösbar und die Lösung  $u(t)$  hängt stetig von den Anfangswerten  $u_0$  ab. Es gibt also den stetigen Lösungsoperator  $T_t : u_0 \mapsto u(t)$ , die Abbildung  $T_t$  heißt auch die Zeit- $t$ -Abbildung.

Oft hat man invariante Mengen für den Fluss. Gilt zum Beispiel  $\langle x, f(t, x) \rangle < 0$  für alle  $x \in \partial B_R(0)$ , so können Lösungen  $u$  wegen

$$\frac{d}{dt} \|u\|^2 = 2 \langle u, u' \rangle = 2 \langle u, f \rangle < 0$$

auf  $\partial B_R(0)$  die Kugel  $B_R(0)$  nie verlassen.

**Satz 3.11** (Periodische Lösungen). *Sei  $f$  in der ersten Komponente periodisch mit Periode  $p > 0$ . Die Menge  $A$  sei invariant und homöomorph zur abgeschlossenen Einheitskugel  $\bar{B}_1$ . Dann gibt es eine  $p$ -periodische Lösung von  $u'(t) = f(t, u(t))$ .*

*Beweis.* Sei  $T_p : A \rightarrow X$  die Poincaré-Abbildung. Nach dem Satz von Brouwer hat  $T_p$  einen Fixpunkt. Dieser liefert die gesuchte periodische Lösung.  $\square$

**Satz 3.12** (Fixpunkte von Flüssen). *Sei  $A$  homöomorph zu  $\bar{B}_1$  und invariant unter dem Fluss von  $u' = f(u)$ . Dann hat der Fluss einen Fixpunkt  $u_0$ , es gibt also eine Lösung  $u_0 \in A$  von  $f(u_0) = 0$ .*

*Beweis.* Wähle eine Folge  $0 < \tau_k \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ , wir betrachten also eine Folge immer kürzerer Perioden. Nach Satz 3.11 gibt es für jedes  $k$  eine  $\tau_k$ -periodische Lösung mit Startwert  $x_k = T_{\tau_k} x_k$ . Da  $A$  kompakt ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge konvergiert:  $x_k \rightarrow x$  für  $k \rightarrow \infty$ .

Wir geben uns  $t > 0$  beliebig vor. Wir behaupten, dass  $T_t x = x$  gilt. Dazu schreiben wir  $t$  als  $t = \gamma_k \tau_k + r_k$  mit  $\gamma_k \in \mathbb{N}$  und  $0 \leq r_k < \tau_k$ . Wir rechnen mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|T_t x - x\| &\leq \|T_t x - T_t x_k\| + \|T_{\gamma_k \tau_k + r_k} x_k - x_k\| + \|x_k - x\| \\ &\leq o(1) + \|T_{r_k} x_k - x_k\| + o(1), \end{aligned}$$

wobei wir  $x_k \rightarrow x$ , die Stetigkeit von  $T_t$ , und die Eigenschaft von  $x_k$  ausgenutzt haben. Für den verbleibenden Term gilt wegen  $\|f\| \leq M$  auf der kompakten Menge  $A$ ,

$$\|T_{r_k} x_k - x_k\| = \left\| \int_0^{r_k} f(T_\xi x_k) d\xi \right\| \leq \int_0^{r_k} M \leq M \cdot r_k \rightarrow 0.$$

Dies liefert  $T_{r_k} x_k \rightarrow x$  und damit die Behauptung  $T_t x = x$ .  $\square$

## 4. Kompakte Operatoren

Wir betrachten die folgende Aussage.

Stetige Abbildungen von der abgeschlossenen Einheitskugel in sich haben einen Fixpunkt.

Diese Aussage ist im Endlichdimensionalen richtig und im Banachraum im allgemeinen falsch.

*Beweis.* a) Im Endlichdimensionalen ist die Aussage gerade der Satz von Brouwer. Der Satz von Brouwer kann mit Hilfe des Abbildungsgrades bewiesen werden.

b) Betrachte  $X := l^2 := \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} : \|x\|^2 := \sum_{i=0}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ . Sei  $K := \bar{B}_1 \subset X$  und  $f : K \rightarrow K$  definiert durch

$$f(x) := (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_0, x_1, \dots).$$

$f$  ist eine stetige Selbstabbildung der Kugel. Wir werden sehen, dass  $f$  keinen Fixpunkt hat. Annahme: Sei  $f(x) = x$ . Dann  $\|x\| = \|f(x)\| = 1$  nach Definition von  $f$ . Andererseits gilt dann  $x_0 = \sqrt{1 - \|x\|^2} = 0$ . Damit folgt  $x_1 = x_0 = 0$ ,  $x_2 = x_1 = 0$  usw. Ein Widerspruch.  $\square$

Das Beispiel zeigt, dass man im Banachraum eine zusätzliche Forderung an  $f$  stellen muss. Es hat sich gezeigt, dass eine geeignete Forderung die Kompaktheit ist.

Die folgende Bemerkung liefert ein anderes Beispiel für eine Eigenschaft, die im endlichdimensionalen Fall gilt, im unendlichdimensionalen aber nicht.

**Bemerkung 4.1.** Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig,  $A \subset X$  abgeschlossen und beschränkt. Dann gelten die beiden Aussagen:

- Falls  $X$  und  $Y$  endlichdimensional:  $f(A)$  ist abgeschlossen und beschränkt.
- Falls  $X$  unendlichdimensional:  $f(A)$  muss weder abgeschlossen noch beschränkt sein.

*Beweis.* Im endlichdimensionalen Fall gilt:  $A$  kompakt, also  $f(A)$  kompakt (offene Überdeckungen des Bildes liefern offene Überdeckungen des Urbildes), also  $f(A)$  ist abgeschlossen und beschränkt.

Im unendlichdimensionalen Fall können wir Punkte  $x_n \in \partial B_1(0) \subset X$  finden mit  $\|x_n - x_m\| \geq 1$  für alle  $n \neq m$ . Setze

$$\varphi(x) := \begin{cases} k \cdot (1 - 2\|x - x_k\|) & \text{für } x \in B_{1/2}(x_k), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Abbildung  $\varphi$  ist stetig aber unbeschränkt auf  $\bar{B}_2(0)$ .

Zur möglichen nicht-Abgeschlossenheit des Bildes: Wir ersetzen in der Definition von  $\varphi$  den Faktor  $k$  durch  $1 - 1/k$ . Dann ist das Bild  $\varphi(\bar{B}_2(0)) = [0, 1)$ .  $\square$

## 4.1. Definition, endlichdimensionale Approximationen

Wir schreiben für den Abschluss einer Menge  $M$  statt  $\overline{M}$  auch  $\text{cl}(M)$ . Im Folgenden sind  $X$  und  $Y$  immer Banachräume.

**Definition 4.2.** Sei  $A \subset X$ . Eine Abbildung  $f : A \rightarrow Y$  heißt kompakt, falls sie stetig ist und  $\text{cl}(f(B)) = \overline{f(B)}$  kompakt ist für alle beschränkten Teilmengen  $B \subset A$ .

*Bemerkungen:* Da  $Y$  vollständig ist, ist Präkompaktheit äquivalent zur Kompaktheit des Abschlusses: Für jede Menge  $M \subset Y$  gilt  $\overline{M}$  kompakt  $\iff M$  präkompakt, d.h. es gibt eine endliche Überdeckung mit  $\varepsilon$ -Kugeln für jedes  $\varepsilon > 0$ . In der Definition der Kompaktheit kann man daher äquivalent formulieren:  $f(B)$  präkompakt für alle beschränkten  $B \subset A$ .

In dem Fall, dass die Grundmenge  $A$  beschränkt ist, reicht es, die Bedingung nur für die Menge  $B = A$  zu fordern:  $f(A)$  ist präkompakt. Begründung: Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist ebenfalls kompakt.

**Lemma 4.3** (Kompaktheitskriterium mit Folgen). Seien  $X, Y$  Banachräume und  $A \subset X$ . Für stetige Abbildungen  $f : A \rightarrow Y$  sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist kompakt.
- (ii) Für jede beschränkte Folge  $(x_k)_k$  in  $A$  besitzt die Bildfolge  $(f(x_k))_k$  eine in  $Y$  konvergente Teilfolge.

*Beweis.* Implikation “(i) $\implies$ (ii)”. Sei  $f$  eine kompakte Abbildung und  $x_k$  eine beschränkte Folge in  $A$ . Dann ist die Menge  $B = \{x_k | k \in \mathbb{N}\}$  eine beschränkte Teilmenge von  $A$ . Nach Definition der Kompaktheit von  $f$  impliziert dies, dass der Abschluss  $\text{cl}(f(B))$  kompakt ist. Als Teilmenge eines Banachraumes ist der Abschluss auch folgenkompakt. Dies bedeutet, dass die Folge  $f(x_k)$  in dieser Menge eine in  $Y$  konvergente Teilfolge besitzt.

Implikation “(ii) $\implies$ (i)”. Die Abbildung  $f$  habe die Eigenschaft (ii). Wir betrachten eine beschränkte Menge  $B \subset A$  und wollen die Folgenkompaktheit von  $\text{cl}(f(B))$  zeigen. Dazu sei  $\bar{y}_k$  eine beliebige Folge in  $\text{cl}(f(B))$ , wir wollen zeigen, dass  $\bar{y}_k$  eine konvergente Teilfolge besitzt. Die Punkte  $\bar{y}_k$  müssen nicht Bilder von Punkten in  $B$  sein, aber nach Definition des Abschlusses finden wir Punkte  $y_k$  in der Menge  $f(B)$  mit  $\|y_k - \bar{y}_k\| \leq 1/k$ . Da die Punkte  $y_k$  in der Bildmenge  $f(B)$  sind, existiert auch eine Folge  $x_k \in B$  mit  $y_k = f(x_k)$ . Wegen Eigenschaft (ii) hat die Folge  $y_k$  eine konvergente Teilfolge. Der Grenzwert einer Teilfolge der  $y_k$  ist aber auch Grenzwert derselben Teilfolge von  $\bar{y}_k$ . Da die Folge  $\bar{y}_k$  beliebig war, ist damit die Folgenkompaktheit und also die Kompaktheit von  $\text{cl}(f(B))$  gezeigt.  $\square$

Der nachfolgende Satz charakterisiert kompakte Abbildungen in einer neuen Art. Kompakte Abbildungen haben die Eigenschaft, dass sie sich gleichmäßig durch endlichdimensionale Abbildungen approximieren lassen.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass Kompaktheit immer nur auf beschränkten Mengen überprüft werden muss: Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist kompakt, falls jede Einschränkung  $f|_A : A \rightarrow Y$  auf eine abgeschlossene beschränkte Menge  $A \subset X$  kompakt ist. Andererseits liefern endlichdimensionale Approximationen von, sagen wir,

$f|_{B_R(0)} : B_R(0) \rightarrow Y$ , keine endlichdimensionale Approximation von  $f$ . Tatsächlich kann im nachfolgenden Satz auf die Beschränktheit von  $A$  nicht verzichtet werden.

Wir erinnern daran, dass wir in der Definition der Kompaktheit auch die Stetigkeit gefordert haben.

**Satz 4.4** (Kompakte Abbildungen sind endlichdimensional approximierbar). *Seien  $X, Y$  Banachräume,  $A \subset X$  beschränkt. Dann sind für Abbildungen  $f : A \rightarrow Y$  äquivalent:*

- (i)  $f$  ist kompakt.
- (ii) Es gibt eine Folge von Abbildungen  $f_n : A \rightarrow Y$  stetig mit  $f_n \rightarrow f$  gleichmäßig für  $n \rightarrow \infty$ , so dass  $\text{span}(f_n(A))$  endlichdimensional ist und  $f_n(A)$  beschränkt.

In der Implikation (i)  $\Rightarrow$  (ii) können die Abbildungen sogar so konstruiert werden, dass sie in die konvexe Hülle der Bildpunkte abbilden,  $f_n : A \rightarrow \text{conv}(f(A))$ .

Die Implikation (ii)  $\Rightarrow$  (i) benötigt nicht die Beschränktheit des Urbildes.

*Beweis.* Implikation “(ii)  $\Rightarrow$  (i)”. Die Abbildung  $f$  ist als gleichmäßiger Limes stetiger Abbildungen stetig. Für die Kompaktheit betrachten wir eine beliebige beschränkte Folge  $(x_k)_k$  in  $A$ . Gemäß Lemma 4.3 müssen wir zeigen, dass die Folge  $f(x_k)$  eine Teilfolge  $f(x_{k_l})$  besitzt und einen Grenzwert  $y \in Y$ , so dass  $f(x_{k_l}) \rightarrow y \in Y$ .

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ist die Folge  $(f_n(x_k))_k$  eine beschränkte Folge im Endlichdimensionalen. Sie besitzt daher eine Teilfolge  $(k_l)_l$  und einen Grenzwert  $y_n$ , so dass  $f_n(x_k) \rightarrow y_n$  entlang der Teilfolge gilt. Durch sukzessive Wahl von Teilfolgen erhalten wir eine einzige Teilfolge  $(k_l)_l$ , so dass die Konvergenz  $f_n(x_k) \rightarrow y_n$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  vorliegt. Wir behaupten nun, dass die Folge der Grenzwerte  $(y_n)_n$  eine Cauchy-Folge bildet. Hierfür rechnen wir mit der Dreiecksungleichung

$$\|y_n - y_m\| \leq \|y_n - f_n(x_k)\| + \|f_n(x_k) - f_m(x_k)\| + \|f_m(x_k) - y_m\|.$$

Wir wählen zuerst  $m$  und  $n$  groß und erreichen damit, dass der zweite Summand klein ist, unabhängig von  $k$  wegen der gleichmäßigen Konvergenz der  $f_n$ . Anschließend wählen wir  $k = k(n, m)$  groß und erreichen die Kleinheit der anderen beiden Terme. Dies beweist, dass  $(y_n)_n$  eine Cauchy-Folge ist, wegen der Vollständigkeit von  $Y$  existiert ein Grenzwert  $y \in Y$ , so dass  $y_n \rightarrow y$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir behaupten nun für diesen Grenzwert die Konvergenz  $f(x_k) \rightarrow y$  entlang der Teilfolge  $(k_l)_l$ . Dies folgt wieder mit der Dreiecksungleichung,

$$\|f(x_k) - y\| \leq \|f(x_k) - f_n(x_k)\| + \|f_n(x_k) - y_n\| + \|y_n - y\|.$$

Der Ausdruck wird beliebig klein, falls wir zunächst  $n$  groß wählen (erster und dritter Term), und anschließend  $k = k(n)$  groß. Insbesondere gilt die Konvergenz  $f(x_k) \rightarrow y$  und die Kompaktheit von  $f$  ist gezeigt.

Implikation “(i)  $\Rightarrow$  (ii)”. Da  $f$  kompakt ist, ist  $\text{cl}(f(A))$  kompakt, also  $f(A)$  präkompakt. Wir finden daher für die Radien  $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$  endliche Überdeckungen

von  $f(A)$  mit  $\varepsilon/2$ -Kugeln: für eine Anzahl an Punkten  $p = p(n) \in \mathbb{N}$  und mit geeigneten Punkten  $y_j \in f(A)$  gilt

$$\text{cl}(f(A)) \subset \bigcup_{j=1}^p B_\varepsilon(y_j).$$

Zu dieser Überdeckung wählen wir eine zugehörige Teilung der 1: eine Familie  $(\psi_j)_{j=1,\dots,p}$  stetiger Funktionen  $\psi_j : Y \rightarrow [0, 1]$  mit  $\psi_j = 0$  außerhalb  $B_\varepsilon(y_j)$  und  $\sum_{j=1}^p \psi_j(y) = 1$  für alle  $y \in \text{cl}(f(A))$ . Mit der Teilung der 1 definieren wir

$$f_n(x) := \sum_{j=1}^p \psi_j(f(x))y_j.$$

Damit bildet  $f_n$  in die konvexe Hülle von  $f(A)$  ab. Wir behaupten, dass die Funktionen  $f_n$  alle gewünschten Eigenschaften haben. Tatsächlich ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f_n$  stetig, da  $f$  und  $\psi_j$  stetig sind. Weiterhin hat jedes  $f_n$  nach Konstruktion ein endlichdimensionales Bild. Für einen beliebigen Punkt  $x \in A$  gilt

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \left\| \sum_{j=1}^p \psi_j(f(x))[f(x) - y_j] \right\|.$$

In der Summe auf der rechten Seite gilt  $\psi_j(f(x)) \neq 0$  nur für solche Indizes  $j$ , für die  $f(x) \in B_\varepsilon(y_j)$  gilt. Für jeden nichttrivialen Summanden gilt daher  $\|f(x) - y_j\| < \varepsilon$ . In der Norm auf der rechten Seite steht daher eine Konvexkombination von Vektoren mit Norm kleiner als  $\varepsilon$ , wir erhalten daher

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon = \frac{1}{n}.$$

Da der Punkt  $x \in A$  beliebig war und die rechte Seite nicht von  $x$  abhängt, hat die Folge  $f_n$  die gleichmäßige Approximationseigenschaft.  $\square$

**Beispiel 4.5.** Sei  $X = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$  und  $T : X \rightarrow X$  die lineare Fortsetzung von  $e_k \mapsto \frac{1}{k}e_k$  für Basisvektoren  $e_k$ . Dann ist  $T$  kompakt.

*Beweis.* Die linearen Operatoren mit

$$T_n : X \rightarrow X, e_k \mapsto \begin{cases} T e_k & k \leq n, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

approximieren  $T$  gleichmäßig und sind jeweils endlichdimensional.

Die Kompaktheit von  $T$  folgt aus der Tatsache, dass sich  $T$  endlichdimensional approximieren lässt, siehe Satz 4.4 und den Zusatz, dass (ii)  $\Rightarrow$  (i) nicht die Beschränktheit des Urbildes benötigt.  $\square$

**Beispiel 4.6.** Für das Intervall  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  betrachten wir die Einbettung

$$j : C^\alpha(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}),$$

gegeben durch  $j(u) = u$  für alle  $u \in C^\alpha(I, \mathbb{R})$ . Diese Einbettung ist kompakt.

*Beweis.* Für  $n \in \mathbb{N}$  unterteilen wir  $I$  in  $n$  Intervalle  $I_k$  der Länge  $\Delta x := (b-a)/n$  mit Stützstellen  $x_k := a + \frac{k}{n}(b-a)$ . Zu einer Funktion  $u \in C^\alpha$  können wir die Punktwerte  $u_k \in \mathbb{R}$ ,  $k = 0, \dots, n-1$  bestimmen,  $u_k = u(x_k)$ . Zu den  $u_k$  wiederum betrachten wir die lineare Interpolation  $u^n$ , definiert durch

$$u^n(x) := \lambda u_k + (1 - \lambda)u_{k+1} \text{ für } x = \lambda x_k + (1 - \lambda)x_{k+1} \in I_k.$$

Die Abbildung  $\Pi_n : u \mapsto u^n$ ,  $C^\alpha \rightarrow C^0$  ist wohldefiniert, endlichdimensional, und stetig. Wir behaupten, dass  $\Pi_n \rightarrow j$  gleichmäßig. Dazu rechnen wir mit geeigneter Stützstelle  $x_k = x_k(x)$

$$\begin{aligned} \|j(u) - \Pi_n(u)\|_{C^0} &= \sup_x |u(x) - u^n(x)| \\ &\leq \sup_x (|u(x) - u(x_k)| + |u^n(x) - u^n(x_k)|) \\ &\leq \|u\|_{C^\alpha} \left( (\Delta x)^\alpha + (\Delta x) \frac{(\Delta x)^\alpha}{(\Delta x)} \right). \end{aligned}$$

Auf einer Kugel in  $C^\alpha$  konvergiert dieser Ausdruck gleichmäßig gegen 0 (die Kleinheit des Ausdruckes ist unabhängig von  $u$ ).  $\square$

**Lemma 4.7.** *Sei  $f : X \rightarrow Y$  von der Klasse  $C^1$  und kompakt in einer Kugel  $B_r(x_0)$ . Dann ist  $Df(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$  ebenfalls kompakt.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $x_0 = 0$  und  $f(x_0) = 0$ . Wir setzen  $A := Df(x_0)$  und betrachten eine Folge  $x_k \in B_1(0) \subset X$ . Wir wollen zeigen, dass für eine Teilfolge gilt  $Ax_k \rightarrow y$  für ein  $y \in Y$ .

Wegen der Differenzierbarkeit von  $f$  gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein  $\delta = \delta(n) > 0$  mit

$$\|f(x) - Ax\| \leq \frac{1}{n}\delta \quad \forall x \in B_\delta(0).$$

Für festes  $n$  können wir zu einer Teilfolge übergehen, so dass  $f(\delta(n)x_k) \rightarrow y_n$  für  $k \rightarrow \infty$  und ein  $y_n$  (Kompaktheit von  $f$ ). Dann gilt für  $k, l \rightarrow \infty$

$$0 \leftarrow \|f(\delta(n)x_k) - f(\delta(n)x_l)\| \geq \|\delta(n)A(x_k - x_l)\| - \frac{2}{n}\delta(n),$$

also  $\|A(x_k - x_l)\| \leq \frac{3}{n}$  für große  $k, l$ . Wir gehen nun successive für jedes  $n$  zu einer Teilfolge über und finden insgesamt eine Teilfolge, so dass  $Ax_k$  eine Cauchy-Folge ist, also einen Limes besitzt.  $\square$

## 4.2. Der Fixpunktsatz von Schauder

**Lemma 4.8** (Präkompaktheit der konvexen Hülle). *Sei  $X$  ein normierter Vektorraum und  $F \subset X$  präkompakt. Dann ist auch die konvexe Hülle von  $F$  präkompakt.*

*Beweis.* Wir wollen die Präkompaktheit von  $G := \text{conv}(F)$  und zeigen. Wir geben uns eine Zahl  $\varepsilon > 0$  vor; unser Ziel ist die Konstruktion einer endlichen Teilmenge (Punktmenge)  $\tilde{G} \subset G$ , so dass

$$G \subset \bigcup_{g \in \tilde{G}} B_\varepsilon(g) = B_\varepsilon(\tilde{G}). \quad (4.1)$$

Die Menge  $F$  ist präkompakt, wir finden daher eine endliche Teilmenge  $\tilde{F} \subset F$ , so dass  $F \subset B_{\varepsilon/2}(\tilde{F})$ . Als abgeschlossene, beschränkte und endlichdimensionale Menge ist die konvexe Hülle  $\text{conv}(\tilde{F})$  von  $\tilde{F}$  kompakt. Wir finden daher eine endliche Teilmenge  $\tilde{G} \subset \text{conv}(\tilde{F})$  mit  $\text{conv}(\tilde{F}) \subset B_{\varepsilon/2}(\tilde{G})$ . Wir behaupten, dass damit eine endliche Überdeckung wie in (4.1) gefunden ist.

Sei dazu  $x \in G$  ein beliebiger Vektor. Nach Definition von  $G = \text{conv}(F)$  existieren endlich viele Koeffizienten  $\tau_j \in [0, 1]$  mit Summe 1, so dass  $x = \sum_j \tau_j f_j$  mit Vektoren  $f_j \in F$ . Nach Wahl von  $\tilde{F}$  lassen sich die Vektoren  $f_j \in F$  bis auf einen Fehler  $\varepsilon/2$  durch Elemente  $\tilde{f}_j \in \tilde{F}$  approximieren. Die Konvexkombination  $\tilde{x} := \sum_j \tau_j \tilde{f}_j$  erfüllt nach Konstruktion  $\tilde{x} \in \text{conv}(\tilde{F})$  und es gilt  $\|x - \tilde{x}\| < \varepsilon/2$ . Nach Wahl der Menge  $\tilde{G}$  gilt  $\text{conv}(\tilde{F}) \subset B_{\varepsilon/2}(\tilde{G})$ , wir finden also ein Element  $\hat{x} \in \tilde{G}$  mit  $\|\tilde{x} - \hat{x}\| < \varepsilon/2$ , also auch  $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$ . Dies zeigt (4.1) und damit die Präkompaktheit von  $G$ .  $\square$

**Satz 4.9** (Schauder'scher Fixpunktsatz). *Sei  $X$  ein Banachraum,  $\emptyset \neq K \subset X$  abgeschlossen, konvex und beschränkt. Dann hat jede stetige kompakte Abbildung  $f : K \rightarrow K$  einen Fixpunkt.*

Wir beweisen hier den Schauder'schen Fixpunktsatz mit Hilfe des Brouwer'schen Fixpunktsatzes 3.10. Nach der Konstruktion des Abbildungsgrades im Unendlichdimensionalen kann der Beweis auch mit dem Abbildungsgrad geführt werden, er ist dann identisch zum Beweis von Brouwer.

*Beweis. Schritt 1: Konstruktion von Fixpunkten der Approximationen.* Wir approximieren die Abbildung  $f$  mit endlichdimensionalen Abbildungen  $f_n : K \rightarrow X$  wie in Satz 4.4, wobei die Bildmengen in der konvexen Hülle von  $f(K)$  liegen sollen. Da  $K$  konvex ist und  $f(K) \subset K$  gilt, sind die Abbildungen wieder Selbstabbildungen,  $f_n : K \rightarrow K$ . Das Bild  $f_n(K)$  ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$  in einem endlichdimensionalen Teilraum  $E_n \subset X$  enthalten. Wir betrachten die Einschränkungen der Abbildungen auf diese Teilräume,  $f_n|_{K \cap E_n} : K \cap E_n \rightarrow K \cap E_n$ . Diese Abbildungen besitzen Fixpunkte nach dem Fixpunktsatz von Brouwer 3.10. Damit ist eine Folge  $(x_n)_n$  von Punkten  $x_n \in K$  gefunden mit  $f_n(x_n) = x_n$ .

