

Die Helmholtzgleichung

Konstante Koeffizienten und periodische Medien

Ben Schweizer

Skript für das Sommersemester 2026

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	5
I. Grundlagen	8
2. Fredholmoperatoren und Spektralsatz	9
2.1. Eigenschaften von Fredholmoperatoren	9
2.2. Spektralsatz für kompakte Operatoren	12
3. Laplace-Beltrami Operator und Kugelfunktionen	18
3.1. Der Laplace-Beltrami Operator	18
3.2. Kugelfunktionen	20
II. Die Helmholtzgleichung mit konstanten Koeffizienten	22
4. Beschränkte Gebiete	23
4.1. Spektrum elliptischer Operatoren	23
4.2. Die Helmholtzgleichung im beschränkten Gebiet	24
5. Außenraumgebiete	26
5.1. Das Lemma von Rellich	26
5.2. Sommerfeld-Bedingung und Eindeutigkeit	31
5.3. Darstellungsformeln und Existenz	34
III. Die Helmholtzgleichung mit periodischen Koeffizienten	41
6. Floquet-Bloch Transformation	42
6.1. Die Transformation und ihre Inverse	42
6.2. Quasiperiodische Funktionen, Erweiterungen	45
7. Periodische Wellenleiter	48
7.1. Quasiperiodische Probleme	48
7.2. Spektralaussagen für den Wellenleiter	54
8. Strahlungsproblem im Wellenleiter	58
8.1. Familien von Operatoren	58
8.2. Existenzresultate	64

1. Einführung

Wellengleichung

Die lineare Wellengleichung zweiter Ordnung lautet, mit einer Konstanten $c > 0$,

$$\partial_t^2 u = c^2 \Delta u. \quad (1.1)$$

Sie wird als einfaches Modell in vielen physikalischen Anwendungen benutzt, zum Beispiel in der Beschreibung elastischer Materialien, der Ausbreitung von Schallwellen oder elektromagnetischen Wellen.

Der eindimensionale Fall ist ein Modell für die Schwingungen einer Saite. Wenn $u(x, t)$ die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage zur Zeit $t > 0$ an einem Referenzpunkt $x \in \mathbb{R}$ beschreibt, so ist $\Delta u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t)$ ein Maß für die Krümmung an diesem Punkt und damit ein Maß für die rücktreibende Kraft. Das Newton'sche Gesetz liefert daher für ein $c > 0$ die eindimensionale Version

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u. \quad (1.2)$$

Im Ganzraumproblem suchen wir $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. In Analogie zu gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sehen wir Anfangsbedingungen für die Werte und die ersten Zeitableitungen vor,

$$u(., 0) = u_0, \quad \partial_t u(., 0) = u_1. \quad (1.3)$$

Zwei Lösungen der Gleichung (1.2) lassen sich elementar angeben. Für beliebige Funktionen $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erfüllen

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) \quad \text{und} \quad u(x, t) = \psi(x - ct) \quad (1.4)$$

die Wellengleichung. Dies kann durch zweifaches Differenzieren verifiziert werden. Durch Superposition der Elementarlösungen können beide Anfangsbedingungen aus (1.3) erfüllt werden.

Helmholtzgleichung

Oft ist bei Wellengleichungen ein Separationsansatz $u(x, t) = v(x)w(t)$ sinnvoll. Wir machen den Ansatz einer Schwingung mit einer festen Frequenz $\omega > 0$ und setzen $w(t) = e^{-i\omega t}$. Wenn $u(x, t) = v(x)w(t)$ die Wellengleichung $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ löst, so löst v die Helmholtzgleichung

$$-c^2 \Delta v = \omega^2 v \quad \text{in } \Omega. \quad (1.5)$$

Umgekehrt liefert jede Lösung v der Helmholtzgleichung (1.5) eine Lösung $u(x, t) = v(x)e^{-i\omega t}$ der Wellengleichung (Anfangswerte werden allerdings im Allgemeinen nicht erfüllt).

Man kann auch mit einer Fourier-Transformation die Helmholtzgleichung herleiten: Sei u eine Lösung der Wellengleichung und $\hat{u} = \hat{u}(x, \omega)$ die (in der Zeit) Fouriertransformierte von u . Dann übersetzt sich jede Zeitableitung von u in eine Multiplikation von $\hat{u}$ mit dem Faktor $i\omega$. Die Funktion $\hat{u}(\cdot, \omega) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist also Lösung der Helmholtzgleichung (1.5). Dies lässt sich auch umkehren: Falls wir für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ die Helmholtzgleichung mit $\hat{u}(\cdot, \omega)$ lösen können, so finden wir eine Funktion $\hat{u} = \hat{u}(x, \omega)$