*Schritt 2: Konstruktion des Fixpunktes von  $f$ .* Wir wollen nun die Kompaktheit von  $f$  nutzen, um eine konvergente Teilfolge von  $x_n$  zu finden. Dazu müssen wir ausnutzen, dass alle Abbildungen  $f_n$  in die konvexe Menge  $\text{conv}(f(K))$  abbilden. Wir setzen  $F = \text{cl}(f(K))$ . Die Menge  $F$  ist kompakt, da  $f$  kompakt ist und  $K$  beschränkt. Nach Lemma 4.8 ist dann die konvexe Hülle  $G := \text{conv}(F)$  präkompakt. Die Folge  $x_n = f_n(x_n)$  ist eine Folge in  $G$  und besitzt daher eine konvergente Teilfolge und einen Grenzpunkt  $x \in \tilde{G} \subset K$ , also  $x_n \rightarrow x \in K$  entlang der Teilfolge. Wegen

$x_n \rightarrow x$ , der Stetigkeit von  $f$  und der Approximationseigenschaft der  $f_n$  gilt für  $n \rightarrow \infty$

$$\|x - f(x)\| \leftarrow \|x_n - f(x_n)\| = \|f_n(x_n) - f(x_n)\| \leq \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0.$$

Damit ist die Fixpunkteigenschaft  $x = f(x)$  für den Grenzpunkt  $x$  gezeigt.  $\square$

### 4.3. Beispiel: Einbettungen

**Satz 4.10** (Arzela-Ascoli). Sei  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $A \subset C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ . Falls  $A$  eine gleichgradig stetige Familie von Funktionen ist, d.h. für  $C > 0$  gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_{C^0} &\leq C \quad \forall f \in A, \\ \sup_{f \in A} |f(x) - f(y)| &\rightarrow 0 \text{ für } |x - y| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

so ist der Abschluss  $\bar{A}$  kompakt in  $C^0$ .

**Satz 4.11** (Sobolev-Einbettungen). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt und mit Lipschitz-stetigem Rand. Dann gilt für  $m, k \in \mathbb{N}$ ,  $p, q \in (1, \infty)$  und  $\alpha \in (0, 1)$

$$k - \frac{n}{p} \geq m - \frac{n}{q} \quad \Rightarrow \quad H^{k,p} \subset H^{m,q}, \quad (4.2)$$

$$k - \frac{n}{p} \geq m + \alpha \quad \Rightarrow \quad H^{k,p} \subset C^{m+\alpha}. \quad (4.3)$$

Die Einbettungen sind kompakt, falls 'echt größer' gilt.

Für Beweise siehe z.B. Alt [1], 2.25, 8.7 und 8.8. Siehe auch die Übungen.

### Anwendung auf Differenzialgleichungen: Ein Existenzsatz

Wir betrachten die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0. \quad (4.4)$$

**Satz 4.12** (Existenzsatz von Peano). Sei  $f : [0, T] \times X \rightarrow X$  stetig,  $X$  endlich-dimensional. Dann hat für kleine Zeiten (4.4) eine Lösung.

*Beweis.* Bemerke zunächst: Für  $t_0, r > 0$  und  $\bar{B}_r(u_0) \subset X$  ist die Funktion  $f$  auf  $[0, t_0] \times \bar{B}_r(u_0)$  beschränkt durch eine Konstante  $M \in \mathbb{R}$ .

Grundidee des Beweises: Eine Funktion  $u$  mit  $u(0) = u_0$  ist Lösung von (4.4) genau dann, wenn

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(\tau, u(\tau)) d\tau$$

für alle  $t$  gilt. Wir benutzen

$$Z := \{u \in C^0([0, t_0], X) \mid u(0) = u_0\}$$

und für  $r > 0$  die Kugel  $A := \bar{B}_r(u_0) \cap Z$ . Darauf betrachten wir den Operator  $S : A \rightarrow A$ , definiert durch

$$(Su)(t) := u_0 + \int_0^t f(\tau, u(\tau)) d\tau.$$

Wegen  $\|(Su)(t) - u_0\| \leq t \cdot M$  gilt für hinreichend kleines  $t_0 > 0$ , dass  $S$  eine Selbstabbildung ist,  $S : A \rightarrow A$ . Wenn wir nachweisen, dass  $S$  kompakt ist, dann können wir den Satz von Schauder anwenden. Der Fixpunkt von  $S$  ist die gesuchte Lösung.

*Behauptung:  $S$  ist kompakt.* Wir benutzen Arzela-Ascoli. Die Menge  $S(A) \subset C^0([0, t_0], X)$  ist präkompakt, weil die Funktionen der Menge  $S(A)$  gleichgradig stetig sind. Um dies zu zeigen, betrachten wir  $z = Su$ . Dann gilt

$$\|z(t_1) - z(t_2)\| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(\tau, u(\tau))| d\tau \leq M |t_2 - t_1|.$$

Dies geht gegen 0, und zwar gleichmässig für alle  $u$ . Die zweite Bedingung der gleichgradigen Stetigkeit ist auch erfüllt:  $\sup_z \sup_t |z(t)| \leq \|u_0\| + Mt_0$ .  $\square$

*Eine abstrakte Formulierung:*

Der Operator  $S$  ist eine Verkettung von drei stetigen Operatoren,

$$\begin{aligned} F : C^0((0, T), X) &\rightarrow C^0((0, T), X), u(\cdot) \mapsto f(\cdot, u(\cdot)), \\ I : C^0((0, T), X) &\rightarrow C^1((0, T), X), f(\cdot) \mapsto \int_0^\cdot f(s) ds, \\ j : C^1((0, T), X) &\rightarrow C^0((0, T), X), u \mapsto u. \end{aligned}$$

Der Operator  $S$  war  $S = j \circ I \circ F$ . Die Operatoren  $F$  und  $I$  sind beschränkt auf beschränkten Teilmengen und der Operator  $j$  ist kompakt (nach Arzela-Ascoli). Dann ist auch die Verkettung kompakt (folgt direkt aus der Definition).

# 5. Der Abbildungsgrad im Banachraum

Eine Motivation für den Abbildungsgrad ist der Satz von Schauder aus Theorem 4.9. Wir stellen fest, dass der Beweis für Theorem 3.10 sich auf den unendlichdimensionalen Fall überträgt, sobald man den Abbildungsgrad im Banachraum zur Verfügung hat. Wir führen die Konstruktion des Grades nur für beschränkte Mengen  $G$  durch.

## 5.1. Konstruktion des Grades

Wir betrachten ab jetzt immer  $f$  von der Form  $f = \text{id} + g$  mit  $g$  kompakt. Eine der wesentlichen Eigenschaften solcher Abbildungen  $f$  ist die folgende: Für  $A \subset X$  abgeschlossen ist  $f(A)$  auch abgeschlossen. In unserer Anwendung bei der Definition des Grades ist also  $f(\partial G)$  abgeschlossen und  $y_0$  hat einen positiven Abstand zu  $\partial G$ .

**Proposition 5.1.**  *$G \subset X$  beschränkt,  $f : \bar{G} \rightarrow X$  von der Form  $f = \text{id} + g$  mit  $g : \bar{G} \rightarrow X$  kompakt. Dann ist  $f$  eine abgeschlossene Abbildung und eigentlich (Urbilder kompakter Mengen sind kompakt).*

*Beweis.* Sei  $A \subset \bar{G}$  abgeschlossen. Wir betrachten eine Folge  $f(x_n)$  in  $f(A)$  mit  $f(x_n) \rightarrow y$  für  $n \rightarrow \infty$ . Dann gilt  $x_n - g(x_n) \rightarrow y$ . Wegen Kompaktheit von  $g$  finden wir eine Teilfolge mit  $g(x_n) \rightarrow z$ . Dann konvergiert  $x_n$  gegen  $x = y + z$  und wegen der Stetigkeit gilt  $f(x) = y$ . Also gilt  $y \in f(A)$ .

Sei  $B \subset Y$  kompakt. Dann ist  $M := f^{-1}(B) = \{x : f(x) \in B\}$  abgeschlossen. Wegen  $M = \{x : x + g(x) \in B\}$  gilt  $M \subset B - \text{cl}(g(\bar{G}))$ , also ist  $M$  präkompakt und deswegen kompakt.  $\square$

Die nächste Formel behandelt den Abbildungsgrad von  $f = \text{id} + g$  im  $n$ -dimensionalen Fall, wobei  $g$  Werte in einem niederdimensionalen Teilraum hat (Dimension  $m < n$ ). In diesem Fall kann man den Grad von  $f$  auch im  $m$ -dimensionalen ausrechnen.

**Proposition 5.2** (Reduktionsformel). *Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  offen, beschränkt und  $m < n$ . Setze  $E^m := \mathbb{R}^m \times \{0\}_{\mathbb{R}^{n-m}} \subset \mathbb{R}^n$ . Es sei  $f = \text{id} + g$  mit*

$$g \in C^0(\bar{G}, E^m).$$

*Weiterhin sei  $y_0 \in E^m$  mit  $y_0 \notin f(\partial G)$ . Bezeichne mit  $\pi$  und  $\pi^*$  die Identifikationen  $\pi : E^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  und  $\pi^* : \mathbb{R}^m \rightarrow E^m$ . Dann gilt*

$$d_{\mathbb{R}^n}(f, G, y_0) = d_{\mathbb{R}^m}(\pi \circ f \circ \pi^*, \pi(G \cap E^m), \pi y_0).$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $f \in C^1$  gilt und dass  $y_0$  ein regulärer Wert ist. Nach Formel (2.7) reicht es, für  $f^* := \pi \circ f \circ \pi^*$  zu zeigen:  $\text{sgn } \mathcal{J}_f(x) = \text{sgn } \mathcal{J}_{f^*}(\pi x)$ . Begründung: Die Urbilder von  $y_0$  liegen alle in  $E^m$ , denn  $x + g(x) = y_0$  impliziert  $x \in E^m$ .

Wir schreiben  $g^* = \pi \circ g \circ \pi^*$  für die ersten  $m \times m$  Einträge und berechnen

$$\mathcal{J}_f = \det \begin{pmatrix} \text{id}_m + Dg^* & \star \\ 0 & \text{id}_{n-m} \end{pmatrix} = \det(\text{id}_m + Dg^*) = \mathcal{J}_{f^*}.$$

Insbesondere stimmen die Vorzeichen überein. □

Für  $y_0 \notin f(\partial G)$  wissen wir, dass  $\varepsilon := \text{dist}(y_0, f(\partial G))$  größer als 0 ist ( $f(\partial G)$  ist abgeschlossen, also  $X \setminus f(\partial G)$  offen, daher gilt für ein  $\varepsilon > 0$  die Eigenschaft  $B_\varepsilon(y_0) \cap f(\partial G) = \{\}$ ). Nach Satz 4.4 können wir die Abbildungen  $g$  durch endlichdimensionale  $g_\varepsilon$  approximieren; damit auch  $f = \text{id} + g$  durch  $f_\varepsilon = \text{id} + g_\varepsilon$ . Wir fordern an die Approximation  $\|f - f_\varepsilon\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ . Mit einem endlichdimensionalen Unterraum  $E_\varepsilon \subset X$  gilt dann auch

$$f_\varepsilon|_{E_\varepsilon \cap \bar{G}} : E_\varepsilon \cap \bar{G} \rightarrow E_\varepsilon.$$

Damit können wir den Grad im Banachraum definieren.

**Definition 5.3** (Grad im Banachraum). *Wähle  $E_\varepsilon$  und  $f_\varepsilon$  wie oben, ohne Einschränkung mit  $y_0 \in E_\varepsilon$ . Setze*

$$d(f, G, y_0) := d(f_\varepsilon|_{E_\varepsilon \cap G}, E_\varepsilon \cap \bar{G}, y_0).$$

Wir müssen zeigen, dass diese Definition unabhängig ist von der Approximation  $f_\varepsilon$ . Dazu seien  $f_1$  und  $f_2$  zwei solche Approximationen mit Räumen  $E_1$  und  $E_2$ . Wir berechnen die Grade der rechten Seite in dem größeren Unterraum  $F := \text{conv}(E_1, E_2)$ . Es gilt

$$d(f_i|_{E_i \cap \bar{G}}, E_i \cap \bar{G}, y_0) = d(f_i|_{F \cap \bar{G}}, F \cap \bar{G}, y_0)$$

wegen des Reduktionssatzes 5.2. Es bleibt zu zeigen

$$d(f_1|_{F \cap \bar{G}}, F \cap \bar{G}, y_0) = d(f_2|_{F \cap \bar{G}}, F \cap \bar{G}, y_0).$$

Dies folgt aber sofort aus dem Satz von Rouché wegen

$$\|f_1 - f_2\| < \frac{2\varepsilon}{3} = \frac{2}{3} \text{dist}(y_0, f(\partial G)) \leq \text{dist}(y_0, f_1(\partial G)).$$

Es bleibt, die Eigenschaften des Grades nachzuweisen.

**Satz 5.4.** *Der Abbildungsgrad aus Definition 5.3 erfüllt die Eigenschaften (d1)–(d5).*

*Beweis.* (d1), (d3) und (d5) folgen sofort aus der Definition.

(d2): Sei  $d(f, G, y_0) \neq 0$ . Dann hat für eine Familie von Abbildungen  $f_k \rightarrow f$ ,  $f_k = \text{id} + g_k$ ,  $g_k : \bar{G} \rightarrow E_k$ ,  $E_k$  endlichdimensional, der Punkt  $y_0$  jeweils ein Urbild  $x_k$ . Es gilt

$$y_0 = x_k + g_k(x_k) = x_k + g(x_k) + [g_k(x_k) - g(x_k)].$$

Nach Auswahl einer Teilfolge gilt also

$$x_k = y_0 - g(x_k) - [g_k(x_k) - g(x_k)] \rightarrow y_0 - g_0 =: x_0$$

für ein  $g_0$  wegen der Kompaktheit von  $g$ . Wegen der Stetigkeit von  $f$  ist  $x_0$  dann auch ein Urbild von  $y_0$ ,

$$f(x_0) = \lim f(x_k) = \lim f_k(x_k) = y_0.$$

(d4): Bemerke, dass wir im Banachraum fordern:  $h(\cdot, t) = \text{id} + g(\cdot, t)$ ,  $g(\cdot, t)$  kompakt, für alle  $t \in [0, 1]$ . Dann ist  $g$  auch auf  $\bar{G} \times [0, 1]$  eine kompakte Abbildung (Übung) und wir können  $g$  endlichdimensional approximieren. Wir dürfen diese Approximation zur Berechnung des Grades verwenden und folgern aus dem endlichdimensionalen Resultat, dass der Grad konstant ist.  $\square$

Ohne dies vorzurechnen bemerken wir, dass sich die Sätze von Borsuk und von der Gebietsinvarianz auf die unendlichdimensionale Situation übertragen.

Als abstrakte Anwendung geben wir hier einen eleganten Beweis der Fredholm-Alternative, Corollar 8.5: Sei  $\lambda \neq 0$  und  $K \in \mathcal{L}(X, X)$  kompakt. Dann gilt: Entweder hat  $(\lambda - K)x = 0$  eine nichttriviale Lösung oder  $(\lambda - K)$  ist invertierbar.

*Beweis von Corollar 8.5.* Betrachte  $L = \lambda - K$  mit  $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$  und  $K$  kompakt. Wir nehmen an, dass der Kern trivial ist,  $\ker(L) = \{0\}$ , und wollen folgern, dass der Operator surjektiv ist,  $R(L) = Y$ . Wir betrachten  $f = L|_{B_1} : B_1(0) \rightarrow Y$ . Die Abbildung  $f$  ist linear, also insbesondere  $f(-x) = -f(x)$  und daher ungerade. Wegen  $\ker(L) = \{0\}$  gilt  $0 \notin f(\partial B_1(0))$ . Der Satz von Borsuk liefert

$$d(f, B_1(0), 0) \neq 0.$$

Dann ist  $f$  invertierbar auf einer Umgebung der Null. Wegen Linearität ist  $L$  dann global invertierbar,  $R(L) = Y$ . Dies war zu zeigen.  $\square$

## 5.2. Der Index einer Lösung

Im Folgenden sei immer  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{R}$ .

**Definition 5.5** (Index). Für  $G \subset X$  offen sei  $f \in C^1(G, X)$  eine Abbildung der Form  $f = \text{id} + K$  mit  $K$  kompakt. Sei  $x_0 \in G$  eine reguläre Nullstelle, es gelte also

$$f(x_0) = 0, \quad A := Df(x_0) \text{ ist invertierbar.} \quad (5.1)$$

Wir definieren den Index der Nullstelle  $x_0$  als die ganze Zahl

$$\text{Index}(f, x_0) := d(f, B_\varepsilon(x_0), 0),$$

wobei  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein gewählt ist.

*Bemerkung: Wohldefiniertheit.* Der Satz über die Umkehrfunktion liefert, dass  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  invertierbar ist. Insbesondere liegen keine Nullstellen auf  $\partial B_\varepsilon(x_0)$  für alle  $\varepsilon < \varepsilon_0$  für ein hinreichend kleines  $\varepsilon_0 > 0$ . Wegen der Homotopieinvarianz ist der Index unabhängig von  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ .

*Bemerkung: Mögliche Werte.* In der Kugel  $B_\varepsilon(x_0)$  hat  $f$  nur eine Nullstelle, diese ist regulär. Wegen der Summenformel für den Abbildungsgrad (gezählte Nullstellen) gilt

$$\text{Index}(f, x_0) \in \{-1, +1\}.$$

*Spezialfall*  $X = \mathbb{R}^n$ . Wegen der Summenformel für den Grad gilt

$$\text{Index}(f, x_0) = d(f, B_\varepsilon(x_0), 0) = d(A, B_\varepsilon(0), 0) = \text{sgn det } A = (-1)^\beta, \quad (5.2)$$

wobei  $\beta$  die Anzahl (mit algebraischer Vielfachheit) der negativen (reellen) Eigenwerte ist. Insbesondere sehen wir, dass die Definition des Index für zwei verschiedene, aber hinreichend kleine Werte von  $\varepsilon$  dieselbe Zahl liefert.

*Merke: Der Index ist die Parität der Anzahl der negativen Eigenwerte.*

Erinnerung: Die *algebraische Vielfachheit*  $n_\lambda$  des Eigenwertes  $\lambda \in \mathbb{C}$  des Operators  $T$  ist definiert als

$$n_\lambda := \dim \left( \bigcup_{p=1}^{\infty} \ker(\lambda \text{id} - T)^p \right).$$

Dabei ist für hinreichend großes  $p_0$  der Kern auf der rechten Seite unabhängig von  $p \geq p_0$ , es wird also nur die Dimension einer endlichen Vereinigung gebildet.

Zur letzten Gleichung in (5.2) bemerken wir, dass nichtreelle Eigenwerte nicht beitragen: Für reelle Matrizen  $A$  ist für einen nichtreellen Eigenwert  $\lambda$  auch die konjugiert komplexe Zahl  $\bar{\lambda}$  ein Eigenwert, und  $\bar{\lambda}$  hat dieselbe Vielfachheit. In der Determinante taucht in diesem Fall also der Faktor  $\lambda^{n_\lambda} \cdot \bar{\lambda}^{n_\lambda}$  auf, welcher positiv ist.

Im allgemeinen Banachraum  $X$  nehmen wir immer an:

1.  $x_0$  ist regulär:  $A := Df(x_0) \in \mathcal{L}(X, X)$  ist invertierbar.
2.  $A$  ist Fredholmoperator der Form  $A = \text{id} + K$  mit  $K \in \mathcal{L}(X)$  kompakt.

Diese Voraussetzungen erlauben insbesondere die Berechnung des Abbildungsgrades. Gemäß Summenformel stimmt der Abbildungsgrad mit dem Vorzeichen von  $\det(A)$  überein.

**Satz 5.6** (Formel für den Index einer Nullstelle). *Für  $G \subset X$  offen sei  $f \in C^1(G, X)$  von der Form  $\text{id} + K$ , der Punkt  $x_0 \in G$  sei eine Nullstelle von  $f$ , es gelte 1. und 2. Dann ist der Index von  $x_0$*

$$\text{Index}(f, x_0) := d(f, B_\varepsilon(x_0), 0) = (-1)^\beta,$$

wobei

$$\beta = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < -1} n_\lambda(K).$$

Bemerkung: Das Theorem verwendet den Spektralsatz für kompakte Operatoren, siehe z.B. [1], 9.6. Dieser liefert für den kompakten Operator  $K$  die Endlichkeit  $n_\lambda(K) < \infty$  und die Endlichkeit der Anzahl der Eigenwerte in der Menge  $\mathbb{C} \setminus B_1(0)$ .

Wir verwenden den Operator  $K$ , denn für diesen gilt der Spektralsatz für kompakte Operatoren. Die Eigenwerte  $\lambda < -1$  von  $K$  können interpretiert werden als die negativen Eigenwerte von  $A = \text{id} + K$ .

*Beweis.* Wir nehmen ohne Einschränkung  $x_0 = 0$  an.

1. *Schritt. Übergang zur Ableitung.* Wir betrachten die Homotopie  $h(x, t) = (1-t)f(x) + tAx$ . Mit  $g(x) := f(x) - Ax$  können wir auch schreiben

$$h(x, t) = Ax + (1-t)g(x).$$

Die Homotopie ist zulässig für kleines  $\varepsilon > 0$ :  $h(x, t) = 0$  impliziert  $x = (1-t)A^{-1}g(x)$  und wir erreichen wegen Differenzierbarkeit von  $f$  die Kleinheit  $\|A^{-1}g(x)\| \leq \varepsilon/2$  für alle  $x \in B_\varepsilon(0)$ . Es gilt also

$$d(f, B_\varepsilon(0), 0) = d(A, B_\varepsilon(0), 0).$$

2. *Schritt. Endlichdimensionale Approximation.* Wir verwenden den Spektralsatz [1] 9.6. Ein endlichdimensionaler Unterraum  $X_1 \subset X$  wird aufgespannt durch die (endlich vielen) verallgemeinerten Eigenräume von  $K$  zu Eigenwerten mit Betrag größer als  $1/2$ . Der Raum  $X$  besitzt eine Zerlegung  $X = X_1 \oplus X_2$  mit einem  $K$ -invarianten Unterraum  $X_2$ . Zur Zerlegung existieren stetige Projektionen  $\pi_1$  und  $\pi_2$ .

Wir betrachten nun die Homotopie  $\text{id} + K_t$  mit  $K_t := K \circ \pi_1 + (1-t)K \circ \pi_2$  zwischen  $K$  und dem endlichdimensionalen Operator  $K_1 = K \circ \pi_1$ . Wir behaupten, dass die Homotopie zulässig ist. Tatsächlich folgt für Nullstellen  $x$  mit  $x = x_1 + x_2$  für  $x_i = \pi_i x$ :

$$0 = (\text{id} + K_t)(x) \Rightarrow x_1 + Kx_1 = 0 \text{ und } x_2 + (1-t)Kx_2 = 0.$$

Wegen Invertierbarkeit von  $A = \text{id} + K$  verschwindet  $x_1$ . Da keine Eigenvektoren  $x_2$  mit Eigenwerten mit Betrag größer 1 existieren, verschwindet auch  $x_2$ . Die Homotopie ist also zulässig und wir können den Grad mit  $K_1$  berechnen,

$$d(f, B_\varepsilon(0), 0) = d(\text{id} + K \circ \pi_1, B_\varepsilon(0), 0) = (-1)^\beta.$$

Dabei haben wir das endlichdimensionale Ergebnis verwendet, also

$$\beta = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < 0} n_\lambda((\text{id} + K)|_{X_1}) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < -1} n_\lambda(K|_{X_1}) = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda < -1} n_\lambda(K).$$

Damit kann der Grad aus der Vielfachheit der negativen Eigenwerte bestimmt werden.  $\square$

## **Part II.**

# **Calculus im Banachraum**

## 6. Differenzierbarkeit

In diesem Abschnitt sind  $X$  und  $Y$  immer Banachräume. Wir wollen uns mit nicht-linearen Abbildungen  $f$  von  $X$  nach  $Y$  beschäftigen. Da  $f$  nicht unbedingt auf ganz  $X$  definiert sein muss, betrachten wir  $f : X \supset G \rightarrow Y$ , wobei  $G$  eine offene Teilmenge von  $X$  ist. Wir werden immer die Stetigkeit von  $f$  fordern, in Formeln  $f \in C(G, Y)$ . Die Definitionen sind wie im Endlichdimensionalen. Man sagt, dass  $f$  stetig ist in einem Punkt  $x_0 \in G$ , falls

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : f(B_\varepsilon(x_0)) \subset B_\delta(f(x_0)).$$

Dabei sind die Kugeln bezüglich der jeweiligen Norm zu sehen; als Topologie in  $G$  wird die Topologie von  $X$  gewählt. Stetigkeit wird definiert als Stetigkeit in jedem Punkt. Die stetigen und beschränkten Funktionen bilden mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_\infty$  den Banachraum  $C_b(G, Y)$ .

Die Menge  $\mathcal{L}(X, Y)$  sei der Raum der beschränkten linearen Abbildungen  $X \rightarrow Y$ . Mit der Norm

$$\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup\{\|Tx\|_Y : x \in X, \|x\|_X \leq 1\}$$

ist  $\mathcal{L}(X, Y)$  wieder ein Banachraum.

### 6.1. Ableitung und Richtungsableitung

Idee: Die Ableitung einer nichtlinearen Funktion  $f : X \rightarrow Y$  in einem Punkt  $x_0$  ist die lineare Abbildung  $X \rightarrow Y$ , die  $f$  bestmöglich approximiert.

Dies ist das Konzept der Fréchet-Ableitung, für uns *die* Ableitung.

**Definition 6.1** (Ableitung).  $f$  heißt differenzierbar in  $x_0 \in X$ , falls für ein  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  und den 'Fehler'

$$g(z) := f(x_0 + z) - f(x_0) - Az$$

gilt:

$$\frac{\|g(z)\|_Y}{\|z\|_X} \rightarrow 0$$

für  $z \rightarrow 0$  in  $X$ . Wir schreiben dann  $Df(x_0) := A$ .

*Bemerkungen:* Ein solches  $A$  ist (falls es existiert) eindeutig. Wichtig an dem Konzept ist, dass  $Df(x_0)$  eine Abbildung  $X \rightarrow Y$  ist. Für die Auswertung in eine 'Richtung'  $v \in X$  schreiben wir meist

$$Df(x_0) : v \mapsto Df(x_0) \langle v \rangle.$$

In der Differentialgeometrie sind die Konzepte in gewisser Weise klarer. Zu Mannigfaltigkeiten  $M, N$  mit Punkten  $x \in M, y \in N$  und Tangentialräumen  $\{T_x M : x \in M\}$  und  $\{T_y N : y \in N\}$  gilt: Für  $f : M \rightarrow N$  ist  $Df(x)$  eine Abbildung  $Df(x) : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ . In unserem Fall sind  $M$  und  $N$  offene Teilmengen von Banachräumen, und damit alle Tangentialräume identisch zum Banachraum. Höhere Ableitungen sind durch obige Definition abgedeckt: Die (erste) Ableitung ist eine Abbildung  $Df : G \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ . Wir können wieder ableiten und finden

$$D^2 f : G \rightarrow \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)) \equiv \mathcal{L}(X \times X, Y),$$

$$D^2 f(x) : (v, w) \mapsto D^2 f(x) \langle v, w \rangle.$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, dass wir ein zweites mal differenzieren können.

Falls  $Df(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$  stetig von  $x_0 \in X$  abhängt, so schreiben wir  $f \in C^1(X, Y)$ . Analog wird mit höheren Ableitungen  $C^k(X, Y)$  definiert.

Es gilt die *Kettenregel* (Beweis wie in der Infinitesimalrechnung): Falls  $f : X \supset G \rightarrow Y$  und  $g : Y \supset V \rightarrow Z$  differenzierbar sind und  $g \circ f$  in einer Umgebung von  $x_0$  definiert ist, so gilt

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0) : v \mapsto Dg(f(x_0)) \langle Df(x_0) \langle v \rangle \rangle.$$

Kompositionen von  $C^k$ -Abbildungen sind wieder  $C^k$ .

Ein schwächeres Konzept ist die *Richtungsableitung*. Hier betrachtet man zu gegebenem  $f : X \supset G \rightarrow Y$  und  $x_0 \in G$  Wege  $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow X$ , die durch  $x_0$  laufen, also

$$\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), X), \quad \gamma : s \mapsto \gamma(s), \quad \gamma(0) = x_0.$$

Die 'Geschwindigkeit' in 0 (also im Bildpunkt  $x_0$ ) ist  $v := \gamma'(0)$ . Wir können nun fragen, wie sich die Werte von  $f$  verändern, wenn wir den Weg  $\gamma$  entlanglaufen. In der 0 bestimmen wir die Richtungsableitung von  $f$  in Richtung  $v$  nach der Kettenregel als

$$\frac{d}{ds}(f \circ \gamma)(0) = Df(x_0) \langle v \rangle.$$

Wir sehen, dass eine differenzierbare Funktion Richtungsableitungen in jede Richtung hat; diese werden durch die Auswertung von  $Df(x)$  bestimmt. Umgekehrt gibt es allerdings Funktionen, die zwar in jede Richtung Richtungs-differenzierbar sind, aber nicht differenzierbar.

Aus der Kettenregel und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt sofort der *Mittelwertsatz*: Falls  $f \in C^1(G)$  auf einer offenen, konvexen Menge  $G$ , dann

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x_0 + t(x_1 - x_0)) dt \\ &= \int_0^1 Df(x_0 + t(x_1 - x_0)) \langle x_1 - x_0 \rangle dt \\ &= \left[ \int_0^1 Df(x_0 + t(x_1 - x_0)) dt \right] \langle x_1 - x_0 \rangle. \end{aligned}$$

## 6.2. Euler-Lagrange Gleichungen

An einem Beispiel wollen wir demonstrieren, wie man Ableitungen im Banachraum für die Herleitung von Differenzialgleichungen einsetzen kann. Wir wollen die isoperimetrische Ungleichung betrachten: Im zweidimensionalen Raum wollen wir mit einer Linie minimaler Länge ein vorgegebenes Volumen einschließen.

*Variablen:* Die Höhenfunktion sei  $u : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Höhe in den Randpunkten sei 0, also  $u(0) = 0 = u(1)$ .

*Energien:* Die Fläche unter  $u$  sei durch  $F_0$  fest gegeben, die Länge des Graphen von  $u$  soll minimiert werden. Wir nehmen also im Folgenden an, dass für  $u$  gilt

$$\begin{aligned} u \in X &:= \{u \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid u(0) = 0 = u(1)\}, \\ F(u) &:= \int_0^1 u(x) dx = F_0, \\ L(u) &:= \int_0^1 \sqrt{1 + |\partial_x u(x)|^2} dx = \min \{L(v) \mid v \in X, F(v) = F_0\}. \end{aligned}$$

*Abstrakte Schreibweise und Analysis:* Wir versuchen,  $u$  durch eine Gleichung zu beschreiben. Zunächst stellen wir fest, dass  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  und  $L : X \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind,

$$\begin{aligned} DF(u) \langle v \rangle &= \int_0^1 v(x) dx, \\ DL(u) \langle v \rangle &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_x u(x)|^2}} \partial_x u(x) \partial_x v(x) dx. \end{aligned}$$

Für  $F$  folgt dies aus der Linearität von  $F$ , die Ableitung (beste lineare Approximation) ist die Funktion selbst. Die Formel für  $L$  gewinnt man durch die Kettenregel, denn  $L = I \circ g \circ d$  ist die Verkettung vom (linearen) Integral  $I : C^1 \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Funktion  $g : C^1 \ni \xi(\cdot) \mapsto \sqrt{1 + |\xi(\cdot)|^2} \in C^1$  mit der linearen Funktion  $d$  'Differenziation',  $d : C^2 \ni u \mapsto \partial_x u \in C^1$ .

Nun betrachten wir Wege

$$\gamma \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), X), \quad \gamma : s \mapsto \gamma(s), \quad \gamma(0) = u.$$

Die physikalische Aussage war, dass für jeden Weg  $\gamma$  mit  $F(\gamma(\cdot)) \equiv F_0$  gilt, dass  $L(\gamma(\cdot))$  in  $s = 0$  ein Minimum hat. Zunächst wollen wir überprüfen, dass es zu jeder Richtung  $v$  mit

$$\int_0^1 v(x) dx = DF(u) \langle v \rangle = 0,$$

tatsächlich einen Weg  $\gamma$  gibt mit  $F(\gamma(\cdot)) \equiv F_0$ . Im vorliegenden (linearen) Fall genügt es, den Weg  $\gamma(s) := u + sv$  zu betrachten. Entlang des Weges  $\gamma$  ist  $L$  im

Nullpunkt minimal, also

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{ds} L(\gamma(s))|_0 = DL(u) \langle v \rangle \\
 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 + |\partial_x u(x)|^2}} \partial_x u(x) \partial_x v(x) dx \\
 &\stackrel{P.I.}{=} - \int_0^1 \partial_x \left( \frac{\partial_x u}{\sqrt{1 + |\partial_x u|^2}} \right) (x) \cdot v(x) dx
 \end{aligned}$$

Für jedes  $v \in X$  mit Mittelwert 0 verschwindet also das letzte Integral. Dies ist nur möglich, falls der Ausdruck

$$K(x) := \partial_x \left( \frac{\partial_x u}{\sqrt{1 + |\partial_x u|^2}} \right) (x) = K_0$$

unabhängig von  $x$  ist. Zum Beweis: Angenommen,  $K$  wäre an zwei Stellen  $x_1$  und  $x_2$  unterschiedlich groß. Dann wählen wir  $v$  so, dass  $v \neq 0$  nur in der Nähe der zwei Punkte, positiv in der Nähe von  $x_1$  und negativ in der Nähe von  $x_2$  mit Mittelwert 0. Das Integral über  $K(x) \cdot v(x)$  wäre dann ungleich 0.

Wir haben erhalten, dass die *Krümmung*  $K$  entlang der Kurve konstant ist. Die Kurve ist also ein Kreissegment. Die Argumentation bricht zusammen, sobald die Kurve  $u$  genau einen Halbkreis beschreibt. Danach ist die Lösungskurve nicht mehr als Graph zu schreiben, die Variablen des Problems sind dann ungeeignet gewählt.

# 7. Implizite Funktionen

## 7.1. Der Satz über Implizite Funktionen

Wir wiederholen den Satz über implizite Funktionen. Er gilt im Banachraum ebenso wie im Endlichdimensionalen. Unser Ziel ist es, die Gleichung  $f(x, y) = 0$  nach der Variablen  $x$  aufzulösen.

**Satz 7.1.** *Seien  $X, Y, Z$  Banachräume,  $U \subset X \times Y$  offen und*

$$f : X \times Y \supset U \rightarrow Z$$

*stetig. Ein Punkt  $(x_0, y_0) \in U$  sei eine Lösung in dem Sinn, dass  $f(x_0, y_0) = 0$ . Die Ableitung  $D_x f(x, y)$  existiere für alle  $(x, y) \in U$  und sei stetig in  $U$ . Wir nehmen an:*

$$A := D_x f(x_0, y_0) : X \rightarrow Z \quad \text{ist ein Isomorphismus.}$$

*In diesem Fall kann man die Gleichung  $f = 0$  lokal eindeutig auflösen:*

- (i) *Es gibt  $\delta, r > 0$ , so dass für eine eindeutig bestimmte Funktion  $u : Y \supset B_r(y_0) \rightarrow B_\delta(x_0) \subset X$  gilt*

$$f(x, y) = 0 \Rightarrow x = u(y)$$

*für alle  $(x, y) \in B_\delta(x_0) \times B_r(y_0)$ . Insbesondere gilt  $u(y_0) = x_0$ . Die Funktion  $u$  erfüllt die Äquivalenz  $f(x, y) = 0 \iff x = u(y)$ , zudem ist  $u$  stetig.*

- (ii)  *$f \in C^1$  impliziert  $u \in C^1(B_r(y_0), X)$  und es gilt dann*

$$D_y u(y) = - [D_x f(u(y), y)]^{-1} D_y f(u(y), y).$$

- (iii) *Für alle  $p \geq 1$  gilt:  $f \in C^p$  impliziert  $u \in C^p$ .*

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $x_0 = 0$  und  $y_0 = 0$ . Grundidee des Beweises ist die Äquivalenz

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\iff Ax = -f(x, y) + Ax =: R(x, y) \\ &\iff x = A^{-1}R(x, y) =: g(x, y). \end{aligned}$$

Man zeigt die Existenz eines solchen Fixpunktes  $x$  (für jedes  $y$ ) mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes.

*Ad (i): Existenz von  $u(y)$ .* Wir behaupten: Für geeignetes  $r$  und  $\delta$  ist

$$g(\cdot, y) : \bar{B}_\delta(0) \rightarrow \bar{B}_\delta(0) \subset X \quad \text{eine Kontraktion}$$

für alle  $y \in B_r(0) \subset Y$ . Der eindeutige Fixpunkt ist dann die gesuchte Lösung  $x =: u(y)$ .

Sei  $\varepsilon > 0$  mit  $\varepsilon \|A^{-1}\| \leq 1/2$ . Wir rechnen für  $R$ :

$$\begin{aligned} R(x_1, y) - R(x_2, y) &= Ax_1 - Ax_2 - (f(x_1, y) - f(x_2, y)) \\ &= A(x_1 - x_2) - \left[ \int_0^1 D_x f(tx_1 + (1-t)x_2) dt \right] (x_1 - x_2) \\ &= \left[ A - \int_0^1 D_x f(tx_1 + (1-t)x_2) dt \right] (x_1 - x_2) \\ &= \left[ \int_0^1 (D_x f(0, 0) - D_x f(tx_1 + (1-t)x_2)) dt \right] (x_1 - x_2). \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von  $D_x f$  können wir  $r$  und  $\delta$  wählen mit  $\|D_x f(0, 0) - D_x f\| \leq \varepsilon$  auf  $B_\delta \times B_r \subset X \times Y$ . Dann gilt

$$\|R(x_1, y) - R(x_2, y)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_2\| \quad \forall y \in B_r$$

und daher

$$\|g(x_1, y) - g(x_2, y)\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \quad \forall y \in B_r.$$

Wir müssen noch nachweisen, dass  $g(\cdot, y)$  eine Selbstabbildung von  $B_\delta$  ist. Nach eventuellem Verkleinern von  $r$  gilt  $\|g(0, y)\| \leq \frac{1}{2}\delta$  für alle  $y \in B_r$ . Wegen  $\|g(x, y) - g(0, y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - 0\|$  gilt dann auch

$$\|g(x, y)\| \leq \frac{1}{2}\delta + \|g(0, y)\| \leq \delta.$$

Dies liefert die eindeutige Lösung  $x =: u(y)$ . Nach Konstruktion liefert die Abbildung  $u$  für jedes  $y$  eine Lösung  $x$  der Gleichung  $f(x, y) = 0$ .

*Stetigkeit von  $u$ :* Seien  $y_1, y_2 \in B_r$ . Wegen der Lösungseigenschaft gilt

$$\begin{aligned} \|u(y_1) - u(y_2)\| &\leq \|g(u(y_1), y_1) - g(u(y_2), y_2)\| \\ &\leq \|g(u(y_1), y_1) - g(u(y_2), y_1)\| \\ &\quad + \|g(u(y_2), y_1) - g(u(y_2), y_2)\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|u(y_1) - u(y_2)\| + \|g(u(y_2), y_1) - g(u(y_2), y_2)\|. \end{aligned}$$

Der erste Term der rechten Seite kann auf beiden Seiten subtrahiert werden. Der zweite Term konvergiert gegen 0 für  $y_1 \rightarrow y_2$ , weil  $g$  stetig ist. Damit ist auch  $u$  stetig und (i) ist gezeigt.

*Ad (ii): Differenzierbarkeit von  $u$ .* Für zwei Punkte  $y$  und  $y + \delta_y$  in  $B_r$  betrachten wir  $\delta_u := u(y + \delta_y) - u(y)$ . Für

$$B(y) := -[D_x f(u(y), y)]^{-1} D_y f(u(y), y) : Y \rightarrow X$$

müssen wir zeigen

$$\|\delta_u - B(y)\delta_y\| = o(\|\delta_y\|).$$

Die Differenzierbarkeit von  $f$  impliziert, dass für beliebiges  $\varepsilon > 0$  eine Schranke  $\delta_0(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass für alle  $\delta_y$  mit  $\|\delta_y\| < \delta_0$  gilt (verwende  $\delta_u \rightarrow 0$  für  $\delta_y \rightarrow 0$  wegen Stetigkeit von  $u$ ):

$$\begin{aligned} & \|f(u(y + \delta_y), y + \delta_y) - f(u(y), y) - D_x f(u(y), y)\delta_u - D_y f(u(y), y)\delta_y\| \\ & \leq \varepsilon(\|\delta_y\| + \|\delta_u\|). \end{aligned}$$

Bemerke, dass die beiden ersten Terme verschwinden, es gilt also

$$\|D_x f(u(y), y)\delta_u + D_y f(u(y), y)\delta_y\| \leq \varepsilon(\|\delta_y\| + \|\delta_u\|).$$

Wegen  $D_x f(u(y), y) \rightarrow D_x f(0, 0)$  für  $y \rightarrow 0$  (Stetigkeit von  $D_x f$  und von  $u$ ) und da  $A = D_x f(0, 0)$  invertierbar, ist auch  $D_x f(u(y), y)$  invertierbar mit beschränkter Inversen (für kleines  $r$ ,  $y \in B_r$ ). Dann gilt, mit  $C > 0$  nur abhängig von  $A^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \|\delta_u - B(y)\delta_y\| & \leq C\varepsilon(\|\delta_y\| + \|\delta_u\|) \\ & \leq C\varepsilon(\|\delta_y\| + \|\delta_u - B(y)\delta_y\| + \|B(y)\delta_y\|). \end{aligned}$$

Für  $\varepsilon > 0$  klein genug kann der zweite Term der rechten Seite absorbiert werden. Die Operatoren  $B(y)$  sind beschränkt und es folgt

$$\|\delta_u - B(y)\delta_y\| \leq 2C\varepsilon\|\delta_y\|,$$

also die Differenzierbarkeit von  $u$  im Punkt  $y$ . Da die Formel für die Ableitung stetig von  $y$  abhängt, ist  $u$  differenzierbar.

Die höhere Differenzierbarkeit (iii) folgt aus der Formel für die Ableitung.  $\square$

## 7.2. Lokale und globale Inverse

**Satz 7.2** (Lokale Inverse). *Sei  $f : X \supset U \rightarrow Y$  eine  $C^p$ -Funktion für  $p \geq 1$ ,  $x_0 \in U$  und  $f(x_0) = y_0$ . Falls  $D_x f(x_0) : X \rightarrow Y$  ein Isomorphismus ist, so gilt für ein  $r > 0$  die folgende Aussage:*

*In  $B_r(y_0)$  hat  $f$  eine eindeutige Inverse: Es existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung  $u : B_r(y_0) \rightarrow X$  mit  $u(y_0) = x_0$  und  $f(u(y)) = y \forall y \in B_r(y_0)$ . Die Inverse  $u$  ist von der Klasse  $C^p$ .*

*Beweis.* Wir müssen die Gleichung  $F(x, y) = f(x) - y = 0 \in Y$  nach  $x \in X$  auflösen. Wegen Invertierbarkeit von  $D_x F(x_0, y_0) = D_x f(x_0)$  ist der Satz über implizite Funktionen anwendbar.  $\square$

Bisher haben wir den Stoff der Analysis II nicht wirklich verlassen, wir haben lediglich  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}^m$  durch Banachräume  $X$  und  $Y$  ersetzt. Mit dem nachfolgenden Resultat über eine globale Inverse erhalten wir qualitativ neue Resultate.

Beim nächsten Satz ist es nützlich, an das Beispiel der Funktion  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu denken. Das Beispiel zeigt bereits, dass eine globale Inverse selbst für Abbildungen mit invertierbarer Ableitung nicht unbedingt zu existieren braucht; eine Zusatzvoraussetzung über die Inverse der Ableitung ist notwendig.

**Satz 7.3** (Globale Inverse). *Sei  $f \in C^1(X, Y)$  so, dass  $[D_x f(x)]^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$  existiert für jedes  $x \in X$  und mit*

$$\|[D_x f(x)]^{-1}\| \leq \alpha \|x\| + \beta$$

für feste Zahlen  $\alpha, \beta$ . Dann ist  $f : X \rightarrow Y$  ein Diffeomorphismus.

*Beweis.* Wir werden in zwei Schritten vorgehen. In Schritt 1 zeigen wir, dass es zu jedem  $y_0 \in Y$  ein Urbild  $x_0$  gibt. In Schritt 2 zeigen wir, dass das Urbild eindeutig ist.

1. *Schritt: Urbilder von Wegen.* Ohne Einschränkung nehmen wir  $f(0) = 0$  an. Die Grundidee dieses Schrittes ist, zu einem beliebigen Weg im Bildraum einen Urbildweg zu finden.

Für die Existenzaussage betrachten wir den Weg  $y : [0, 1] \rightarrow Y$ ,  $t \mapsto t \cdot y_0$  und suchen einen Urbild-Weg  $x : [0, 1] \rightarrow X$  mit  $f(x(t)) = y(t) \forall t$ . Wegen  $f(0) = 0$  hat zumindest der Startpunkt  $y(0) = 0$  einen Urbildpunkt, nämlich  $x(0) = 0$ . Wir definieren eine Menge  $E$  als die Menge aller  $T$ , so dass es bis zur Zeit  $T$  einen Urbildweg gibt. Genauer:

$$E := \{T \in [0, 1] \mid \exists x \in C^0([0, T], X) \text{ mit} \\ x(0) = 0, f(x(t)) = y(t) \forall t \in [0, T]\}.$$

Wir behaupten, dass  $E$  als Teilmenge von  $[0, 1]$  offen und abgeschlossen ist. Da  $0 \in E$  gilt dann  $E = [0, 1]$ . Es existiert dann ein Weg  $x \in C^0([0, 1], X)$  und damit insbesondere ein Urbild  $f^{-1}(y_0) := x(1)$ .

*E offen in  $[0, 1]$ :* Sei  $T := \sup E$ , wir nehmen für einen Widerspruchsbeweis an, dass sowohl  $T < 1$  als auch  $T \in E$  gilt. Nach dem Satz über die lokale Inverse können wir in einer Umgebung der Lösung  $f(x(T)) = y(T)$  nach  $x$  auflösen. Dann war  $T$  nicht maximal, ein Widerspruch.

*E abgeschlossen in  $[0, 1]$ :* Sei wieder  $T := \sup E$ . Wir wollen zeigen, dass  $T \in E$  gilt. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \int_0^t \|x'(s)\| ds \leq \int_0^t \|[D_x f(x(s))]^{-1}\| \|y'(s)\| ds \\ &\leq \|y_0\| \int_0^t (\alpha \|x(s)\| + \beta) ds. \end{aligned}$$

Dann kann  $\|x(t)\|$  höchstens exponentiell wachsen (Gronwall Ungleichung). Da  $T$  fest ist, finden wir eine Abschätzung  $\|x(t)\| \leq C_1$  für alle  $t \leq T$ . Dies beschränkt gleichzeitig die Ableitung

$$\|x'(t)\| \leq \|[D_x f(x(s))]^{-1}\| \|y'(s)\| \leq (\alpha C_1 + \beta) \|y_0\| \leq C_2.$$

Daher ist für  $t_k \nearrow T$  die Folge  $x(t_k)$  eine Cauchy-Folge in  $X$  und hat also einen Grenzwert  $x^*$ . Wegen Stetigkeit von  $f$  gilt  $f(x^*) = y(T)$ . Wir setzen  $x(T) := x^*$  und schließen  $T \in E$ .

2. Schritt: Eindeutigkeit des Urbildes. Wir nehmen an, dass  $f(x_1) = y_0 = f(x_2)$  gilt für zwei Punkte  $x_1 \neq x_2$ . Ohne Einschränkung sei  $y_0 = 0$ . Wir haben also einen Weg  $x : [0, 1] \rightarrow X$ ,  $t \mapsto tx_1 + (1-t)x_2$  und einen Weg im Bild  $y : [0, 1] \rightarrow Y$ ,  $t \mapsto f(x(t))$ . Der Urbildweg ist eine Strecke, der Bildweg ist ein geschlossener Weg. Dies werden wir zu einem Widerspruch führen.

Idee: Wir homotopieren den Bildweg  $y$  zum trivialen Weg. Dies definiert einen Weg im Raum der Wege. Der eine Endpunkt dieses Weges ist  $y$ , zu ihm kennen wir ein Urbild, nämlich  $x$ . Wenn wir zum trivialen Weg einen Urbildweg finden, wird das einen Widerspruch ergeben.

Wir definieren Räume von Wegen in  $X$  und  $Y$ ,

$$\begin{aligned} Z_X &:= \{u \in C^0([0, 1], X) \mid u(0) = u(1) = 0\}, \\ Z_Y &:= \{w \in C^0([0, 1], Y) \mid w(0) = w(1) = 0\}. \end{aligned}$$

Wir fordern also jeweils triviale Randbedingungen. Zu dem uns gegebenen Weg  $x$  können wir nun eine Abbildung  $F$  konstruieren:

$$F : Z_X \rightarrow Z_Y, \quad F(u)(t) = f(u(t) + x(t)).$$

Wir homotopieren nun  $y : [0, 1] \rightarrow Y$  zum trivialen Weg mittels  $\tilde{y}(t; \lambda) := \lambda y(t)$ . Dies ist ein Weg im Raum  $Z_Y$ , der  $y$  mit der 0 verbindet. Wir wollen Schritt 1 für die Abbildung  $F$  verwenden, um einen Urbildweg zu finden. Dazu berechnen wir

$$DF(u) : Z_X \rightarrow Z_Y, \quad v(\cdot) \mapsto Df(u(\cdot) + x(\cdot))v(\cdot),$$

also auch

$$(DF(u)^{-1}w)(t) = Df(u(t) + x(t))^{-1}w(t) \quad \forall t.$$

Dies impliziert

$$\|DF(u)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Z_Y, Z_X)} \leq \alpha\|u\|_0 + \beta'.$$

Schritt 1 impliziert für  $F$ , dass es einen Urbildweg zu  $\tilde{y}$  gibt:

$$\begin{aligned} \tilde{u} : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow X, \quad (t, \lambda) \mapsto \tilde{u}(t; \lambda) \\ \text{mit } F(\tilde{u}(t; \lambda)) &= \tilde{y}(t; \lambda) \quad \forall t, \lambda. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Eigenschaften des Weges für  $\lambda = 0$ , also  $t \mapsto \tilde{u}(t; 0) + x(t)$ . Dieser Weg verbindet  $x_1$  mit  $x_2$ , aber jeder Punkt des Weges wird von  $f$  auf die Null abgebildet. Dies ist im Widerspruch zur Invertierbarkeit von  $f$  in einer Umgebung von  $x_1$ .  $\square$

## 7.3. Anwendung auf Differenzialgleichungen: Stetige Abhängigkeit

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Abhängigkeit von Lösungen von gewöhnlichen Differenzialgleichungen von Ihren Daten. Dabei sehen wir, wie der Satz über implizite Funktionen auf Differenzialgleichungen angewendet werden kann.

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}u(t) &= f(t, u(t), \lambda) \\ u(\sigma) &= \xi \end{aligned} \right\} (*)$$

für  $\xi \in X$ ,  $\sigma \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \in \Lambda$ .

*Fragen:* Existiert eine Lösung? Wie hängt  $u(t)$  von den Daten  $(\sigma, \xi, \lambda)$  ab?

**Satz 7.4** (Existenz und stetige Abhängigkeit von Daten). *Seien  $X$  und  $\Lambda$  Banachräume und  $(\sigma_0, \xi_0, \lambda_0) \in \mathbb{R} \times X \times \Lambda$  ein Punkt. Sei  $f : \mathbb{R} \times X \times \Lambda \rightarrow X$  stetig,  $D_x f$  existiere und sei stetig in einer Umgebung von  $(\sigma_0, \xi_0, \lambda_0)$ . Dann existiert  $T > 0$  und eine Umgebung  $U$  von  $(\sigma_0, \xi_0, \lambda_0)$ , so dass für alle  $(\sigma, \xi, \lambda) \in U$  eine Lösung  $u(\cdot; \sigma, \xi, \lambda)$  von  $(*)$  auf  $(\sigma - T, \sigma + T)$  existiert. Falls  $f \in C^k$  mit  $k \geq 0$ , so gilt (nach eventueller Verkleinerung von  $T$  und der Umgebung  $U$ ), dass auch*

$$u \in C^k((\sigma_0 - T, \sigma_0 + T) \times U, X).$$

*Beweis.* Wir betrachten ein kleines Existenzintervall; für kleines  $T > 0$  betrachten wir  $t$  mit  $|t - \sigma| \leq T$ . Wir normalisieren die Zeit und die Lösung durch die Umparametrisierung

$$t = \sigma + \tau T, \quad u(t) = \xi + \Phi\left(\frac{t - \sigma}{T}\right).$$

Dann lautet die Gleichung für  $\Phi(\tau)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\Phi(\tau) &= Tf(\sigma + T\tau, \xi + \Phi(\tau), \lambda) \\ \Phi(0) &= 0 \end{aligned} \right\} (*')$$

Wir definieren die Räume

$$\begin{aligned} Y &:= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times X \times \Lambda, \quad (T, \sigma, \xi, \lambda) \in Y, \\ A &:= \{\Phi \in C^1([-1, 1], X) \mid \Phi(0) = 0\}, \\ B &:= C^0([-1, 1], X), \end{aligned}$$

und die Abbildung (lokal definiert)

$$\begin{aligned} F &: A \times Y \rightarrow Z \\ (\Phi, (T, \sigma, \xi, \lambda)) &\mapsto \partial_\tau \Phi(\cdot) - Tf(\sigma + T\cdot, \xi + \Phi(\cdot), \lambda). \end{aligned}$$

Wir wollen  $F(\Phi, (T, \sigma, \xi, \lambda)) = 0$  nach  $\Phi$  auflösen. Wir berechnen

$$D_\Phi F(0, (0, \sigma_0, \xi_0, \lambda_0)) : A \rightarrow B, \quad \varphi \mapsto \partial_\tau \varphi,$$

wobei wir benutzt haben, dass  $T = 0$  im fraglichen Punkt. Daher ist  $D_\Phi F(0, (0, \sigma_0, \xi_0, \lambda_0)) : A \rightarrow B$  ein Isomorphismus. Mit dem Satz über implizite Funktionen können wir nach  $\Phi$  auflösen. Wir benutzen die Stetigkeit von  $D_\Phi F$ , die aus der Stetigkeit von  $D_x f$  folgt. Die Lösung  $\Phi$  erbt die Differenzierbarkeitseigenschaften von  $F$ , also die von  $f$ . Die Lösung  $u(t, \sigma, \xi, \lambda)$  hat die Differenzierbarkeitseigenschaften von  $\Phi$ .  $\square$

Die differenzierbare Abhängigkeit von Parametern ist global interessant. Der obige Satz impliziert auch die folgende Aussage:

Sei  $u : [0, T] \rightarrow X$  eine Lösung von (\*) zu den Daten  $(\sigma, \xi, \lambda)$ . Falls  $f$  von der Klasse  $C^k$  ist, so ist die Abhängigkeit von  $u(t)$  von den Daten  $(\sigma, \xi, \lambda)$  auch  $C^k$ .

Zum Beweis überdeckt man den Weg  $u([0, T])$  mit endlich vielen Kugeln, in denen der obige Satz gilt. Dann ist die Abbildung  $(\sigma, \xi, \lambda) \mapsto u(t)$  eine Verkettung von endlich vielen  $C^k$ -Abbildungen und also auch  $C^k$ .

## 7.4. Lagrange-Multiplikatoren

In der Ableitung der Euler Gleichungen für ein Extremalproblem mussten wir einen Weg definieren, der mit vorgegebener Geschwindigkeit  $v$  durch den kritischen Punkt  $u$  läuft. Falls die Vergleichsmenge ein linearer Raum ist, so kann man den Weg  $\varepsilon \mapsto u + \varepsilon v$  wählen. Ist die Vergleichsmenge allerdings eine Mannigfaltigkeit, so muss man geeignete Wege erst finden. Dies geschieht mit dem Satz über implizite Funktionen.

**Satz 7.5.** *Seien  $X, Y$  Hilberträume,  $M \subset X$  offen. Ein Energiefunktional sei durch  $E : M \rightarrow \mathbb{R}$ , eine Nebenbedingung durch  $\Phi : M \rightarrow Y$  gegeben, beide stetig differenzierbar. Wir betrachten ein Extremum  $u$  der Energie  $E$  in der Vergleichsmenge  $M_0 := \{x \in M \mid \Phi(x) = 0\}$ .*

*Falls  $D\Phi(u) : X \rightarrow Y$  surjektiv ist, so existiert  $\lambda \in Y$  mit*

$$DE(u)v = \langle \lambda, D\Phi(u)v \rangle \quad \forall v \in X. \quad (7.1)$$

Im Beweis werden wir folgende Aussagen aus der linearen Funktionalanalysis verwenden:

1. Riesz-Darstellung. Im Hilbertraum  $H$  gilt: Jedes Funktional  $f \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$  läßt sich mit einem  $\lambda \in H$  darstellen:  $f(h) = \langle \lambda, h \rangle$  für alle  $h \in H$ .
2. Zerlegung. Sei  $H_0 \subset H$  abgeschlossener Unterraum in einem Hilbertraum  $H$ . Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum  $H_1$  mit  $H = H_0 \oplus H_1$  (sogar orthogonale Zerlegung möglich).
3. Satz von der Inversen: Für Banachräume  $X, Y$  gilt: Falls  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  bijektiv ist, so existiert  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ .

*Beweis.* Wir betrachten den Tangentialraum an  $M_0$ ,  $X_0 := \ker(D\Phi(u)) \subset X$  und zerlegen  $X$  als  $X = X_0 \oplus X_1$ . Die Abbildung  $A := D\Phi(u)|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y$  ist bijektiv, es existiert also  $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X_1)$ .

Die Abbildung  $f := DE(u) \circ A^{-1} : Y \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig und kann dargestellt werden mit  $\lambda \in Y$  als  $f(y) = \langle \lambda, y \rangle$ . Wir verwenden dies für  $y = Ax_1$ , also gilt

$$DE(u)x_1 = \langle \lambda, Ax_1 \rangle \quad \forall x_1 \in X_1.$$

Damit ist die Aussage für alle 'Normalenrichtungen' gezeigt.

Für alle 'Tangentialrichtungen'  $x_0 \in X_0$  gilt nach Definition von  $X_0$  dass  $\langle \lambda, D\Phi(u)x_0 \rangle = 0$ . Es bleibt zu zeigen, dass  $DE(u)x_0 = 0$ . Dafür müssen wir einen Weg  $\gamma : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow M_0$  finden mit  $\gamma(0) = u$  und  $\gamma'(0) = x_0$ . Sobald dieses  $\gamma$  gefunden ist, gilt wegen Extremalität von  $E$

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} E(\gamma(\varepsilon))|_0 = DE(u)x_0,$$

und also die Behauptung.

Den Weg finden wir mit dem Satz über implizite Funktionen. Die Gleichung

$$\Psi(x_0, x_1) := \Phi(u + x_0 + x_1)$$

läßt sich wegen Invertierbarkeit von  $D_{x_1}\Psi(0) = D\Phi(u)|_{X_1} = A$  lokal lösen durch  $x_1 = x_1(x_0)$ . Wir definieren für festes  $x_0 \in X_0$  den Weg als  $\gamma(\varepsilon) := (u + \varepsilon x_0 + x_1(\varepsilon x_0))$ . Die Formel für die Ableitung liefert  $Dx_1(0) = -A^{-1}D\Phi(u)|_{X_0} = 0$ , also auch  $\gamma'(0) = x_0$ .  $\square$

Um die Aussage zu illustrieren, betrachten wir *das* Standardbeispiel.

**Beispiel 7.6.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und glatt und der Banachraum sei  $X = \{u \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) | u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ . Wir betrachten die Energie  $E : X \rightarrow \mathbb{R}$  und die Nebenbedingung  $\Phi : X \rightarrow Y := \mathbb{R}$ ,

$$E(u) := \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\nabla u|^2, \quad \Phi(u) := -1 + \int_{\Omega} |u|^2.$$

Ein Minimum von  $E$  unter der Nebenbedingung  $\Phi = 0$  erfüllt notwendigerweise für ein  $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} DE(u)v &= \lambda D\Phi(u)v \forall v \in X \\ \Rightarrow \int_{\Omega} (-\Delta u)v &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v = \lambda \int_{\Omega} uv \forall v \in X \\ \Rightarrow -\Delta u &= \lambda u. \end{aligned}$$

Für eine nichtlineare Euler-Lagrange Gleichung siehe Übung.

# 8. Fredholmoperatoren

## 8.1. Definition, Stabilität

Fredholmoperatoren sind in gewisser Weise das Gegenstück zu kompakten Operatoren. Während die kompakten Operatoren bis auf endlich viele Komponenten nahe der Null sind, sind die Fredholmoperatoren im Wesentlichen nahe der Identität. Wir betrachten Fredholmoperatoren in zweierlei Kontext. Zum einen konstruieren wir den Abbildungsgrad für nichtlineare Operatoren der Form Identität + kompakt — und dies sind im linearen Fall gerade die Fredholmoperatoren. Zum anderen werden wir in der Verzweigungstheorie annehmen, dass die Ableitung einer nichtlinearen Abbildung ein Fredholmoperator ist. Wenn dies der Fall ist, dann gibt es, grob gesprochen, endlich viele Dimensionen, in denen etwas Interessantes passieren kann (nicht-injektive und nicht-surjektive Anteile), auf dem Rest ist der Operator invertierbar.

Der Begriff 'Fredholm-Operator' wird im Folgenden nur für lineare Operatoren verwendet. Wir bezeichnen mit  $\ker(L)$  den Kern  $\ker(L) = \{x \in X \mid Lx = 0\}$ , und mit  $R(L) = L(X) = \{Lx \mid x \in X\}$  das Bild eines Operators  $L : X \rightarrow Y$ . Wieder ist  $\mathcal{L}(X, Y)$  der Raum der stetigen linearen Abbildungen.

**Definition 8.1.** *Ein Operator  $L \in \mathcal{L}(X, Y)$  heißt Fredholm-Operator, falls*

1.  $R(L)$  abgeschlossen,
2.  $\dim \ker(L) < \infty$  und  $\operatorname{codim} R(L) < \infty$ .

*Die zweite Bedingung heißt, dass es eine Zerlegung  $Y = Y_0 \oplus R(L)$  gibt mit endlichdimensionalem  $Y_0$ . Die Codimension  $\operatorname{codim} R(L)$  ist die minimale Dimension von  $Y_0$ . Die ganze Zahl  $\dim \ker(L) - \operatorname{codim} R(L)$  heißt der Index des Fredholmoperators.*

Für eine einheitliche Notation: In dieser Vorlesung werden wir immer so zerlegen:  $X = X_0 \oplus X_1$ , wobei  $X_0 = \ker(L)$  endlichdimensional, und  $Y = Y_0 \oplus Y_1$ , wobei  $Y_1 = R(L)$  und  $Y_0$  endlichdimensional.

Um die Definition zu verstehen, erinnern wir (sh. z.B. [1]) an den Satz vom abgeschlossenen Komplement.

*Satz vom abgeschlossenen Komplement.* Sei  $X$  ein Banachraum,  $Y \subset X$  ein abgeschlossener Unterraum, und  $Z \subset X$  ein Unterraum mit  $X = Y \oplus Z$ . Dann sind äquivalent:

- (a) Es gibt eine stetige Projektion  $P \in \mathcal{L}(X)$  mit  $R(P) = Y$  und  $\ker(P) = Z$ .
- (b)  $Z$  ist abgeschlossen.

Dieser Satz hat die eine einfache Richtung (a) $\Rightarrow$ (b): Falls  $P$  stetig ist, so ist  $Z = P^{-1}(\{0\})$  als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen.

Da mit einer Projektion  $P$  wie in (a) auch die Projektion  $Q = \text{id} - P$  stetig ist, ist auch  $Y = \ker Q$  abgeschlossen. Wir sehen, dass der Satz so gelesen werden kann: "Ist  $Y \subset X$  ein abgeschlossener Unterraum, so hat  $Y$  ein abgeschlossenes Komplement  $X$ ."

**Bemerkungen zu Definition 8.1:** (i) Sei  $X$  Banachraum und  $X_0$  ein endlichdimensionaler Teilraum. Dann gibt es eine stetige Projektion auf  $X_0$ . Insbesondere hat  $X_0$  ein abgeschlossenes Komplement.

Beweis von (i): Sei  $X_0 = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$  und  $\lambda_k : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$  die linearen Funktionale mit  $\lambda_k(e_l) = \delta_{kl}$ . Setze mit Hahn-Banach  $\lambda_k$  fort zu stetigen linearen Funktionalen auf  $X$ . Dann ist durch

$$Px := \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) e_k$$

eine stetige lineare Projektion von  $X$  auf  $X_0$  definiert.

Insbesondere können wir in der Zerlegung der Räume immer  $X_1$  abgeschlossen wählen.

(ii) Für einen Fredholmoperator  $L$  sei  $X = X_0 \oplus X_1$  eine Zerlegung von  $X$  mit  $X_0 = \ker(L)$  und  $X_1$  abgeschlossen. Dann ist der Operator  $L_1 := L|_{X_1} : X_1 \rightarrow R(L)$  stetig invertierbar. Dies folgt wegen der Abgeschlossenheit der Räume aus dem Satz über die inverse Abbildung.

(iii) Eigenschaft (1) des Fredholmoperators folgt aus Eigenschaft (2).

Beweis von (iii): Sei  $X = X_0 \oplus X_1$  mit  $X_0 = \ker L$  und  $X_1$  abgeschlossen. Dann ist  $L_1 : X_1 \rightarrow R(L)$  stetig invertierbar nach (ii). Der erweiterte Operator  $\tilde{L} : X_1 \times Y_0 \rightarrow Y$ ,  $(x_1, y_0) \mapsto L_1 x_1 + y_0$  ist wieder bijektiv, linear und stetig zwischen Banachräumen, insbesondere hat  $\tilde{L}$  eine stetige Inverse  $B := \tilde{L}^{-1}$ . Also ist

$$R(L) = L(X_1) = \tilde{L}(X_1 \times \{0\}) = B^{-1}(X_1 \times \{0\})$$

abgeschlossen.

Der Zusammenhang zu kompakten Operatoren ist wie folgt.

**Satz 8.2.** Falls  $K \in \mathcal{L}(X, X)$  kompakt, so ist  $L := \text{id} + K$  Fredholmoperator mit Index 0.

*Beweis.* Siehe Alt [1], Nr. 8.15. □

Es gilt auch die Umkehrung:

**Lemma 8.3.** Sei  $L : X \rightarrow Y$  Fredholmoperator mit Index 0. Dann existiert ein Banachraumisomorphismus  $I : Y \rightarrow X$ , so dass  $I \circ L$  von der Form  $I \circ L := \text{id} + K$  ist mit  $K \in \mathcal{L}(X)$  kompakt. Man kann sogar erreichen, dass  $K$  endlichdimensional ist.

*Beweis.* Wir verwenden wieder  $\tilde{L} : Y_0 \times X_1 \rightarrow Y$ ,  $(y_0, x_1) \mapsto Lx_1 + y_0$  mit der stetigen Inversen  $B := \tilde{L}^{-1}$ . Der Operator  $B \circ L : X \rightarrow Y_0 \times X_1$  ist die Identität auf dem Anteil  $X_1$ , also überall bis auf den endlichdimensionalen Teilraum  $X_0$ . Die endlichdimensionalen Teilräume  $X_0$  und  $Y_0$  haben dieselbe Dimension und sind daher isomorph. Daher kann  $B$  auf  $X_0$  modifiziert werden zu einem Banachraumisomorphismus  $I : Y \rightarrow X_0 \times X_1$ . Dieser erfüllt das Gewünschte.  $\square$

Nach diesen Vorüberlegungen ist das nachfolgende Lemma keine Überraschung.

**Lemma 8.4** (Fredholm + kompakt ist Fredholm). *Sei  $L : X \rightarrow Y$  ein Fredholm-Operator und*

$$K : X \rightarrow Y \text{ kompakt.}$$

*Beide linear und stetig. Dann ist der Operator*

$$L + K : X \rightarrow Y$$

*ein Fredholm-Operator mit demselben Index wie  $L$ .*

*Beweis.* Durch 'triviales' Hinzufügen einer endlichdimensionalen Komponente zu einem der Banachräume  $X$  oder  $Y$  erreichen wir, dass  $L$  den Index 0 hat. Wir müssen zeigen, dass der Operator  $L + K$  wieder Fredholm ist und wieder den Index 0 hat. Durch einen Isomorphismus  $I : Y \rightarrow X$  erreichen wir nach Lemma 8.3 die Situation  $I \circ L = \text{id} + K_1$  mit  $K_1 : X \rightarrow X$  kompakt. Der Operator  $I \circ K$  ist als Verkettung stetig mit kompakt wieder kompakt, nach Satz 8.2 gilt also, dass  $I \circ (L + K) = \text{id} + K_1 + I \circ K$  wieder Fredholm mit Index 0 ist. Der Isomorphismus  $I$  ändert diese Eigenschaften nicht, wir erhalten also das Ergebnis für  $L + K$ .  $\square$

Für spätere Anwendungen notieren wir noch das nachfolgende berühmte Corollar zu Satz 8.2.

**Corollar 8.5** (Fredholm-Alternative). *Sei  $\lambda \neq 0$  und  $K \in \mathcal{L}(X, X)$  kompakt. Dann gilt:*

*Entweder hat  $(\lambda - K)x = 0$  eine nichttriviale Lösung oder  $(\lambda - K)$  ist invertierbar.*

*Beweis.* Betrachte  $L = \lambda - K$ . Nach Satz 8.2 ist  $L$  ein Fredholm-Operator mit Index 0. Falls  $\ker(L) = \{0\}$ , so gilt  $R(L) = X$  nach der Definition des Index von Fredholm-Operatoren.  $\square$

## 8.2. Ljapunov-Schmidt Reduktion

Unser Ziel ist die Reduktion eines unendlichdimensionalen Gleichungssystems auf ein endlichdimensionales System. Wir wollen dafür auf die "wesentlichen Koordinaten projizieren".

Wir betrachten die Gleichung

$$M(x, \lambda) = 0 \quad \text{für } M : X \times \Lambda \rightarrow Y,$$

dabei seien  $X$ ,  $\Lambda$  und  $Y$  Banachräume. Im Folgenden seien  $M$  und  $D_x M$  immer stetig. Eine triviale Lösung sei gegeben, ohne Einschränkung nehmen wir an, dass  $M(0, 0) = 0$ .

Wäre  $D_x M$  invertierbar, so könnten wir mit dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung  $M(x, \lambda) = 0$  nach  $x$  mit  $x = x(\lambda)$  auflösen. Häufig hat man jedoch keine Invertierbarkeit. Dann kann man immer noch hoffen, dass man bis auf wenige Koordinaten auflösen kann.

*Voraussetzung im Folgenden:* Der Operator  $L := D_x M(0, 0) : X \rightarrow Y$  ist ein Fredholm Operator.

Wie zuvor können wir dann die Räume zerlegen in  $X = X_0 \oplus X_1 = \ker L \oplus X_1$  mit Projektion  $P : X \rightarrow X$  auf  $X_0$  mit  $\ker P = X_1$ . Ebenso  $Y = Y_0 \oplus Y_1 = Y_0 \oplus R(L)$  mit Projektion  $Q : Y \rightarrow Y$  auf  $Y_0$  mit  $\ker Q = Y_1$ . Wir bleiben bei unserer Konvention, dass die Räume  $X_0$  und  $Y_0$  die endlichdimensionalen Unterräume sind.

Die Gleichung  $M(x, \lambda) = 0$  ist äquivalent zu den zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} QM(x, \lambda) &= 0, \\ (1 - Q)M(x, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben diese Gleichungen mit Hilfe der Zerlegung des Raumes  $X$  mit der Variablen  $x = x_0 + x_1$ ,

$$\begin{aligned} QM(x_0 + x_1, \lambda) &= 0, \\ (1 - Q)M(x_0 + x_1, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

In dieser Formulierung lösen wir die zweite Gleichung nach den (unendlich vielen) Koordinaten  $x_1$  auf. Tatsächlich erfüllt die Ableitung

$$D_{x_1}[(1 - Q)M(x_0 + x_1, \lambda)]|_{(0,0)} = (1 - Q)L|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y_1,$$

ist also invertierbar. Mit dem Satz über implizite Funktionen finden wir eine Lösungsfunktion  $x_1 = v(x_0, \lambda)$ . Damit haben wir das System reduziert auf die erste Gleichung,

$$\Phi(x_0, \lambda) := QM(x_0 + v(x_0, \lambda), \lambda) = 0. \quad (8.1)$$

Die Unbekannte  $x_0$  ist im endlichdimensionalen Raum  $X_0$  und die Gleichheit ist eine Gleichheit im endlichdimensionalen Raum  $Y_0$ . Die Gleichung heißt die reduzierte Gleichung oder auch Verzweigungsgleichung.

Wir fassen die Ergebnisse in einem Satz zusammen.

**Satz 8.6** (Ljapunov-Schmidt Reduktion). *Sei  $M : X \times \Lambda \rightarrow Y$  stetig mit trivialer Lösung  $M(0, 0) = 0$ , die Ableitung  $D_x M$  existiere und sei stetig in einer Umgebung der 0, die Ableitung im Ursprung  $L := D_x M(0, 0)$  sei ein Fredholm Operator. Wir verwenden die Zerlegungen und Projektionen*

$$\begin{aligned} X &= X_0 \oplus X_1 = \ker L \oplus X_1, \quad P : X \rightarrow X \text{ Projektion auf } X_0, \quad \ker P = X_1, \\ Y &= Y_0 \oplus Y_1 = Y_0 \oplus R(L), \quad Q : Y \rightarrow Y \text{ Projektion auf } Y_0, \quad \ker Q = Y_1. \end{aligned}$$

Dann gilt für Umgebungen der 0,  $U \subset X_0 = \ker(L)$ ,  $V \subset X_1$ ,  $W \subset \Lambda$ : Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion  $v : U \times W \rightarrow V$ , so dass lokal die Gleichung  $(1 - Q)M(x_0 + x_1, \lambda) = 0$  eindeutig durch  $x_1 = v(x_0, \lambda)$  gelöst wird,  $v$  ist stetig.

Die Gleichung  $M(x_0 + x_1, \lambda) = 0$  ist lokal äquivalent zur reduzierten Gleichung für  $x_0 \in X_0$ ,

$$\Phi(x_0, \lambda) := QM(x_0 + v(x_0, \lambda), \lambda) = 0 \in Y_0.$$

Falls  $M \in C^1$ , so sind  $v$  und  $\Phi$  in  $C^1$  und es gilt

$$D_{x_0}v(0, 0) = 0, \quad D_{x_0}\Phi(0) = 0.$$

Der Satz wurde bereits hergeleitet. Für die Ableitungsformeln rechnen wir im Nullpunkt

$$D_{x_0}v = -[D_{x_1}((1 - Q)M)]^{-1} \circ D_{x_0}((1 - Q)M) = 0,$$

da  $D_{x_0}((1 - Q)M) = (1 - Q)L|_{X_0} = 0$ . Ähnlich folgt aus  $\ker Q = R(L)$

$$D_{x_0}\Phi(0) = Q \circ L \circ (\text{id} + D_{x_0}v) = 0.$$

**Part III.**  
**Verzweigungstheorie**

## 9. Lokale Verzweigung

Wir wollen die Lösungsmenge der Gleichung

$$f(x, \lambda) = 0$$

studieren. Dabei betrachten wir  $\lambda$  als einen Parameter, der in einem physikalischen System zum Beispiel die Temperatur, der Druck oder eine Viskosität sein könnte. Er ist uns im Prinzip vorgegeben. Wir können ihn allerdings auch als Variable ansehen und uns fragen: Wenn wir die Eigenschaften des Systems für den Parameterwert  $\lambda = \lambda_0 - \varepsilon$  kennen, was wissen wir dann über die Eigenschaften des Systems für den Parameterwert  $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ ?

Statt abstrakt von 'Eigenschaften' zu sprechen, wollen wir nun die Anzahl der Nullstellen untersuchen, fragen also nach der Anzahl der Lösungen der Gleichung  $f(., \lambda) = 0$  für verschiedene Werte von  $\lambda$ .

Schon mit  $\Lambda = \mathbb{R}$  und  $X = \mathbb{R}$  sieht man: Alles ist möglich!

1.  $f(x, \lambda) := x - \lambda$  (Nullstelle läßt sich verfolgen)
2.  $f(x, \lambda) := (x^2 - \lambda)$  (zwei Nullstellen tauchen auf)
3.  $f(x, \lambda) := x \cdot (x - \lambda)$  (Variante von 1 mit Verzweigung)
4.  $f(x, \lambda) := x \cdot (x^2 - \lambda)$  (Variante von 2, zusätzliche Nullstellen)
5.  $f(x, \lambda) := x \cdot (x^2 - \lambda) \cdot (x^4 - \lambda)$  (Pitchfork, Mistgabel)

Wir beobachten: Außer in der ersten Gleichung geschieht eine *Verzweigung*. Im Verzweigungspunkt  $(x, \lambda) = (0, 0)$  gilt: Neue Lösungen tauchen auf oder Lösungen verschwinden oder Lösungsäste treffen sich.

In der ersten Gleichung ist man in der einfachen Situation, dass man lokal nach  $x$  auflösen kann:

$$\begin{aligned} \exists \Lambda \subset \mathbb{R} \text{ offen, } 0 \in \Lambda, \quad g : \Lambda \rightarrow X \text{ stetig:} \\ \text{Für jedes } \lambda \in \Lambda \text{ hat } f(x, \lambda) = 0 \text{ die eindeutige Lösung } x = g(\lambda). \end{aligned} \tag{9.1}$$

Die physikalische Interpretation ist, dass eine Änderung des Parameters (z.B. Temperatur) zwar den Zustand des System ändert, aber diese Änderung ist stetig, die Lösung lässt sich in Abhängigkeit von  $\lambda$  angeben. Die Lösung hängt in vorhersehbarer Art und umkehrbar vom Parameter ab. *Die Verzweigungstheorie beschäftigt sich mit Situationen, in denen (9.1) nicht gilt.*

**Satz 9.1** (Notwendige Bedingung für Verzweigung). *Seien  $X, \Lambda, Y$  Banachräume,  $f : X \times \Lambda \rightarrow Y$  sei  $C^1$  mit  $f(x_0, \lambda_0) = 0$  und*

$$D_x f(x_0, \lambda_0) : X \rightarrow Y \quad \text{ein Isomorphismus.}$$

*In dieser Situation kann man lokal die Gleichung  $f(x, \lambda) = 0$  eindeutig mit einer Funktion  $x = g(\lambda)$  lösen. Der Punkt  $(x_0, \lambda_0)$  ist also kein Verzweigungspunkt.*

*Beweis.* Dies ist wörtlich eine der Aussagen des Satzes über implizite Funktionen.  $\square$

Wir werden im Folgenden immer davon ausgehen, dass wir die sogenannte 'triviale Lösung' kennen, also  $(x_0, \lambda_0)$  mit  $f(x_0, \lambda_0) = 0$ . Dann gilt:

*Bemerkung 1:* Die Probleme beim Auflösen durch  $x = x(\lambda)$  treten auf, obwohl  $f$  glatt ist. Die Probleme haben nichts mit einer mangelnden Regularität von  $f$  zu tun. Zusätzlich gilt: Das Problem ist nicht durch eine Drehung des  $(x, \lambda)$ -Koordinatensystems behebbar.

*Bemerkung 2:* Für alle Punkte  $(x, \lambda) \neq (x_0, \lambda_0)$  gilt: Lokal kann man durch  $x = x(\lambda)$  auflösen (eventuell nach einer Drehung im  $(x, \lambda)$ -Koordinatensystem). Die Verzweigung im Punkt  $(x_0, \lambda_0)$  ist insofern isoliert, die Zweige, die aus dem Punkt hinauslaufen, verzweigen jedenfalls nicht sofort wieder.

*Bemerkung 3:* Unsere notwendige Bedingung nimmt im Fall  $\Lambda = \mathbb{R}$  und  $X = \mathbb{R}$  und  $f \in C^1$  mit  $f(x_0, \lambda_0) = 0$  eine einfache Form an: Man kann immer lokal auflösen, falls

$$D_x f(x_0, \lambda_0) \neq 0.$$

Falls diese Bedingung nicht gilt, so kann eine Verzweigung vorliegen. Wie diese aussieht, darüber entscheiden zweite oder höhere Ableitungen von  $f$ .

## 9.1. Ein topologisches Kriterium für eine Verzweigung

Wir betrachten den Fall, dass ein Ast trivialer Lösungen gegeben ist, also den Fall  $f(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda$ .

**Satz 9.2** (Hinreichende Bedingung für Verzweigung aus dem trivialen Ast). *Sei  $X$  ein endlichdimensionaler Banachraum und  $\Lambda = \mathbb{R}$ ,  $f : X \times \Lambda \rightarrow X$  stetig differenzierbar mit  $f(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda$ , und  $D_x f(0, \lambda)$  invertierbar für  $\lambda \neq \lambda_0$ . Falls*

$$\begin{aligned} \text{Index}(f(\cdot, \lambda), 0) &= \sigma \in \{\pm 1\} & \forall \lambda > \lambda_0, \\ \text{Index}(f(\cdot, \lambda), 0) &= -\sigma & \forall \lambda < \lambda_0, \end{aligned}$$

*so ist  $\lambda_0$  Verzweigungspunkt in dem Sinne, dass für ein  $\varepsilon_0 > 0$  gilt*

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon) : f(x(\varepsilon), \lambda(\varepsilon)) = 0, \|x(\varepsilon)\| = \varepsilon. \quad (9.2)$$

*Für jede Wahl von  $\lambda = \lambda(\varepsilon)$  gilt, dass  $\lambda(\varepsilon) \rightarrow \lambda_0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

*Beweis.* Wir wählen eine Folge  $\mu_k \searrow 0$  und betrachten die Parameterwerte  $\lambda_k^\pm := \lambda_0 \pm \mu_k$ . Für jedes  $k$  gibt es einen Radius  $\varepsilon_k > 0$ , so dass die Abbildungsgrade  $d(f(\cdot, \lambda_k^\pm), B_\varepsilon(0), 0)$  unabhängig von  $\varepsilon < \varepsilon_k$  mit dem Index übereinstimmen. Insbesondere gilt für alle  $\varepsilon < \varepsilon_k$

$$d(f(\cdot, \lambda_k^+), B_\varepsilon(0), 0) \neq d(f(\cdot, \lambda_k^-), B_\varepsilon(0), 0).$$

Wir können  $\varepsilon_k$  monoton fallend wählen;  $\varepsilon_0$  ist das  $\varepsilon_0$  aus der Behauptung. Sei nun  $\varepsilon < \varepsilon_0$  beliebig. Wir wählen ein beliebiges  $k$  mit  $\varepsilon < \varepsilon_k$ . Für die Homotopie  $f(\cdot, \lambda)$  mit  $\lambda \in [\lambda_k^-, \lambda_k^+]$  ist der Abbildungsgrad in den Endpunkten verschieden, die Homotopie kann also nicht zulässig sein. Wir folgern

$$\exists x \in \partial B_\varepsilon(0), \lambda \in [\lambda_k^-, \lambda_k^+] : f(x, \lambda) = 0.$$

Dies liefert die Behauptung (9.2).

Wir wollen zeigen, dass  $\lambda(\varepsilon) \rightarrow \lambda_0$  für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt. Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir an, dass, entlang einer Teilfolge  $\lambda(\varepsilon_k) \rightarrow \lambda'_0 \neq \lambda_0$  gilt. In einer Umgebung von  $\lambda'_0$  kann aber mit Satz 9.1 lokal aufgelöst werden, es gibt also keine nichttrivialen Nullstellen in der Umgebung. Ein Widerspruch.  $\square$

## 9.2. Der Satz von Krasnoselskii

*Ziel:* Wir wollen (wie in Satz 9.2) eine hinreichende Bedingung für eine Verzweigung finden. Der Beweis basiert wieder auf topologischen Argumenten und dem Abbildungsgrad. Wir werden Satz 9.2 nicht verwenden, aber ähnlich argumentieren.

Sei  $X$  ein Banachraum und  $f : X \times \mathbb{R} \rightarrow X$  von der Form

$$f(x, \lambda) = x - (\mu_0 + \lambda)Tx + g(x, \lambda).$$

Wir machen folgende Annahmen:

1.  $\mu_0 \neq 0$ ,
2.  $T : X \rightarrow X$  ist linear und kompakt,
3.  $g$  ist eine nichtlineare, kompakte Abbildung  $X \times \mathbb{R} \rightarrow X$ ,
4.  $g(0, \lambda) = 0$  für alle  $\lambda$  und  $g(x, \lambda) = o(\|x\|)$  gleichmäßig in  $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

*Bemerkung:* Bedingungen 2.-4. sind erfüllt, falls  $f(x, \lambda) = \text{id} - (\mu_0 + \lambda)\tilde{T}(x)$ , mit  $\tilde{T}$  nichtlinear, kompakt und  $C^1$ . Man wählt in diesem Fall  $T = D\tilde{T}$  und  $g(x, \lambda) = (\mu_0 + \lambda)(\tilde{T} - T)(x)$ . Lemma 4.7 liefert die Kompaktheit von  $T$  und  $g$ .

**Definition 9.3.** Falls ein trivialer Ast gegeben ist, d.h.  $f(0, \lambda) = 0 \forall \lambda$ , dann sagen wir:

$(0, \lambda_0)$  ist Verzweigungspunkt, falls in jeder Umgebung von  $(0, \lambda_0)$  nicht-triviale Lösungen von  $f = 0$  liegen.

*Bemerkung:* Falls  $f \in C^1$ , so ist nach Satz 9.1 die *notwendige* Bedingung für eine Verzweigung

$$D_x f(0, 0) = \text{id} - \mu_0 T \quad \text{nicht invertierbar.}$$

Äquivalent dazu ist:  $1/\mu_0$  ist ein Spektralwert von  $T$ . Wegen Kompaktheit von  $T$  ist äquivalent:  $1/\mu_0$  ist ein Eigenwert von  $T$ . Wir können mit den obigen Annahmen nicht mit dem Satz über implizite Funktionen argumentieren, denn wir haben  $g \in C^1$  nicht vorausgesetzt.

**Lemma 9.4.** *Die Situation sei wie oben beschrieben und  $\text{id} - \mu_0 T$  sei invertierbar. Dann ist  $\lambda = 0$  kein Verzweigungspunkt.*

*Beweis.* Eine Lösung  $(x, \lambda)$  erfüllt

$$0 = f(x, \lambda) = x - (\mu_0 + \lambda)Tx + g(x, \lambda),$$

also

$$x = (\text{id} - \mu_0 T)^{-1}[\lambda T x - g(x, \lambda)].$$

Durch Wahl einer kleinen Umgebung von  $(0, 0)$  erreichen wir, dass die rechte Seite beschränkt ist durch  $\frac{1}{2}\|x\|$ . In dieser Umgebung kann es also keine nichttriviale Lösung geben.  $\square$

**Satz 9.5** (Krasnoselskii). *Die Situation sei wie oben in 1.-4. beschrieben und  $1/\mu_0$  sei ein Eigenwert von  $T$  mit ungerader (algebraischer) Vielfachheit. Dann ist  $(0, 0)$  ein Verzweigungspunkt für  $f$ .*

*Beweis.* Annahme:  $(0, 0)$  ist kein Verzweigungspunkt. Dann sind für ein  $\varepsilon > 0$  und  $\lambda_- < 0 < \lambda_+$  in der Menge  $B_\varepsilon(0) \times [\lambda_-, \lambda_+]$  keine nichttrivialen Lösungen von  $f = 0$ . Daher ist der Index

$$d(f(\cdot, \lambda), B_\varepsilon, 0) \in \mathbb{Z}$$

für alle  $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$  wohldefiniert (denn es gibt keine Nullstellen am Rand). Wegen der Homotopieeigenschaft ist der Index unabhängig von  $\lambda$ . Dies wird zu einem Widerspruch führen.

Um im Folgenden den Index zu berechnen, betrachten wir in den beiden Punkten  $\lambda = \lambda_-$  und  $\lambda = \lambda_+$  die folgende Homotopie von der nichtlinearen Abbildung auf eine lineare Abbildung:

$$F(x, \lambda; t) := x - (\mu_0 + \lambda)Tx + \frac{1}{t}g(tx, \lambda).$$

Für  $t = 1$  gilt  $F(\cdot, 1) = f$ . Für  $t = 0$  setzen wir  $F(\cdot, 0) = \text{id} - (\mu_0 + \lambda)T$  deformiert. Die Homotopie ist stetig aufgrund der Kleinheitsbedingung an  $g$ . Weiterhin ist die Homotopie zulässig, da es sonst nichttriviale Lösungen von  $f = 0$  in der Kugel  $B_\varepsilon(0)$  gäbe, nämlich die Punkte  $tx$ . Die Homotopie liefert für den Abbildungsgrad von  $f$  die Formel

$$g(\lambda) := d(f(\cdot, \lambda), B_\varepsilon, 0) = d(\text{id} - (\mu_0 + \lambda)T, B_\varepsilon, 0).$$

Wenn der Abbildungsgrad in  $\lambda = \lambda_-$  und in  $\lambda = \lambda_+$  unterschiedlich ist, ist der gesuchte Widerspruch gefunden.

Der Abbildungsgrad einer linearen Abbildung der Form Identität plus Kompakt ist gegeben durch die Anzahl der negativen Eigenwerte. Formal verwenden wir den Satz von Leray-Schauder, Satz 5.6. Für  $\lambda \in [\lambda_-, \lambda_+]$  gilt

$$g(\lambda) = (-1)^{\beta(\lambda)}, \quad \beta(\lambda) = \sum_{\sigma > 1} n_\sigma((\mu_0 + \lambda)T).$$

Es gelten folgende elementare Äquivalenzen:

$$\begin{aligned} (\mu_0 + \lambda)Tx = \sigma x, \quad \sigma > 1 &\iff Tx = \frac{\sigma}{\mu_0 + \lambda}x, \quad \sigma > 1 \\ &\iff Tx = \bar{\sigma}x, \quad \bar{\sigma} > \frac{1}{\mu_0 + \lambda}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\beta(\lambda) = \sum_{\bar{\sigma} > (\mu_0 + \lambda)^{-1}} n_{\bar{\sigma}}(T).$$

Für  $\varepsilon > 0$  klein genug und  $-\varepsilon < \lambda_- < 0 < \lambda_+ < \varepsilon$  gilt dann

$$\beta(\lambda_+) - \beta(\lambda_-) = n_{1/\mu_0}(T) \in 2\mathbb{Z} + 1,$$

wobei die letztere Bedingung nach Voraussetzung gilt. Wir finden

$$g(\lambda_-) = (-1)^{\beta(\lambda_-)} = -(-1)^{\beta(\lambda_+)} = -g(\lambda_+),$$

der gesuchte Widerspruch. □

Wir wollen mit einem Beispiel zeigen, dass im Falle gerader Vielfachheit tatsächlich keine Verzweigung stattfinden muss.

*Beispiel 1: Gerade Vielfachheit.* Zu  $x = (x_1, x_2) \in X := \mathbb{R}^2$  betrachten wir

$$f(x, \lambda) := -\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2^3 \\ x_1^3 \end{pmatrix} = 0.$$

Dann gelten Annahmen 1-4 mit  $T = \text{id}$  und  $\mu_0 = 1$ . Dann ist  $\mu_0$  ein Eigenwert von  $T$  mit Vielfachheit 2.

Für jede Lösung  $(x, \lambda)$  gilt:

$$0 = f(x, \lambda) \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_2^4 + x_1^4,$$

also  $x = (x_1, x_2) = (0, 0)$ . Wir sehen, dass es nur die trivialen Lösungen gibt. Der Punkt  $\lambda = 0$  ist kein Verzweigungspunkt.

*Beispiel 2: T-Kreuzung.* Das zweite Beispiel illustriert den Unterschied in den Verzweigungsergebnissen 'Krasnoselskii' und 'im einfacher Eigenwert' (nächster Abschnitt). Im Satz von Krasnoselskii haben wir schwächere Voraussetzungen (keine Differenzierbarkeit und nur 'ungerade Vielfachheit'), aber auch eine schwächere Aussage (keinen transversal den trivialen Ast schneidenden nichttrivialen Ast). Das

vorliegende Beispiel zeigt, dass man im Allgemeinen auch keine wesentlich stärkere Aussage erwarten kann.

Zu  $x \in X := \mathbb{R}^3$  betrachten wir  $T = \text{id}$ ,  $\mu_0 = 1$  und

$$f(x, \lambda) := -\lambda x - v\left(\frac{x}{|x|}\right) e^{-|x|^{-2}} = 0,$$

wobei  $v : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $v(y) \perp y$  für alle  $y$ . Die Funktion  $v$  verschwinde nur am Nordpol  $(0, 0, 1)$ . Wenn  $(x, \lambda)$  eine nichttriviale Lösung ist, dann gilt wegen  $f = 0$

$$v\left(\frac{x}{|x|}\right) \in \mathbb{R} x.$$

Nach Wahl von  $v$  also  $x = (0, 0, x_3)$  mit  $x_3 > 0$ . Der verzweigende Ast endet also am trivialen Ast. Insbesondere hat er nicht die Form wie in Satz 9.6.

### 9.3. Lokale Verzweigung im einfachen Eigenwert

In diesem Abschnitt werden wir eine weitere hinreichende Bedingung für eine Verzweigung kennenlernen, die mit dem Satz über implizite Funktionen arbeitet. Da notwendigerweise im Verzweigungspunkt  $D_x f = 0$  gilt, werden wir etwas über zweite Ableitungen voraussetzen.

Erinnerung an Bezeichnungen: Für  $f : X \times Y \rightarrow Z$  gilt  $D_x f(x, y) : X \rightarrow Z$ , wir schreiben  $D_x f(x, y) \langle \bar{x} \rangle = D_x f(x, y) \bar{x}$ . Die zweite Ableitung ist eine Abbildung (z.B.)  $D_y D_x f(x, y) : Y \rightarrow \mathcal{L}(X, Z)$ . Wir identifizieren mit  $D_y D_x f(x, y) : X \times Y \rightarrow Z$  und schreiben  $D_y D_x f(x, y) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle$ .

**Satz 9.6** (Verzweigung im einfachen Eigenwert). *Sei  $\Lambda = \mathbb{R}$ ,  $X, Y$  Banachräume,  $f : X \times \Lambda \rightarrow Y$  sei  $C^2$ . Wir setzen voraus:*

1. Trivialer Ast:

$$f(0, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda.$$

2. Fredholm Eigenschaft:

$$L(\lambda) := D_x f(0, \lambda) : X \rightarrow Y$$

*ist für alle  $\lambda \in \Lambda$  ein Fredholm Operator mit Index 0.*

3. Notwendige Bedingung und einfacher Eigenwert: *Für ein  $x_0 \in X$  gilt*

$$X_0 := \ker L(0) = \mathbb{R} x_0.$$

4. Transversalität:

$$D_\lambda L(0) x_0 \notin R(L(0)).$$

Dann gibt es lokal einen Zweig nichttrivialer Lösungen. Wir zerlegen den Raum als  $X = X_0 \oplus X_1$ . Für Umgebungen  $(0, 0, 0) \in U \times V \times \Sigma \subset X_0 \times X_1 \times \Lambda$  gibt es eine eindeutige Abbildung  $\tilde{v} : U \rightarrow V$  mit  $\tilde{v}(0) = 0$  und ein eindeutiges  $\tilde{\lambda} : U \rightarrow \Sigma$  mit  $\tilde{\lambda}(0) = 0$ , so dass

$$f(rx_0 + x_1, \lambda) = 0 \iff \begin{cases} r = 0 \text{ und } x_1 = 0 & \text{oder} \\ x_1 = \tilde{v}(rx_0), \lambda = \tilde{\lambda}(rx_0). \end{cases}$$

Falls  $f \in C^k$  mit  $k \geq 2$ , so gilt  $\tilde{v}, \tilde{\lambda} \in C^{k-1}$ .

Das Bild ist wie in den ersten beiden mathematischen Beispielen. Die Lösungsmenge ist die Vereinigung zweier Äste: 1. Der triviale Ast. 2. Ein Ast, der über  $x_0$  parametrisiert wird.

**Bemerkung 9.7** (Zum Namen '... im einfachen Eigenwert'). Wir betrachten die Abbildung  $f(x, \lambda) = (\lambda_0 + \lambda)x - Tx$  für einen nichtlinearen kompakten Operator  $T : X \rightarrow Y = X$  mit  $T(0) = 0$  und  $\lambda_0 \neq 0$ . Sei  $\tilde{T} := D_x T(0)$ . Wir wollen die vier Voraussetzungen des Satzes für dieses  $f$  überprüfen.

Voraussetzung 1 des trivialen Astes ist immer erfüllt.

Voraussetzung 2 fordert, dass  $D_x f(0, 0) = (\lambda_0 + \lambda) \text{id} - \tilde{T}$  ein Fredholmoperator mit Index 0 ist. Dies ist erfüllt nach Lemma 4.7 und Satz 8.2 (jedenfalls für  $\lambda$  nahe 0).

Voraussetzung 3 ist, dass  $X_0 = \ker(\lambda_0 \text{id} - \tilde{T}) = \mathbb{R}x_0$ . Dies ist gerade die Bedingung, dass  $\lambda_0$  ein Eigenwert mit geometrischer Vielfachheit 1 ist.

Voraussetzung 4: Wegen  $D_\lambda L(0) = \text{id}$  fordert man hier, dass  $x_0 \notin R(\lambda \text{id} - \tilde{T})$ . Dies bedeutet, dass  $\lambda_0$  ein algebraisch einfacher Eigenwert sein soll.

*Beweis.* Wir beweisen nun Satz 9.6. Der Beweis erfolgt in 2 Schritten; der erste Schritt reduziert das Problem auf eine Dimension mit Hilfe der Ljapunov-Schmidt Reduktion. Der Kern des Beweises geschieht im zweiten Schritt.

*Schritt 1a: Reduktion der Dimension.* Wir führen eine Ljapunov-Schmidt Reduktion bezüglich  $L(0)$  durch. Wir zerlegen  $Y = Y_0 \oplus Y_1$  mit  $Y_1 := R(L(0))$  und verwenden die Projektion  $Q : Y \rightarrow Y$  auf den endlichdimensionalen Unterraum  $Y_0$  mit Kern  $Y_1$ . Da der Fredholm-Index des Operators 0 ist, ist die Dimension von  $Y_0$  dieselbe wie die von  $X_0 = \ker(L(0))$ , also  $\dim(Y_0) = 1$ . Da wir nach den Variablen  $x_1 \in X_1$  im Co-Kern auflösen können, gilt für eine lokale Auflösungsfunktion  $v : X_0 \times \Lambda \rightarrow X_1$

$$f(x, \lambda) = 0 \iff Qf(x_0 + v(x_0, \lambda), \lambda) = 0.$$

Wir definieren die Abbildung  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi(r, \lambda) := Qf(rx_0 + v(rx_0, \lambda), \lambda)$$

mit der offensichtlichen Identifikation von  $\mathbb{R}x_0$  mit  $\mathbb{R}$ . Damit ist das Problem auf eine eindimensionale Gleichung reduziert.

*Schritt 1b: Voraussetzungen bleiben erhalten.* Wir wollen nun zeigen, dass  $\Phi$  wieder die Voraussetzungen 1-4 erfüllt.

Ad 1. Die Auflösungsfunktion  $v$  erfüllt  $v(0, \lambda) = 0$ : Der Punkt  $x_1 = v$  ist die eindeutige Lösung von  $Qf = 0$  und  $x_1 = 0$  ist eine Lösung zu  $x_0 = 0$ . Mit dieser Eigenschaft von  $v$  folgt  $Qf(0 + v(0, \lambda), \lambda) = Qf(0, \lambda) = 0$ .

Ad 2.  $D_r\Phi(0, \lambda) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Räumen und daher immer Fredholm mit Index 0.

Ad 3. Diese Eigenschaft wurde in Satz 8.6 ausdrücklich aufgeführt: Es gilt  $D_r\Phi(0, 0) = QD_x f(0, 0) \langle x_0 + D_{x_0} v \cdot x_0 \rangle = 0$ , da  $D_x f(0, 0) = L(0)$  nach  $R(L(0))$  abbildet.

Ad 4. Bezüglich der Transversalität berechnen wir

$$\begin{aligned} D_\lambda D_r \Phi(0, 0) &= QD_\lambda [D_x f(rx_0 + v(rx_0, \lambda), \lambda) \langle x_0 + D_{x_0} v(rx_0, \lambda) \cdot x_0 \rangle] (0, 0) \\ &= QD_x^2 f(0, 0) \langle x_0 + D_{x_0} v(0, 0) \cdot x_0, D_\lambda v(0, 0) \rangle \\ &\quad + QD_\lambda D_x f(0, 0) \langle x_0 + D_{x_0} v(0, 0) \cdot x_0, 1 \rangle \\ &\quad + QD_x f(0, 0) \langle D_\lambda D_{x_0} v(0, 0) \langle x_0, 1 \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Der dritte Term verschwindet, weil  $Q$  auf ein Element in  $R(L(0))$  angewendet wird. Der erste Term verschwindet auch: Wegen  $v(0, \lambda) = 0$  (siehe oben) gilt  $D_\lambda v(0, 0) = 0$ . Wegen der Eigenschaft  $D_{x_0} v(0, 0) = 0$ , die ebenfalls in Satz 8.6 gezeigt wurde, haben wir insgesamt den Ausdruck deutlich vereinfacht:

$$D_\lambda D_r \Phi(0, 0) = QD_\lambda D_x f(0, 0) \langle x_0, 1 \rangle.$$

Nach Voraussetzung 4 an  $f$  ist dieser Ausdruck ungleich Null.

Wenn wir im Folgenden die eindimensionale Gleichung  $\Phi = 0$  durch  $\lambda = \tilde{\lambda}(x_0)$  lösen können, so haben wir den Satz mit  $x_1 = \tilde{v}(x_0) := v(x_0, \tilde{\lambda}(x_0))$  bewiesen. Es genügt also, den Satz im eindimensionalen Fall zu beweisen.

*Schritt 2: Beweis im eindimensionalen Fall.* Wir zeigen nun den Satz für  $X = Z = \mathbb{R}$ . Wir wollen die nichttrivialen Lösungen von  $f(x, \lambda) = 0$  finden. Idee: Die trivialen Lösungen werden *herausdividiert*. Wir setzen

$$\psi(x, \lambda) := \begin{cases} \frac{1}{x} f(x, \lambda) & \text{für } x \neq 0, \\ D_x f(0, \lambda) & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Lokal gilt für Punkte  $(x, \lambda)$  mit  $x \neq 0$ :

$$f(x, \lambda) = 0 \iff \psi(x, \lambda) = 0,$$

also eine Äquivalenz der beiden Gleichungen. Wir werden im Folgenden die  $\psi$ -Gleichung lösen.

Es gilt  $\psi \in C^1$ , da  $f(0, \lambda) = 0$  und  $f \in C^2$ . Weiterhin  $\psi(0, 0) = D_x f(0, 0) = 0$  und

$$D_\lambda \psi(0, 0) = D_\lambda D_x f(0, 0) \neq 0.$$

Deswegen können wir die Gleichung  $\psi = 0$  lokal mit dem Satz über implizite Funktionen auflösen. Wir finden einen Weg  $\lambda = \tilde{\lambda}(x)$ , so dass lokal gilt

$$\psi(x, \lambda) = 0 \iff \lambda = \tilde{\lambda}(x).$$

$\tilde{\lambda}$  ist die gesuchte Funktion. □

*Beispiel 1: Eine elementare Funktion.* Für  $x \in \mathbb{R}^3$  wollen wir die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x + f(x) = 0$$

untersuchen, wobei  $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $Df(0) = 0$ . Der Satz liefert die Existenz eines nichttrivialen Astes, der in  $(x, \lambda) = (0, 0)$  aus dem trivialen Ast verzweigt. Zu den Voraussetzungen:

1. ist wegen  $f(0) = 0$  erfüllt
2. ist erfüllt, denn  $X = \mathbb{R}^3$  ist endlichdimensional
3. ist erfüllt, denn es gilt mit  $\lambda = 0$

$$\ker D_x f(0, 0) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}e_1$$

4. ist erfüllt, denn es gilt

$$\begin{aligned} D_\lambda D_x f(0, 0) \langle e_1 \rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot e_1 = e_1 \\ &\notin R \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \mathbb{R}e_2 + \mathbb{R}e_3. \end{aligned}$$

*Beispiel 2: Transversalität.* Wir betrachten den allgemeinen endlichdimensionalen Fall  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  von der Klasse  $C^2$  mit trivialem Ast ( $f(0, \lambda) = 0 \forall \lambda$ ). Wir nehmen an, dass die Linearisierung  $L(\lambda) := D_x f(0, \lambda)$  die Eigenwerte

$$\mu_1(\lambda) \leq \mu_2(\lambda) \leq \dots < \mu_k(\lambda) < \dots \leq \mu_n(\lambda)$$

besitzt, und dass diese differenzierbar von  $\lambda$  abhängen. Weiterhin gelte im kritischen Punkt  $\lambda_0$  für den  $k$ -ten Eigenwert  $\mu_k(\lambda_0) = 0$ , der Eigenwert sei algebraisch einfach, und Transversalität gelte im dem Sinne, dass

$$\partial_\lambda \mu_k(\lambda_0) \neq 0.$$

Dann ist in  $(x, \lambda) = (0, \lambda_0)$  obiger Satz anwendbar, d.h. es gibt einen nichttrivialen Ast. Zu den Voraussetzungen:

1. und 2. sind erfüllt. 3. ist erfüllt, denn nach Voraussetzung ist  $\mu_k(\lambda_0)$  geometrisch einfach. 4. Um etwas über  $D_\lambda D_x f(0, \lambda_0)$  aussagen zu können, können wir nur von der Eigenwertgleichung ausgehen:

$$\mu_k(\lambda)x_0(\lambda) = L(\lambda)x_0(\lambda).$$

Wir differenzieren nach  $\lambda$ ,

$$\partial_\lambda \mu_k(\lambda_0)x_0(\lambda_0) + \mu_k(\lambda_0)\partial_\lambda x_0(\lambda_0) = D_\lambda L(\lambda_0)x_0(\lambda_0) + L(\lambda_0)\partial_\lambda x_0(\lambda_0).$$

Der erste Term ist von der Form  $\alpha x_0$  mit  $\alpha \neq 0$ , wobei  $x_0$  nicht in  $R(L(0))$  ist wegen der algebraischen Einfachheit des Eigenwertes. Der zweite Term verschwindet wegen  $\mu_k(\lambda_0) = 0$ . Den dritten Term wollen wir untersuchen. Der vierte Term ist sicherlich im Bild von  $L(\lambda_0)$ . Insgesamt erhalten wir 4., nämlich

$$D_\lambda L(\lambda_0)x_0 \notin R(L(0)).$$

Wir sehen, dass algebraische Einfachheit zusammen mit der Transversalität des Eigenwertes die Voraussetzungen liefert.

*Beispiel 3: Euler-Stab.* Ein mit Kraft  $\lambda$  belasteter Stab der Länge  $L$  und mit gleichmäßiger Dicke wird beschrieben durch die Gleichung

$$\begin{aligned} x''(s) + \lambda \rho x(s) \sqrt{1 - |x'(s)|^2} &= 0 \quad \forall s \in (0, L), \\ x(0) &= x(L) = 0. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Diese Form wird in Deimling [4] benutzt. Dabei ist  $s$  die Bogenlänge,  $x$  die (Quer-) Auslenkung des Stabes,  $\rho > 0$  der Elastizitätskoeffizient, der Einfachheit nehmen wir hier ein konstantes  $\rho$  an.

Für die Modellierung verweisen wir auf die Darstellung (26.10) in [13]. Wir wollen nachrechnen, dass die beiden Beschreibungen äquivalent ist. In (26.10) in [13] wird der Winkel  $\Theta$  als Variable verwendet, wir müssen also  $\sin \Theta(s) = x'(s) = \partial_s x(s)$  ausnutzen. Differenzieren nach  $s$  liefert für den ersten Term in (9.3) den Ausdruck  $x''(s) = \partial_s \Theta(s) \cos(\Theta(s))$ . Für den zweiten Term gilt  $x(s) \sqrt{1 - |x'(s)|^2} = x(s) \cos(\Theta(s))$ . Kürzen von  $\cos(\Theta(s))$  und nochmaliges Differenzieren ergibt die Darstellung (26.10),  $\partial_s^2 \Theta(s)$  ist proportional zu  $\sin(\Theta(s))$ .

Um obige Gleichungen mathematisch zu fassen, setzen wir

$$\begin{aligned} X &:= \{x \in C^2([0, L], \mathbb{R}) : x(0) = x(L) = 0\}, \\ Y &:= C^0([0, L], \mathbb{R}), \\ \Lambda &:= \mathbb{R}, \\ f(x, \lambda) &:= x'' + \lambda \rho x \sqrt{1 - |x'|^2}. \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  ist  $C^2$  in einer Umgebung von  $0 \in X$ , denn dort gilt  $\|x'\|_\infty \leq 1/2$ . Wir prüfen die Voraussetzungen des Satzes nach:

1.  $f(0, \lambda) = 0$  ist erfüllt für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
2. Der Operator  $L(\lambda)$  ist

$$L(\lambda) = D_x f(0, \lambda) : x \mapsto x'' + \lambda \rho x.$$

Also ist  $L(\lambda)$  ein Fredholm Operator vom Index 0: Die Abbildung  $X \ni x \mapsto x'' \in Y$  ist Fredholm Operator vom Index 0 und  $L(\lambda)$  ist eine kompakte Störung davon.

3. Die Eigenwerte des Laplace Operators sind einfach: Zum Eigenwert  $-k^2 \pi^2 / L^2$  gehört die Eigenfunktion  $u_k(s) = \sin(k\pi s / L)$ . Die möglichen Verzweigungspunkte sind

$$\lambda_k = k^2 \frac{\pi^2}{L^2 \rho}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

4. Es gilt  $D_\lambda L(\lambda) = \rho \text{id}$ , also

$$D_\lambda L(\lambda)u_n = \rho u_n \notin R(L(\lambda)) = \ker(L(\lambda))^\perp.$$

Hierbei verwenden wir, dass  $L(\lambda)$  selbstadjungiert in  $L^2$  ist.

Wir finden das Verzweigungsbild der Stabgleichung in der Umgebung von  $x = 0$ : In den Werten  $\lambda_k$  findet eine Verzweigung statt, außer der trivialen Lösungen gibt es lokal um Punkte  $(x, \lambda) = (0, \lambda_k)$  nichttriviale eindimensionale Mannigfaltigkeiten von Lösungen. Die Zweige sind symmetrisch: Wegen  $f(x, \lambda) = f(-x, \lambda)$  ist mit  $(x, \lambda)$  auch  $(-x, \lambda)$  eine Lösung. Wegen der lokalen Eindeutigkeit der Zweige gilt

$$\tilde{v}(-x_0) = -\tilde{v}(x_0), \quad \tilde{\lambda}(-x_0) = \tilde{\lambda}(x_0).$$

# 10. Stabilität der stationären Zweige

## 10.1. Stabilität und Eigenwerte

Oft kann die Gleichung  $f(x) = 0$  als stationäre Gleichung der folgenden instationären Gleichung angesehen werden:

$$\frac{d}{dt}x = f(x). \quad (*)$$

Falls uns Gleichung (\*) vorgegeben ist, so sind folgende Bezeichnungen sinnvoll:

- $x_0$  stationäre Lösung :  $\iff f(x_0) = 0$ .
- die stationäre Lösung  $x_0$  ist linear stabil :  $\iff \exists c > 0$  : alle Spektralwerte  $\lambda$  von  $D_x f(x_0)$  erfüllen  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq -c$ .
- die stat. Lösung  $x_0$  ist linear instabil :  $\iff$  es gibt einen EW  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ .

Wir haben diese Begriffe im Prolog untersucht und gesehen, dass linear stabile (instabile) stationäre Lösungen auch im anschaulichen Sinne stabil (instabil) sind:

- $x_0$  linear stabil  $\implies \exists \varepsilon > 0$  : alle Lösungen  $x(t)$  von (\*) mit  $x(0) \in B_\varepsilon(x_0)$  erfüllen  $x(t) \rightarrow x_0$  für  $t \rightarrow \infty$ .
- $x_0$  linear instabil  $\implies \exists \delta > 0 \forall \varepsilon > 0 \exists$  Lösung  $x(t)$  von (\*) mit  $x(0) \in B_\varepsilon(x_0)$  und  $t > 0$  mit  $x(t) \notin B_\delta(x_0)$ .

Wir betrachten jetzt die Situation von Satz 9.6. Gegeben ist ein Verzweigungsdiagramm. Weiterhin sei eine Stabilitätsaussage für einen der vier Teilläste gegeben. Daraus wollen wir die lineare Stabilität der anderen drei Teilläste bestimmen.

Nach Voraussetzung hat  $D_x f(0, 0)$  einen einfachen Eigenwert 0. Falls alle anderen Eigenwerte negativen Realteil haben, so entscheidet die Fortsetzung des Eigenwerts 0 über die Stabilität eines Astes.

Genauer müssen wir folgendes tun: Sei  $(x(s), \lambda(s))$  ein Ast von Lösungen (trivial oder nichttrivial). Dann müssen wir eine Fortsetzung des kritischen Eigenwertes finden, also  $\tilde{\mu}(s) \in \mathbb{R}$  und dazu  $\tilde{u}(s) \neq 0$  mit

$$D_x f(x(s), \lambda(s))\tilde{u}(s) = \tilde{\mu}(s)\tilde{u}(s). \quad (10.1)$$

Das Vorzeichen von  $\tilde{\mu}(s)$  entscheidet über die Stabilität des Astes.

Um dieses Programm durchzuführen, müssen wir zunächst zeigen, dass wir einen einfachen Eigenwert bei einer Störung des Operators immer fortsetzen können.

**Definition 10.1** (Einfache  $K$ -Eigenwerte). Seien  $T_0, K : X \rightarrow Y$  linear und stetig. Eine komplexe Zahl  $\mu_0$  heißt einfacher  $K$ -Eigenwert von  $T_0$ , falls

1.  $T_0 - \mu_0 K$  Fredholm-Operator mit Index 0.
2.  $\ker(T_0 - \mu_0 K) = \mathbb{R}x_0$ .
3.  $Kx_0 \notin R(T_0 - \mu_0 K)$ .

Bemerkung: Für  $X = Y$ ,  $K = \text{id}$ ,  $\mu_0 \neq 0$  und  $T_0$  kompakt ist ein einfacher  $K$ -Eigenwert nichts anderes als ein (algebraisch) einfacher Eigenwert.

**Lemma 10.2** (Fortsetzung von einfachen Eigenwerten). Sei  $\mu_0 \in \mathbb{R}$  ein einfacher  $K$ -Eigenwert von  $T_0$  mit Eigenvektor  $x_0$ . Dann gibt es für ein  $\delta > 0$  eine Fortsetzung des Eigenwertes,

$$\mu : \{T \in \mathcal{L}(X, Y) \mid \|T - T_0\| < \delta\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig}$$

mit  $\mu(T_0) = \mu_0$  und  $\mu(T)$  ist einfacher  $K$ -Eigenwert von  $T$ . Diese Fortsetzung  $\mu$  ist eindeutig. Weiterhin gilt für eine Abbildung  $x : T \mapsto x(T)$

$$\ker(T - \mu(T)K) = \mathbb{R}x(T), \quad x(T) = x_0 + x_1(T) \in \mathbb{R}x_0 \oplus X_1 = X,$$

die Abbildungen  $\mu$  und  $x$  sind analytisch in  $T$ .

*Beweis.* Ohne Einschränkung sei  $\mu_0 = 0$ . Wir wollen  $(T - \mu(T)K)x(T) = 0$  lösen. Dazu definieren wir auf einer Umgebung von  $(0, 0, T_0) \in \mathbb{R} \times X_1 \times \mathcal{L}(X, Y)$  die Funktion

$$F(r, x_1, T) := (T - rK)(x_0 + x_1) \in Y.$$

Wir fassen also  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  als ein Argument von  $F$  auf.

Da der Operator  $T_0$  nach Voraussetzung ein Fredholm-Operator mit Index 0 ist, können wir die Räume zerlegen:  $X = X_0 \oplus X_1$  mit  $X_0 = \mathbb{R}x_0$  und  $Y = Y_0 \oplus Y_1 = Y_0 \oplus R(T_0)$  mit  $\dim Y_0 = 1$ . Im Raum  $Y$  haben wir zugehörige Projektionen  $Q_1$  und  $Q_0 := \text{id} - Q_1$ .

Wir berechnen nun die Ableitung von  $F$ :

$$\begin{aligned} D_{(r, x_1)} F(0, 0, T_0) : (\bar{r}, \bar{x}_1) &\mapsto -\bar{r}Kx_0 + T_0\bar{x}_1 \\ &= -\bar{r}Q_0(Kx_0) + Q_1(-\bar{r}Kx_0 + T_0\bar{x}_1). \end{aligned}$$

Es gilt  $Q_0(Kx_0) \neq 0$  nach Voraussetzung 3. Zudem ist  $Q_1 \circ T_0 : X_1 \rightarrow Y_1$  invertierbar. Daher ist auch  $D_{(r, x_1)} F(0, 0, T_0)$  invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen finden wir  $\mu(T)$  und  $x(T)$  für alle  $T$  nahe  $T_0$ . Diese Auflösungsfunktionen erben die Regularität der Abbildung  $F$ .

Es bleibt zu zeigen: (a) Die Eindeutigkeit der Lösung. (b) Die Eigenschaften 1.-3. aus der Definition für den einfachen  $K$ -Eigenwert  $\mu(T)$ .

(a) Wir haben mit  $x = x_0 + x_1$  einen speziellen Ansatz gewählt. Für einen anderen Ansatz (oder für großes  $x_1$ ) könnte es weitere Lösungen geben. Wir nehmen jetzt an, dass  $x = \beta x_0 + x_1$  eine normierte Lösung ist, also  $\|x\| = 1$  und

$$(T - rK)(\beta x_0 + x_1) = 0.$$

Dies schreiben wir als

$$T_0x_1 - r\beta Kx_0 = (T_0 - T)(\beta x_0 + x_1) + rKx_1.$$

Die Terme links erfüllen  $T_0x_1 \in R(T_0)$  und  $r\beta Kx_0 \notin R(T_0)$ . Daher gilt eine Abschätzung

$$\|x_1\| + |r\beta| \leq C \{ \|T_0 - T\|(|\beta| + \|x_1\|) + r\|x_1\| \}.$$

Falls  $\|T_0 - T\|$  und  $r$  klein sind können wir die  $x_1$ -Terme in die linke Seite absorbieren und finden

$$\|x_1\| + |r\beta| \leq C' \|T_0 - T\| |\beta|.$$

Da  $\beta$  beschränkt ist (Normierung) liefert dies die Kleinheit von  $x_1$ , und dies (wieder Normierung) die Kleinheit von  $1 - \beta$ . Insbesondere war unser Ansatz  $\beta = 1$  keine Einschränkung. Für kleines  $x_1$  liefert der Satz über implizite Funktionen die Eindeutigkeit.

- (b1) Eigenschaft 1 folgt aus dem nachfolgenden allgemeinen Lemma.
- (b2) Die Eindeutigkeit von  $x_1$  liefert insbesondere Eigenschaft 2.
- (b3) Für Eigenschaft 3 müssen wir zeigen, dass

$$K(x_0 + x_1(T)) \notin R(T - \mu(T)K). \quad (10.2)$$

Die Abbildungen

$$\hat{T} : (x_1, r) \mapsto (T - \mu(T)K)x_1 + rK(x_0 + x_1(T)) \in Y$$

sind invertierbar für  $T$  nahe  $T_0$ , weil  $\hat{T}_0$  invertierbar ist. Dies liefert (10.2).  $\square$

**Lemma 10.3** (Kleine Störungen von Fredholm Operatoren). *Sei  $T_0 : X \rightarrow Y$  Fredholm Operator. Für  $\|T - T_0\|$  hinreichend klein ist auch  $T$  ein Fredholmoperator und es gilt*

$$\dim \ker T \leq \dim \ker T_0, \quad \text{codim } R(T) \leq \text{codim } R(T_0).$$

*Der Index von  $T$  stimmt mit dem Index von  $T_0$  überein.*

*Beweis.* Für den Fredholm Operator  $T_0 : X \rightarrow Y$  zerlegen wir wie in Lemma 8.4 und verwenden  $X = X_0 \oplus X_1, Y = Y_0 \oplus Y_1, T_0|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y_1$  invertierbar,  $\tilde{T}_0 : X_1 \times Y_0 \rightarrow Y, (x_1, y_0) \mapsto T_0x_1 + y_0$  ebenfalls invertierbar. Für Operatoren  $T$  mit  $\|T - T_0\|$  klein ist auch die kleine Störung  $\hat{T} : (x_1, y_0) \mapsto Tx_1 + y_0$  von  $\tilde{T}_0$  invertierbar. Also gilt  $\ker T \cap X_1 = \{0\}$  und  $R(T) + Y_0 = Y$ , insbesondere die Fredholm Eigenschaft und die Aussage über die Dimensionen.

Man muss die Aussage über den Index nur für den Fall zeigen, dass der Index von  $T_0$  verschwindet. Tatsächlich ist dies keine Einschränkung: Im allgemeinen Fall kann man durch eine endlichdimensionale Erweiterung von entweder  $X$  oder  $Y$  erreichen, dass  $T_0$  den Index 0 hat.

Da dies von der Notation her einfacher ist, zeigen wir die Aussage hier nur für  $\dim \ker T_0 = 1$  (nur in diesem Fall verwenden wir das Lemma in diesem Skript). Wir müssen nur zwei Fälle betrachten:

Der erste Fall ist  $\text{codim } R(T) = 0$  und damit  $R(T) = Y$ . Würde  $T(X_1) = Y$  gelten, so wäre  $\tilde{T}$  nicht invertierbar (das Urbild wäre nicht eindeutig). Also  $T(X_1) \neq Y$ . Dies zeigt aber auch  $T(X_0) \not\subset T(X_1)$ , da sonst  $T$  nicht surjektiv ist. Dies impliziert  $\ker(T) = \{0\}$ .

Der zweite Fall ist  $\text{codim } R(T) = 1$  und damit  $R(T) \neq Y$ . Da  $T|_{X_1} : X_1 \rightarrow Y_1$  surjektiv ist, werden (außer der 0) die Elemente in  $Y_0$  nicht getroffen, es gilt also  $T(X_0) \cap Y_0 = \{0\}$ . Andererseits, wenn wir annehmen, es würde  $\ker(T) = \{0\}$  gelten, so kann  $X_0$  nicht nach  $Y_1$  abgebildet werden, also gilt  $T(X_0) \cap Y_0 \neq \{0\}$ . Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

## 10.2. Der Satz von Crandall-Rabinowitz

Wir betrachten folgende Situation: Für Banachräume  $X \subset Y$  betrachten wir als  $K$  die Inklusion,  $K : X \rightarrow Y$ . Weiterhin seien die Voraussetzungen von Satz 9.6 erfüllt und es gibt zwei Äste von Lösungen:  $(0, \lambda)$  für  $\lambda \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$  und  $(x(s), \lambda(s))$  für  $s \in (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$ ,  $x(s) = sx_0 + x_1(s)$ . Wir wollen die Eigenwerte der Linearisierung auf den Ästen betrachten. Nach Lemma 10.2 gibt es  $\bar{u}$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{\mu}$  mit

$$\begin{aligned} D_x f(0, \lambda) \bar{u}(\lambda) &= \bar{\mu}(\lambda) \bar{u}(\lambda), \\ D_x f(x(s), \lambda(s)) \tilde{u}(s) &= \tilde{\mu}(s) \tilde{u}(s). \end{aligned}$$

Unser Ziel ist es, die Vorzeichen von  $\bar{\mu}$  und  $\tilde{\mu}$  zu bestimmen.

**Satz 10.4** (Crandall-Rabinowitz). *In obiger Situation gilt  $\bar{\mu}'(0) \neq 0$ ,  $s\lambda'(s) \rightarrow 0$  und  $\tilde{\mu}(s) \rightarrow 0$  für  $s \rightarrow 0$ . Die beiden Terme verschwinden mit entgegengesetztem Vorzeichen: Für jede Folge  $s_n \rightarrow 0$  mit  $\tilde{\mu}(s_n) \neq 0$  gilt*

$$\frac{s\lambda'(s)\bar{\mu}'(0)}{\tilde{\mu}(s)} \rightarrow -1 \quad \text{für } s \rightarrow 0. \quad (10.3)$$

*Beweis.* a) *Trivialer Zweig.* Wir benutzen die Charakterisierung der Eigenwertfortsetzung auf dem trivialen Zweig,

$$D_x f(0, \lambda) \bar{u}(\lambda) = \bar{\mu}(\lambda) \bar{u}(\lambda),$$

und differenzieren in  $\lambda = 0$  nach  $\lambda$ . Dies liefert

$$D_\lambda D_x f(0, 0) \bar{u}(0) + D_x f(0, 0) \partial_\lambda \bar{u}(0) = \partial_\lambda \bar{\mu}(0) \bar{u}(0) + \bar{\mu}(0) \partial_\lambda \bar{u}(0).$$

Wegen  $D_\lambda D_x f(0, 0) \bar{u}(0) = D_\lambda L(0)x_0$  und  $D_x f(0, 0) \partial_\lambda \bar{u}(0) \in R(L(0))$  und Voraussetzung 4 in Satz 9.6 ist die linke Seite ungleich 0. Auf der rechten Seite gilt  $\bar{\mu}(0) = 0$  und wir schließen daher  $\partial_\lambda \bar{\mu}(0) \neq 0$ .

Wir werden die obige differenzierte Eigenwertgleichung nochmals verwenden. Dazu wollen wir sie vereinfachen: Für ein lineares stetiges Funktional  $y^* : Y \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\ker y^* = R(L(0))$  und  $y^* \neq 0$  gilt

$$\langle y^*, D_\lambda D_x f(0, 0) \bar{u}(0) \rangle = \partial_\lambda \bar{\mu}(0) \langle y^*, \bar{u}(0) \rangle. \quad (10.4)$$

b) *Nichttrivialer Zweig.* Wir haben zwei Gleichungen zur Verfügung. Die eine ist die Charakterisierung der Eigenwertfortsetzung

$$D_x f(x(s), \lambda(s)) \tilde{u}(s) = \tilde{\mu}(s) \tilde{u}(s).$$

Die zweite ist die Gleichung selbst,  $f(x(s), \lambda(s)) = 0$ , die wir nach  $s$  differenzieren:

$$D_x f(x(s), \lambda(s)) \partial_s x(s) + D_\lambda f(x(s), \lambda(s)) \partial_s \lambda(s) = 0.$$

Wir subtrahieren die beiden Gleichungen voneinander und erhalten

$$D_x f(x(s), \lambda(s)) (\partial_s x(s) - \tilde{u}(s)) + D_\lambda f(x(s), \lambda(s)) \partial_s \lambda(s) + \tilde{\mu}(s) \tilde{u}(s) = 0. \quad (10.5)$$

Der Beweis besteht nun im Wesentlichen darin, in Gleichung (10.5)  $D_x f$ ,  $D_\lambda f$  und  $\tilde{u}$  in einer Taylor-Reihe zu entwickeln. Wir finden

$$\begin{aligned} 0 &= D_x f(0, 0) (\partial_s x(s) - \tilde{u}(s)) + o(1) (\partial_s x(s) - \tilde{u}(s)) \\ &\quad + D_x D_\lambda f(0, 0) \langle \partial_s x(0) | s \rangle \partial_s \lambda(s) + D_\lambda D_\lambda f(0, 0) \langle \partial_s \lambda(0) | s \rangle \partial_s \lambda(s) \\ &\quad + o(s) \partial_s \lambda(s) + \tilde{\mu}(s) \tilde{u}(0) + \tilde{\mu}(s) o(1). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Wir benutzen nun  $x(s) = sx_0 + x_1(s)$  aus Satz 9.6, und  $\tilde{u}(s) = x_0 + u_1(s)$  aus Lemma 10.2. Sie liefern  $\partial_s x(s) - \tilde{u}(s) \in X_1$ . Da  $L(0)|_{X_1} : X_1 \rightarrow R(L(0))$  invertierbar ist, folgt aus (10.6)

$$\|\partial_s x(s) - \tilde{u}(s)\| \leq C (|s \partial_s \lambda(s)| + |\tilde{\mu}(s)|). \quad (10.7)$$

Wir projizieren nun (10.6) mit Hilfe von  $y^*$  und finden wegen  $\langle y^*, D_x f(0, 0) \dots \rangle = 0$  und  $D_\lambda D_\lambda f(0, 0) = 0$

$$s \partial_s \lambda(s) \langle y^*, D_x D_\lambda f(0, 0) x_0 \rangle + \tilde{\mu}(s) \langle y^*, x_0 \rangle = o(1) (|s \partial_s \lambda(s)| + |\tilde{\mu}(s)|).$$

Mit Gleichung (10.4) können wir im ersten Term die Klammer ersetzen und erhalten

$$s \partial_s \lambda(s) \partial_\lambda \bar{\mu}(0) + \tilde{\mu}(s) = o(1) (|s \partial_s \lambda(s)| + |\tilde{\mu}(s)|). \quad (10.8)$$

Dies impliziert die Behauptungen. □

*Beispiel 1.* (Musterbeispiel 1 für die Sätze 9.6 und 10.4). Sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  beschränktes Gebiet mit glattem Rand. Wir betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} f(u, \lambda) &:= (\Delta + \lambda)u - u^2 = 0 && \text{in } G, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial G. \end{aligned}$$

Ein Spektralsatz zusammen mit PDE-Theorie liefert: Die Eigenwerte von  $-\Delta$  sind  $0 < \mu_0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots$ . Dabei ist  $\mu_0$  algebraisch einfach, er besitzt eine nicht-negative Eigenfunktion  $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $\lambda = \mu_0$  ist der Kern der Linearisierung  $X_0 = \mathbb{R} u_0$ .

Die notwendige Bedingung aus Satz 9.1 impliziert: Eine Verzweigung aus dem trivialen Ast  $u = 0$  findet höchstens für  $\lambda = \mu_i$  statt, denn nur dort ist  $D_x f(0, \mu) = \Delta + \lambda$  nicht invertierbar (wir verzichten hier auf die Angabe von Räumen).

Die Verzweigung im einfachen Eigenwert aus Satz 9.6 liefert: In  $\mu_0$  findet eine Verzweigung statt, denn  $\mu_0$  ist algebraisch einfach, insbesondere

$$D_\lambda D_x f(0, \mu_0)u_0 = \text{id}(u_0) = u_0 \notin R(\Delta + \mu_0).$$

Nach Satz 9.6 gibt es einen nichttrivialen Ast  $(u(s), \lambda(s))$  mit

$$\lambda(0) = \mu_0, \quad u(s) = su_0 + u_1(s), \quad f(u(s), \lambda(s)) = 0.$$

*Bestimmung des Verzweigungsbildes.* Wir differenzieren die Gleichung

$$(\Delta + \mu_0)u(s) = (-\lambda(s) + \mu_0)u(s) + u^2(s)$$

nach  $s$  und erhalten

$$(\Delta + \mu_0)(u_0 + \partial_s u_1(s)) = (-\lambda(s) + \mu_0)\partial_s u(s) - \partial_s \lambda(s)u(s) + 2u(s)\partial_s u(s).$$

Wir differenzieren nochmal nach  $s$  und werten in  $s = 0$  aus. Dies liefert

$$(\Delta + \mu_0)\partial_s^2 u_1(0) = -2\partial_s \lambda(0)\partial_s u(0) + 2|\partial_s u(0)|^2.$$

Für den Term auf der linken Seite stellen wir fest, dass  $\partial_s^2 u_1(0) \in X_1 \perp X_0$ , daher ist auch die linke Seite im Komplement von  $X_0 = \mathbb{R}u_0$ . Wir multiplizieren die Gleichung mit  $\partial_s u(0) = u_0$  und integrieren über das Gebiet  $G$ ; dabei verschwindet der Term auf der linken Seite. Wegen der Nichtnegativität  $u_0 \geq 0$  folgt

$$0 = -2\partial_s \lambda(0)\|u_0\|_{L^2}^2 + \int_G 2|u_0|^3.$$

Wir finden also  $\partial_s \lambda(0) = \lambda'(0) > 0$ . Damit ist das Verzweigungsbild bestimmt: Die nichttrivialen Lösungen sind wie  $su_0$  mit  $s > 0$  für Parameter  $\lambda > \mu_0$ , und wie  $su_0$  mit  $s < 0$  für  $\lambda < \mu_0$ .

*Stabilitätsuntersuchung.* Die Eigenwerte von  $\Delta + \lambda$  sind alle negativ für  $\lambda < \mu_0$ , für  $\lambda > \mu_0$  gibt es einen positiven Eigenwert. Also ist der triviale Ast stabil für  $\lambda < \mu_0$  und instabil für  $\lambda > \mu_0$ .

Der Eigenwert der Linearisierung auf dem trivialen Ast ist  $\bar{\mu}_0(\lambda) = -\mu_0 + \lambda$ , es gilt also  $\bar{\mu}'(0) = \partial_\lambda \bar{\mu}(0) = 1$ . Wir stellen fest, dass  $\partial_\lambda \bar{\mu}(0) \neq 0$  auch in Satz 10.4 ausgesagt wird. Wegen  $\lambda'(s) > 0$  haben wir also die Situation

$$\text{sgn}(s\lambda'(s)) = \text{sgn}(s) \quad \text{und} \quad \text{sgn}(\bar{\mu}'(0)) = 1.$$

Wir können aus der Formel (10.3) für die Limiten schließen, dass

$$\text{sgn}(\tilde{\mu}(s)) = -\text{sgn}(s)$$

für kleine  $s$ . Also ist der nichttriviale Ast stabil für  $s > 0$  und instabil für  $s < 0$ .

*Beispiel 2.* (Musterbeispiel 2 für die Sätze 9.6 und 10.4). Wir variieren nun das erste Beispiel und betrachten die Gleichung

$$\begin{aligned} f(u, \mu) := (\Delta + \lambda)u - u^3 &= 0 && \text{in } G, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial G. \end{aligned}$$

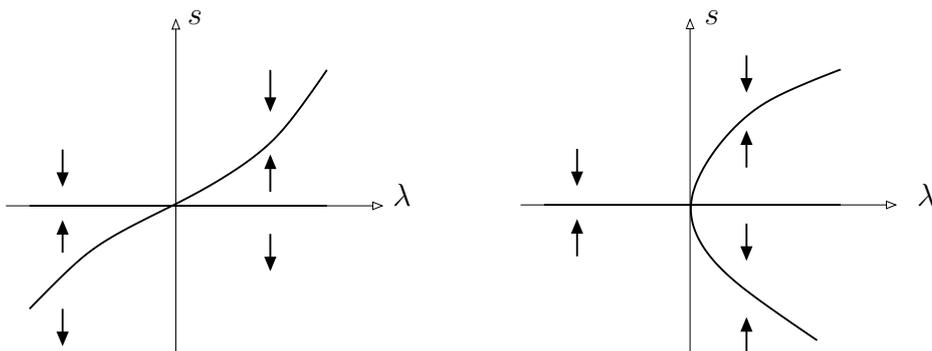


Figure 10.1.: Die Verzweigungsbilder mit Stabilitätsresultaten in den Musterbeispielen 1 und 2

Die möglichen Verzweigungspunkte (auf der trivialen Achse) sind wieder genau die  $\mu_i$ , in  $(0, \mu_0)$  findet eine Verzweigung statt, der nichttriviale Ast sei gegeben durch  $(u(s), \lambda(s))$ . Differenzieren der Gleichung liefert

$$(\Delta + \mu_0)(u_0 + \partial_s u_1(s)) = (\mu_0 - \lambda(s))\partial_s u(s) - \partial_s \lambda(s)u(s) + 3u(s)^2 \partial_s u(s).$$

Wir differenzieren nochmal nach  $s$ :

$$\begin{aligned} (\Delta + \mu_0)\partial_s^2 u_1(s) &= (\mu_0 - \lambda(s))\partial_s^2 u(s) - 2\partial_s \lambda(s)\partial_s u(s) \\ &\quad - \partial_s^2 \lambda(s)u(s) + 3u(s)^2 \partial_s^2 u(s) + 6u(s)(\partial_s u(s))^2. \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit  $u_0$  ( $L^2$ -Skalarprodukt). Wieder verschwindet die linke Seite, übrig bleiben die Terme

$$0 = -2\partial_s \lambda(s)\|u_0\|^2 - \partial_s^2 \lambda(s)s\|u_0\|^2 + O(s^2) + 6 \int_G s|u_0|^2 |\partial_s u(s)|^2.$$

Daraus schließen wir in einem ersten Schritt, dass  $\partial_s \lambda(s)$  gegen 0 geht für  $s \rightarrow 0$ , also  $\partial_s \lambda(0) = 0$ . Die Taylor-Entwicklung des ersten Termes liefert dann

$$-2\partial_s^2 \lambda(0)s\|u_0\|^2 - \partial_s^2 \lambda(s)s\|u_0\|^2 + 6 \int_G s|u_0|^2 |\partial_s u(s)|^2 = o(s).$$

Wir teilen durch  $s$  und bilden den Limes  $s \rightarrow 0$  und schließen

$$\partial_s^2 \lambda(0) = \frac{2}{\|u_0\|^2} \int_G |u_0|^4.$$

Inbesondere ist  $\partial_s^2 \lambda(0)$  positiv, die Verzweigung geht also 'nach rechts', man sagt, die Verzweigung ist superkritisch.

Wir wissen schon, dass der triviale Ast stabil ist für  $\lambda < \mu_0$  und instabil für  $\lambda > \mu_0$ . Mit der Formel von Crandall und Rabinowitz bestätigt man, dass der nichttriviale Ast stabil ist. Man verifiziert damit eine Aussage, die man auch mit einem 'Pfeilchenbild' erhalten kann.

# 11. Globale Verzweigung

## 11.1. Der Satz von Rabinowitz

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie sich die nichttrivialen Äste verhalten können, wenn sie die bisher betrachtete kleine Umgebung des Verzweigungspunktes verlassen.

Die Situation ist wie in Abschnitt 11.2:  $X$  ist ein Banachraum,  $\hat{\Omega} \subset X \times \mathbb{R}$  eine offene Umgebung von  $(0, \lambda_0)$ ,  $T : X \rightarrow X$  linear, stetig und kompakt,  $g : \text{cl}(\hat{\Omega}) \rightarrow X$  stetig und kompakt mit  $g(x, \lambda) = o(\|x\|)$  für  $\|x\| \rightarrow 0$ , gleichmäßig in  $\lambda$ . Wir betrachten

$$f(x, \lambda) := x - \lambda T x + g(x, \lambda).$$

$1/\lambda_0$  sei ein Eigenwert von  $T$  mit ungerader (algebraischer) Vielfachheit.

Wir betrachten nun die Menge der nichttrivialen Lösungen,

$$N := \left\{ (x, \lambda) \in \hat{\Omega} \mid f(x, \lambda) = 0, x \neq 0 \right\}.$$

Uns interessiert im speziellen der Ast, der in  $(0, \lambda_0)$  entstanden ist. Wir setzen

$$C := \text{Zusammenhangskomponente von } \bar{N}, \text{ die } (0, \lambda_0) \text{ enthält.}$$

Dabei verwenden wir folgende Definitionen: eine Menge heißt zusammenhängend, falls es keine Zerlegung in nichttriviale offene Teilmengen gibt. Eine Zusammenhangskomponente ist eine maximale zusammenhängende Teilmenge.

Unser Hauptresultat in diesem Abschnitt ist der folgende Satz.

**Satz 11.1** (Rabinowitz). *Die Menge  $C$  läuft entweder gegen  $\partial\hat{\Omega}$  oder zurück zum trivialen Ast  $\{0\} \times \mathbb{R} \setminus (0, \lambda_0)$ .*

Oftmals ist  $\hat{\Omega} = X \times \mathbb{R}$  der gesamte Raum. Dann bedeutet die erste Möglichkeit, dass  $C$  unbeschränkt ist.

*Beweis.* Wir haben die Aussage bewiesen, falls in folgender Annahme einen Widerspruch finden:

Es gibt eine beschränkte Teilmenge  $\Omega \subset \hat{\Omega}$  mit  $C \subset \Omega$ , so dass  $C \cap \partial\Omega = \emptyset$  und  $C \cap \{0\} \times \mathbb{R} = \{(0, \lambda_0)\}$ .

1. Schritt: Die Zusammenhangskomponente  $C$  ist kompakt.  $f$  ist von der Form  $\text{id} + kpt$ , also nach Proposition 10.1 eigentlich, d.h. Urbilder (in beschränkten Mengen) von kompakten Mengen sind kompakt. Also ist  $(f|_{\bar{\Omega}})^{-1}(0)$  kompakt. Es gilt  $N = (f|_{\bar{\Omega}})^{-1}(0) \setminus (\{0\} \times \mathbb{R})$  und daher ist auch die abgeschlossene Teilmenge  $\bar{N} \cap \bar{\Omega}$  kompakt. Dann ist auch die Zusammenhangskomponente  $C$  kompakt.

2. Schritt: Zerlegung der Nullstellenmenge.

Zuächst wählen wir  $\delta > 0$  so, dass in dem Intervall  $\{0\} \times (\lambda_0 - 2\delta, \lambda_0 + 2\delta)$  der Punkt  $(0, \lambda_0)$  der einzige Verzweigungspunkt ist. Dies ist möglich, weil das Spektrum von  $T$  kompakt ist (siehe notwendige Bedingung für eine Verzweigung).

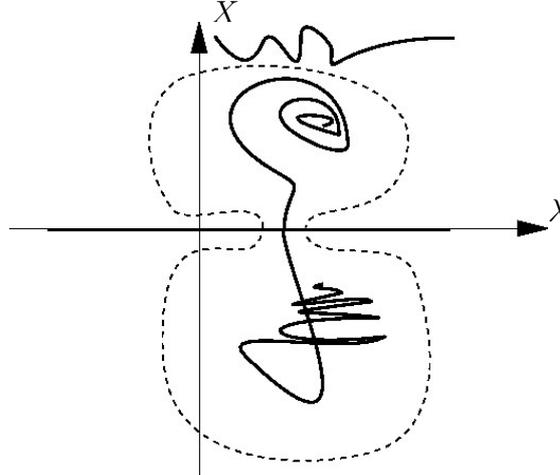


Figure 11.1.: Die offene Umgebung  $\Omega_0$  von  $C$

Die Anwendung eines topologischen Lemmas (siehe Lemma 11.2 unten) auf den metrischen Raum  $M = \bar{N} \cap \bar{\Omega}$  erlaubt es uns, die Menge  $M$  in zwei kompakte Teilmengen zu zerlegen.

*Resultat:* Es gibt zwei disjunkte, kompakte Mengen  $M_1, M_2 \subset M$ ,  $M_1 \cup M_2 = M$ , so dass  $C \subset M_1$  und es gilt: Jede zusammenhängende Menge  $D \subset M$  mit

$$D \cap (\partial\Omega \cup \mathbb{R} \setminus (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)) \neq \emptyset$$

ist enthalten in  $M_2$ .

Diese Aussage folgt durch Anwendung von Lemma 11.2 auf den metrischen Raum  $M$  (mit der induzierten Metrik des Raumes  $X \times \mathbb{R}$ ) mit den zwei Mengen  $A := C$  und  $B := M \cap (\partial\Omega \cup \mathbb{R} \setminus (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta))$ . Das Lemma liefert uns dann die disjunkten kompakten Mengen  $M_1, M_2$ , die insbesondere einen positiven Abstand haben.

Wir konstruieren nun eine offene Umgebung  $\Omega_0$  von  $M_1$ , so dass auf dem Rand von  $\Omega_0$  keine nichttrivialen Nullstellen von  $f$  liegen. Dazu wählen wir zunächst eine Umgebung von  $M_1$ , die  $M_2$  nicht trifft. Diese Menge modifizieren wir noch so, dass für ein kleines  $\rho > 0$  zusätzlich gilt

$$\bar{\Omega}_0 \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta],$$

$$B_\rho(0) \times (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \subset \Omega_0,$$

3. Schritt: Berechnung der Abbildungsgrade.

Mit der Notation

$$\Omega_0(\lambda) := \{(x, \lambda') \in \Omega_0 \mid \lambda' = \lambda\}$$

können wir Abbildungsgrade berechnen. Die Zahl

$$d(f(\cdot, \lambda), \Omega_0(\lambda), 0)$$

ist unabhängig von  $\lambda \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ . Wohlgermerkt, dies ist nicht nur die Homotopieeigenschaft (d4). Man verwendet zusätzlich, dass die Nullstellenmenge einen positiven Abstand zum Rand hat, um lokal das Gebiet konstant zu wählen. Formal wird dabei das Ausschneideaxiom (d5) verwendet.

Wir wählen nun zwei Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2$ , beide nahe genug an  $\lambda_0$  und mit  $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ . Wir wollen den obigen Grad an den zwei Stellen  $\lambda_i$  berechnen. Wegen (d5) gilt

$$\begin{aligned} d(f(\cdot, \lambda_i), \Omega_0(\lambda_i), 0) \\ = d(f(\cdot, \lambda_i), \Omega_0(\lambda_i) \setminus B_\rho(0), 0) + d(f(\cdot, \lambda_i), B_\rho(0), 0) \end{aligned}$$

Der erste Term der rechten Seite verschwindet, denn wir können  $\tilde{\lambda}_1 = \lambda_1$  soweit nach links verschieben (und  $\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2$  soweit nach rechts), dass die Mengen  $\Omega_0(\tilde{\lambda}_i) \setminus B_\rho(0)$  leer sind. Damit ist der Abbildungsgrad dann 0.

Der zweite Term der rechten Seite ist gerade der Index von  $f(\cdot, \lambda_i)$  in der 0. Nach Voraussetzung über die ungerade Vielfachheit von  $1/\lambda_0$  springt dieser Index. Dies liefert den gesuchten Widerspruch, denn die linke Seite ist gleich für  $i = 1, 2$ .  $\square$

**Lemma 11.2.** *Sei  $(M, d)$  ein kompakter metrischer Raum,  $A \subset M$  eine Zusammenhangskomponente und  $B \subset M$  abgeschlossen mit  $A \cap B = \{\}$ . Dann gibt es kompakte  $M_1 \supset A$ ,  $M_2 \supset B$ , so dass  $M = M_1 \cup M_2$  und  $M_1 \cap M_2 = \{\}$ .*

*Beweis.* Man verwendet den Begriff der  $\varepsilon$ -Ketten:  $a, b \in M$  sind durch eine  $\varepsilon$ -Kette verbindbar, falls es endlich viele Punkte  $x_1, \dots, x_n$  gibt mit  $x_1 = a$ ,  $x_n = b$ , und  $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon \forall k = 1, \dots, n-1$ .

Mit diesem Begriff setzen wir

$$A_\varepsilon := \{x \in M \mid \exists \varepsilon\text{-Kette von } a \in A \text{ nach } x\}.$$

Bild: Vielleicht nähert sich  $\bar{M} \setminus C$  an unendlich vielen Stellen  $C$ . Dann werden die Teile von  $\bar{M} \setminus C$ , die näher als  $\varepsilon$  heranreichen, in die Menge  $A_\varepsilon$  mitgenommen (obwohl es vielleicht keine Wegverbindung gibt).

Es gilt  $A \subset A_\varepsilon$  und  $A_\varepsilon$  ist offen (eine  $\varepsilon$ -Umgebung ist auch noch enthalten) und abgeschlossen (da es keine Kette nach  $z \in M \setminus A_\varepsilon$  gibt, kann es auch keine zu einem Punkt in  $B_\varepsilon(z)$  geben, also  $B_\varepsilon(z) \subset M \setminus A_\varepsilon$ ). Daher sind  $M_1 = A_\varepsilon$  und  $M_2 = M \setminus A_\varepsilon$  Kandidaten für die gesuchten Mengen. Es bleibt zu zeigen:  $B \subset M \setminus A_\varepsilon$  für  $\varepsilon > 0$  klein genug.

Wir nehmen das Gegenteil an; zu  $\varepsilon = \frac{1}{n}$  gibt es dann  $\varepsilon$ -Ketten  $X_n$ , die einen Punkt  $b_n$  aus  $B$  mit einem Punkt  $a_n$  aus  $A$  verbinden. Wegen Kompaktheit von  $A$  und  $B$  können wir  $a_n \rightarrow a_0 \in A$  und  $b_n \rightarrow b_0 \in B$  annehmen. Wir betrachten

$$M_0 := \{x \in M \mid \exists x^n \in X_n : x \text{ ist Häufungspunkt von } (x^n)_{n \in \mathbb{N}}\}.$$

Dann ist  $M_0$  abgeschlossen nach Definition, und daher kompakt. Angenommen,  $M_0$  wäre nicht zusammenhängend und könnte also in zwei abgeschlossene Teilmengen  $C_1$

und  $C_2$  zerlegt werden. Dann gilt  $\rho := \text{dist}(C_1, C_2) > 0$ . Für beliebige Punkte  $c_1, c_2$  und  $\varepsilon > 0$  gilt, dass die Punkte durch eine  $\varepsilon$ -Kette in  $M$  verbunden werden können (gehe von einem Punkt nahe  $c_1$  zu  $a$  und von einem Punkt nahe  $c_2$  zu  $a$  und mache daraus eine Gesamtkette). Wir wählen  $\varepsilon = \rho/3$  und finden in den Ketten Punkte  $x^n$ , die mindestens Abstand  $\rho/3$  zu beiden Mengen  $C_i$  haben. Diese Punkte haben einen Häufungspunkt, der in keiner der  $C_i$  liegt — ein Widerspruch zu  $C_1 \cup C_2 = M_0$ . Also ist  $M_0$  zusammenhängend.

Wir schließen  $M_0 \subset A$ , da  $A$  eine Zusammenhangskomponente ist und  $a_0 \in M_0$ . Es ist aber auch  $b_0 \in M_0$  nach Konstruktion und daher  $b_0 \in A \cap B$ , ein Widerspruch.  $\square$

## 11.2. Beispiel für globale Verzweigung

Wir betrachten auf dem Intervall  $(0, \pi)$  für  $u \in X := \{v \in C^2((0, \pi), \mathbb{R}) \mid v(0) = v(\pi) = 0\}$  die Gleichung

$$\partial_x^2 u + \lambda u - \Phi(\cdot, u(\cdot), \partial_x u(\cdot)) = 0. \quad (11.1)$$

Dabei sei  $\Phi : (0, \pi) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Nichtlinearität mit  $|\Phi(x, s, p)| \leq C(|s|^2 + |p|^2) \forall x, s, p$ . Der Laplace Operator  $\Delta : X \rightarrow C^0((0, \pi), \mathbb{R})$  ist invertierbar, durch Anwendung von  $T := \Delta^{-1}$  formen wir die Gleichung um in

$$f(u, \lambda) := u + \lambda T u - N(u) = 0.$$

Diese Gleichung erfüllt alle Voraussetzungen von Satz 9.6 und es gibt Verzweigungen in allen Eigenwerten, also in  $\lambda_k = -k^2, k = 1, 2, \dots$  (alle Eigenwerte sind einfach). Seien  $C_k$  die zugehörigen Zusammenhangskomponenten der Lösungsmenge. In diesem Beispiel können wir das Verhalten der Lösungsäste global bestimmen, weil man im eindimensionalen Nullstellen zählen kann.

**Satz 11.3.** *Für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist die Nullstellenmenge  $C_k$  der Gleichung (11.1) unbeschränkt in  $X \times \mathbb{R}$ . Sie besteht aus Funktionen  $u$  mit genau  $k - 1$  einfachen Nullstellen in  $(0, \pi)$ .*

*Beweis.* Sei  $S^k$  die Menge von Funktionen  $u \in X$  mit genau  $k - 1$  einfachen Nullstellen in  $(0, \pi)$  und  $\partial_x u(0) \neq 0, \partial_x u(\pi) \neq 0$ . Dann ist  $S^k$  offen in  $X$  und  $S^k \cap S^m = \emptyset$  für  $k \neq m$ . Für den Lösungszweig wissen wir lokal  $u(s) = s u_k + o(s)$ , wobei  $u_k(x) = \sin(kx)$  die Eigenfunktion zu  $\lambda_k = -k^2$  ist. Daher erfüllen  $u(s)$  aus dem  $k$ -ten Zweig  $u(s) \in S^k$ .

Angenommen, in  $C_k$  gäbe es Lösungen  $(u, \lambda) \notin S^k$ . Dann müßte es auch ein  $u \in C_k$  geben, das eine doppelte Nullstelle hat. Da  $u$  aber eine gewöhnliche Differenzialgleichung zweiter Ordnung erfüllt, wäre dann  $u \equiv 0$  (die Differenzialgleichung für  $u$  erlaubt die Eindeutigkeitsaussage mit Hilfe des Gronwallschen Lemmas). Damit wäre  $C_k$  wieder zum trivialen Ast zurückgekehrt, was weder in den  $\lambda_m, m \neq k$  (Anzahl der Nullstellen), noch in anderen Punkten möglich ist (sind keine Verzweigungspunkte).

Bemerke, dass die Äste 'nach oben' und 'nach unten' im Verzweigungsbild durch das Vorzeichen von  $\partial_x u(0)$  global unterschieden werden können.  $\square$

# 12. Hopf-Verzweigung

## 12.1. Aufgabenstellung

Wir betrachten wieder die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\partial_t x(t) = f(x(t), \lambda). \quad (12.1)$$

Der Punkt  $x_0$  sei eine stationäre Lösung für alle  $\lambda$ , es gelte also  $f(x_0, \lambda) = 0 \forall \lambda$ . Ohne Einschränkung nehmen wir immer  $x_0 = 0$  an. Wie schon in den letzten Kapiteln interessieren uns Punkte  $(x_0, \lambda_0)$ , in denen sich die Stabilität von  $x_0$  ändert, wenn der Parameter  $\lambda$  sich ändert.

Unsere Untersuchungen gelten nicht nur für gewöhnliche Differentialgleichungen. Auch partielle Differentialgleichungen werden mit den nachfolgenden Sätzen behandelt. Musterbeispiel ist eine Gleichung vom Typ  $\partial_t u = \Delta u + F(u)$ . Bei solchen Evolutionsgleichungen kann man dasselbe Objekt betrachten, wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, nämlich die Halbgruppe beziehungsweise die Zeit- $t$ -Abbildung.

Wir wollen hier keine Halbgruppentheorie entwickeln, sondern arbeiten mit ganz elementaren Begriffen. Eine Differentialgleichung wie zum Beispiel (12.1) definiert eine Zeit- $t$ -Abbildung; diese Abbildung ordnet einen Startwert  $\bar{x}$  dem Wert  $x(t)$  zu, wobei  $x(\cdot)$  die Lösung der Gleichung zum Parameter  $\lambda$  mit Startwert  $\bar{x}$  ist. Dies definiert eine Abbildung

$$X \ni \bar{x} \mapsto T(\bar{x}, t, \lambda) \in X. \quad (12.2)$$

Der Banachraum  $X$  ist ein  $\mathbb{R}^n$  im Fall einer gewöhnlichen Differentialgleichungen, im Fall einer partiellen Differentialgleichung kann oft  $X = L^2(\Omega)$  gewählt werden.

**Grundidee der Hopf-Verzweigung.** Wir betrachten zunächst eine lineare Gleichung für  $x(t) \in X = \mathbb{R}^2$ ,  $x = (x_1, x_2) = x(t, \lambda)$ , nämlich

$$\partial_t x = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} x. \quad (12.3)$$

Für den Parameter  $\lambda = 0$  hat diese Gleichung sehr spezielle Lösungen, nämlich  $x(t) = s(\sin(t), \cos(t))$ , wobei  $s \in \mathbb{R}$  ein beliebiger Vorfaktor ist. Wir finden also eine Schar von (nichttrivialen) periodischen Lösungen der Gleichung. Im Folgenden wollen wir eine Lösung der Form  $s(\sin(t + \varphi), \cos(t + \varphi))$  nicht als eine neue Lösung auffassen. All diese Lösungen (für verschiedene Parameter  $\varphi$ ) beschreiben dieselbe Kurve, sie wird nur anders parametrisiert. Wir können auch sagen, dass die Lösungen alle dieselben sind, nur phasenverschoben.

Für  $\lambda < 0$  spiralen alle Lösungen in die 0 hinein, für  $\lambda > 0$  spiralen alle Lösungen aus der 0 heraus. Dies ist eine typische Situation: Die stationäre Lösung  $x_0 = 0$  hat

für  $\lambda = 0$  ihre Stabilität verloren. Dabei sind keine weiteren stationären Lösungen entstanden, sondern periodische.

*Nichtlineare Gleichung.* Wir betrachten nun eine modifizierte Gleichung für  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , nämlich

$$\partial_t x = \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} x + \|x\|^2 x. \quad (12.4)$$

Für  $\lambda < 0$  hat diese Gleichung wieder periodische Lösungen, nämlich  $x(t) = s(\sin(t), \cos(t))$  mit  $s^2 + \lambda = 0$ . Wir finden also wieder eine Schar von (nichttrivialen) periodischen Lösungen der Gleichung.

Das Ergebnis dieser Einleitung kann in folgendem Bild zusammengefasst werden. Die Abbildung zeigt die Menge der  $(s, \lambda)$ , so dass  $(0, s)$  Startwert ist von einer periodischen Lösung zu  $f(\cdot, \lambda)$ . Die Nichtlinearität verbiegt den nichttrivialen Ast, aber die Struktur der Lösungsmenge bleibt erhalten.

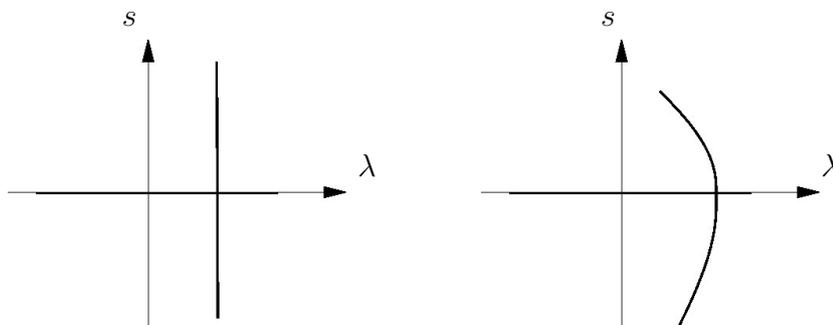


Figure 12.1.: Die Menge von Startwerten für periodische Lösungen im linearen und im nichtlinearen Fall

## 12.2. Fixpunkte der Zeit- $t$ -Abbildung

Unser Ziel ist ein Satz, der im wesentlichen Folgendes sagt: Wenn für  $\lambda = \lambda_0$  das linearisierte System nichttriviale periodische Lösungen hat, dann gibt es auch einen Ast von nichttrivialen periodischen Lösungen für das nichtlineare System.

Unser Beweis benutzt die Zeit- $t$ -Abbildung der nichtlinearen Gleichung,  $\bar{x} \mapsto T(\bar{x}, t, \lambda)$ . Wir nehmen immer an, dass  $x_0 = 0$  eine stationäre Lösung ist, also  $T(0, t, \lambda) = 0$ . Wenn man die Abbildung  $T$  gegeben hat, so kann man auch die Linearisierung betrachten, also

$$L(t, \lambda) : X \rightarrow X, \hat{x} \mapsto D_x T(0, t, \lambda) \langle \hat{x} \rangle .$$

Man kann aber auch ein anderes Objekt betrachten, nämlich die Zeit- $t$ -Abbildung der linearen Gleichung,

$$\bar{T}(t, \lambda) : X \rightarrow X, \hat{x} \mapsto x(t), \quad \partial_t x = D_x f(0, \lambda) \langle x \rangle, \quad x(0) = \hat{x} .$$

Die wichtige Beobachtung ist, dass die zwei Objekte übereinstimmen,  $\bar{T} = L$ . Der Beweis ist elementar: Man betrachtet die nichtlineare gewöhnliche Differenzialgleichung  $\partial_t T(\bar{x}, t) = f(T(\bar{x}, t), \lambda)$  und differenziert nach  $\bar{x}$  im Punkt 0 in eine Richtung  $\hat{x}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \partial_t L(t, \lambda) \langle \hat{x} \rangle &= D_x \partial_t T(0, t, \lambda) \langle \hat{x} \rangle = D_x f(T(0, t), \lambda) D_x T(0, t, \lambda) \langle \hat{x} \rangle \\ &= D_x f(0, \lambda) L(t, \lambda) \langle \hat{x} \rangle . \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass  $\hat{x} \mapsto L(t, \lambda) \langle \hat{x} \rangle$  die linearisierte Gleichung löst. Also gilt  $L(t, \lambda) = \bar{T}(t, \lambda)$ , wir haben die Zeit- $t$ -Abbildung der linearisierten Gleichung auf anderem Wege gefunden.

In der Situation der Hopf-Verzweigung ist der interessante Unterraum von  $X$  zweidimensional. In  $X = \mathbb{R}^2$  gibt es für  $\lambda = 0$  eine Familie von Startpunkten  $se_1 = (s, 0)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , die durch  $L$  für einen festen Zeitparameter (sagen wir,  $2\pi$ ) genau auf den Startpunkt  $(s, 0)$  abgebildet werden. Eine Nichtlinearität wird die Bahn verschieben, so dass sie nicht genau wieder  $(s, 0)$  trifft. Aber: Vergrößern von  $t$  schiebt den Zielpunkt in natürlichen Koordinaten nach oben, vergrößern von  $\lambda$  nach rechts oder links. Durch Anpassen dieser zwei Parameter treffen wir genau wieder  $(s, 0)$ . Dies ist die Grundlage, um Fixpunkte mit dem Satz über implizite Funktionen zu suchen.

Wir betrachten jetzt die allgemeine Situation:  $X$  sei ein Banachraum,  $T(x, t, \lambda)$  ein dynamisches System auf  $X$ , also eine Zeit- $t$ -Abbildung. Die Voraussetzung  $T(0, t, \lambda) = 0$  bedeutet, dass  $x_0 = 0$  eine stationäre Lösung ist.

**Lemma 12.1.** *Wir betrachten eine Abbildung  $T : X \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow X$  der Klasse  $C^2$  mit  $T(0, t, \lambda) = 0$  für alle  $t > 0$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Für die Linearisierung in der Null schreiben wir*

$$L(t, \lambda) : X \rightarrow X, \hat{x} \mapsto D_x T(0, t, \lambda) \langle \hat{x} \rangle .$$

Wir setzen voraus:

a)  $id - L(t_0, \lambda_0)$  ist Fredholm Operator vom Index 0 mit 2-dimensionalem Kern  $X_0 = \text{span}(u, v)$ . Entsprechend gibt es eine Projektion  $P$  auf ein Co-Bild  $Y_0$  von  $Y_1 = R(id - L(t_0, \lambda_0))$  mit  $\ker P = Y_1$ .

b) Mit dem Basisvektor  $u$  aus a) ist folgende Abbildung invertierbar:

$$D_{(t, \lambda)} PL(t_0, \lambda_0) \langle u \rangle : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow Y_0 .$$

Dann gibt es eine Schar von Fixpunkten von  $T$ : Für alle  $s \in \mathbb{R}$  mit hinreichend kleinem  $|s|$  finden wir Startwerte  $x(s) = su + x_1(s)$ ,  $x_1(s) \in X_1 \forall s$  mit  $x_1(s) = o(1)$ , Perioden  $t(s) = t_0 + o(1)$  und Parameter  $\lambda(s) = \lambda_0 + o(1)$ , so dass

$$T(x(s), t(s), \lambda(s)) = x(s) .$$

Falls  $T$  ein dynamisches System beschreibt, so bedeutet dies: Es gibt eine Schar nichttrivialer periodischer Lösungen.

*Beweis.* Wir führen zunächst eine Ljapunov-Schmidt Reduktion mit dem Parameterraum  $\Lambda = \mathbb{R}^2 \ni (t, \lambda)$  aus. Damit wird die Gleichung reduziert: Die Gleichung  $x - T(x, t, \lambda) = 0$  wird lokal genau dann von  $x$  gelöst, wenn

$$x = x_0 + x_1(x_0, t, \lambda),$$

$$\Phi(x_0, t, \lambda) := Px_0 - PT(x_0 + x_1(x_0, t, \lambda), t, \lambda) = 0.$$

Hierbei gilt  $x_1(0, t, \lambda) = 0$  und  $D_{x_0}x_1(0, t_0, \lambda_0) = 0$ . Wir machen den speziellen Ansatz  $x_0 = su$  und definieren uns eine neue Verzweigungsfunktion als

$$\Psi(s, t, \lambda) := \begin{cases} \frac{1}{s}\Phi(su, t, \lambda) & \text{für } s \neq 0 \\ D_x\Phi(0, t, \lambda)\langle u \rangle & \text{für } s = 0 \end{cases}. \quad (12.5)$$

Die  $\Phi$ -Gleichung ist äquivalent mit der  $\Psi$ -Gleichung insofern als dass die nicht-trivialen Nullstellen von  $\Phi$  sind genau die nichttrivialen Nullstellen von  $\Psi$  sind. Die Abbildung  $\Psi$  ist von der Klasse  $C^1$ . Wir haben eine spezielle Nullstelle von  $\Psi$ ,

$$\Psi(0, t_0, \lambda_0) = Pu - PL(t_0, \lambda_0)\langle u \rangle = 0.$$

Wir wollen nun auch für kleine  $s \neq 0$  lösen, wir wollen also nach  $(t, \lambda)$  auflösen. Dies geht mit dem Satz über implizite Funktionen, falls

$$D_{(t,\lambda)}\Psi(0, t_0, \lambda_0) = D_{(t,\lambda)}(Pu - PL(t, \lambda)\langle u \rangle)|_{(t_0, \lambda_0)} = -D_{(t,\lambda)}PL(t_0, \lambda_0)\langle u \rangle$$

invertierbar ist. Das war aber genau vorausgesetzt. □

## 12.3. Der Satz von Hopf

**Satz 12.2** (Hopf-Verzweigung). *Sei  $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  mit  $f(0, \lambda) = 0 \forall \lambda \in (-\delta, \delta)$ . Wir nehmen an:*

1. Imaginäre Eigenwerte: Die Linearisierung  $A(\lambda) := D_x f(0, \lambda)$  hat für  $\lambda = \lambda_0$  die konjugiert komplexen einfachen Eigenwerte  $\pm i\beta_0$ ,  $\beta_0 \in \mathbb{R}_+$ .
2. Resonanz: Alle Vielfachen  $ki\beta_0$  sind keine Eigenwerte von  $A(\lambda_0)$ .
3. Transversalität: Die  $C^1$ -Fortsetzung  $\alpha(\lambda) + i\beta(\lambda)$  des Eigenwertes  $i\beta_0$  erfüllt  $\partial_\lambda \alpha(\lambda_0) \neq 0$ .

Dann hat die Gleichung  $\partial_t x = f(x, \lambda)$  eine Schar von nichttrivialen periodischen Lösungen der Form  $x(t, s)$  zu Parametern  $\lambda(s) = \lambda_0 + o(1)$  mit Periode  $t(s) = 2\pi/\beta_0 + o(1)$  und Startwerten  $x(0, s) = su + o(s)$  für kleine  $s$ .

*Beweis.* Die Aussage ist genau die aus Lemma 12.1 für  $t_0 := 2\pi/\beta_0$  und  $T$  das dynamische System zu  $f$ . Wir müssen die Voraussetzungen a) und b) aus dem Lemma nachprüfen.

Wir betrachten nun die Komplexifizierung  $\mathbb{C}^n$  des Raumes  $\mathbb{R}^n$  und zerlegen  $\mathbb{C}^n$  in die verallgemeinerten Eigenräume von  $A$ . Zu einem Eigenvektor  $v$  mit Eigenwert  $\mu$  gehört die Evolution

$$v(t) := ve^{\mu t} \quad \text{löst} \quad \partial_t v(t) = Av(t).$$

Also wird der Kern von  $\text{id} - L(t_0, \lambda_0)$  aufgespannt von den Eigenvektoren von  $A$ , für die  $e^{t_0\mu} = 1$ , also für  $t_0 = 2\pi/\beta_0$  von den Eigenvektoren mit Eigenwerten  $ik\beta_0$ . Unter Annahmen 1. und 2. ist der Kern 2-dimensional.

Wir wählen nun zwei Eigenvektoren  $u, v$ , so dass  $Au = i\beta_0u$ ,  $Av = -i\beta_0v$ . Als entsprechende reelle Basisvektoren können  $w_1 := \text{Re } u$  und  $w_2 := \text{Im } u$  gewählt werden, für diese gilt  $Aw_1 = \text{Re } (Au) = \text{Re } (i\beta_0u) = -\beta_0\text{Im } u = -\beta_0w_2$  und ebenso  $Aw_2 = \beta_0w_1$ . Als Projektion  $P$  wählen wir die Projektion auf  $\text{span}(w_1, w_2) \subset X$ .

Wir setzen  $u$  und  $v$  fort zu Eigenvektoren  $u(\lambda), v(\lambda)$  mit  $Pu(\lambda) = u, Pv(\lambda) = v$  zu Eigenwerten  $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$ . Für diese wollen wir  $D_{(t,\lambda)}PL(t_0, \lambda_0) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow X_0$  aus dem Lemma berechnen. Es gilt

$$L(t, \lambda) : u(\lambda) \mapsto e^{(\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda))t} u(\lambda),$$

also ebenso auch für die Projektion  $PL$ . Wir differenzieren nach  $t$  und  $\lambda$  und erhalten

$$\begin{aligned} \partial_t PL(t_0, \lambda_0) \langle u \rangle &= i\beta_0 u, \\ \partial_\lambda PL(t_0, \lambda_0) \langle u \rangle &= (\alpha'(\lambda_0)t_0 + i\beta'(\lambda_0))u. \end{aligned}$$

In der Schreibweise mit reellen Basisvektoren  $w_1$  und  $w_2$  lautet dieses Ergebnis

$$\begin{aligned} \partial_t PL(t_0, \lambda_0) \langle w_1 \rangle &= -\beta_0 w_2, \\ \partial_\lambda PL(t_0, \lambda_0) \langle w_1 \rangle &= \alpha'(\lambda_0)t_0 w_1 - \beta'(\lambda_0)w_2. \end{aligned}$$

Wegen der Transversalität (3)  $\alpha'(\lambda_0) \neq 0$  ist die Abbildung  $D_{(t,\lambda)}PL(t_0, \lambda_0) \langle w_1 \rangle : \mathbb{R}^2 \rightarrow X_0 = \text{span}(w_1, w_2)$  invertierbar. Dies war zu zeigen.  $\square$

*Anmerkung zum Beweis:* Unser Beweis rechtfertigt die Vorstellung, dass wir im  $\mathbb{R}^2$  im Punkt  $(s, 0)$  starten, und nach Zeit  $t$  wieder in  $(s, 0)$  sein wollen. Durch Wahl der beiden Parameter  $t$  und  $\lambda$  können wir dies erreichen.

**Ein Beispiel.** Wir betrachten den Oszillator

$$y'' + (y')^3 - \lambda y' + y = 0.$$

Dies kann als System geschrieben werden: Mit  $u = (y, y')$  erhalten wir

$$u' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 0 \\ u_2^3 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind  $\rho \in \mathbb{C}$  mit

$$-\rho(-\rho + \lambda) + 1 = 0,$$

also

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{2}(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4}).$$

Für  $\lambda = \lambda_0 = 0$  finden wir konjugiert komplexe Eigenwerte mit

$$\partial_\lambda \text{Re } \rho_{1,2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Es geschieht also eine Hopf-Verzweigung in  $\lambda = 0$ ; es gibt nichttriviale periodische Lösungen kleiner Amplitude in der Nähe von  $\lambda_0$ .

## 12.4. Ein alternativer Beweis der Hopf-Verzweigung

Eher im Geiste dieser Vorlesung wäre ein anderer Beweis für die Existenz nichttrivialer periodischer Lösungen. Wir könnten einen Raum von Funktionen  $u : t \mapsto u(t)$  definieren und in diesem Raum die Gleichung

$$F(u, \lambda) := \partial_t u(\cdot) - f(u(\cdot), \lambda) = 0$$

betrachten. Gesucht sind periodische Lösungen, wir sollten also einen Funktionenraum periodischer Funktionen wählen. Ein Problem ist, dass die Periodenlänge  $T$  auch unbekannt ist. Daher skalieren wir die Gleichung um:

$$U(\tau) := u(T \cdot \tau), \quad \partial_\tau U(\tau) = T \cdot f(U(\tau), \lambda).$$

Wir suchen  $T$ -periodische Lösungen  $u$ , also 1-periodische Lösungen  $U$ . Also:

*Aufgabe:* Finde  $\lambda$  nahe  $\lambda_0$  und  $T$  nahe  $T_0$  und nichttriviale

$$\begin{aligned} U \in X &:= C_{per}^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \\ &= \{u \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \mid u(1) = u(0), \partial_t u(1) = \partial_t u(0)\}, \end{aligned}$$

welche für

$$\begin{aligned} F : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow Y := C_{per}^0([0, 1], \mathbb{R}^n), \\ F(U, \lambda, T) &:= \partial_t U - T \cdot f(U, \lambda) \end{aligned}$$

die Gleichung  $F(U, \lambda, T) = 0$  lösen.

Wir können nun die Hopf-Verzweigung wie die vorherigen Verzweigungen (also als stationäre Verzweigung) auffassen kann. Wieder bestimmen wir den Kern der Linearisierung. Diesmal ist dieser Kern zweidimensional:

$$\begin{aligned} U_1 : t &\mapsto w_1 \cdot \sin(2\pi t) + w_2 \cdot \cos(2\pi t), \\ U_2 : t &\mapsto w_1 \cdot \cos(2\pi t) + w_2 \cdot \sin(2\pi t), \\ \ker D_U F(0, \lambda_0, T_0) &= \{U_1, U_2\}, \end{aligned}$$

wobei  $w_1$  und  $w_2$  Vektoren in  $X$  sind, bezüglich denen die Matrix  $A = D_x f(0, \lambda_0)$  die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta_0 \\ \beta_0 & 0 \end{pmatrix}$$

hat.

Der Kern der Linearisierung von  $F$  ist also 2-dimensional, dafür müssen wir auch nach 2 Parametern  $T$  und  $\lambda$  auflösen. Dies können wir nicht mit unseren früheren Sätzen tun, da dort ungerade Dimensionen betrachtet wurden. Der Zweidimensionalität liegt eine besondere Symmetrie von  $F$  zugrunde:  $F$  bildet Zeit- $s$ -translatierte Funktionen wieder auf ebenso Zeit- $s$ -translatierte rechte Seiten ab. Daher besteht auch der Kern aus einer Funktion und ihren Zeit-Translationen, auch die nichttrivialen Lösungen sind ein Symmetrieorbit einer einzigen Funktion.

Man kann diese Ideen zu einem Beweis machen, indem man die Symmetrie 'herausdividiert'. Daher kann man Hopf-Verzweigung auch verstehen als eine stationäre Verzweigung mit einer Symmetrie. Der Vorteil des von uns durchgeführten Beweises ist, dass er problemlos auch auf z.B. die Wärmeleitungsgleichung anwendbar ist, denn das zugehörige dynamische System hat sehr schöne Eigenschaften (z.B. Kompaktheit).

# Bibliography

- [1] H.-W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1985.
- [2] S.N. Chow and J.K. Hale. *Methods of Bifurcation Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 1982.
- [3] M.G. Crandall and P.H. Rabinowitz. The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 67:53–72, 1978.
- [4] K. Deimling. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer, 1985.
- [5] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 224 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1983.
- [6] W. Gromes. Ein einfacher Beweis des Satzes von Borsuk. *Math. Z.*, 178:399–400, 1981.
- [7] W. Jäger. Nichtlineare Funktionalanalysis. Mitschrift der Vorlesung des WS 1990/1991.
- [8] Chr. Melcher. Nonlinear Analysis. Skript, im Netz verfügbar.
- [9] L. Nirenberg. Topics in nonlinear functional analysis. Courant Institute of Mathematical Sciences, 1974.
- [10] P. Rabinowitz. A global theorem for nonlinear eigenvalue problems and applications. In *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*.
- [11] M.A. Krasnosel'skii. *Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations*. Macmillan, 1964.
- [12] M. Ruzicka. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer.
- [13] B. Schweizer. *Partielle Differentialgleichungen*. Springer, 2013.

# Index

- Atlas mit 3 Karten, 31
- Brouwer, 31
- Crandall-Rabinowitz, 79
- Einfache  $K$ -Eigenwerte, 76
- Fixpunktsatz
  - Schauder, 38
- Fortsetzung einfacher Eigenwerte, 77
- Fortsetzungssatz von Tietze, 24
- Fredholm-Alternative, 61
- Fredholm-Operator, 59
- Gebietsinvarianz, 30
- Globale Inverse, 53
- Hinreichende Bedingung für Verzweigung, 66
- Homotopie, 10
- Hopf-Verzweigung, 90
- Implizite Funktionen, 51
- Index einer Lösung, 43
- Kompakte Abbildung
  - Charakterisierung mit Folgen, 34
  - endlichdimensionale Approximation, 34
- Konvexe Hülle, 37
- Krasnoselskii, 68
- Lemma von Sard, 15
- Ljapunov-Schmidt Reduktion, 61
- Notwendige Bedingung für Verzweigung, 65
- Peano, 39
- Periodische Lösungen, 32
- präkompakt, 35
- Rabinowitz, 83
- Rouché, 22
- Satz vom Igel, 27
- Satz vom Wetter, 29
- Satz von Borsuk, 28
- Schauder, 14
- Schauder'scher Fixpunktsatz, 38
- Schinken-Käse-Sandwich, 29
- Tietze, Fortsetzungssatz, 24
- Verzweigung im einfachen Eigenwert, 70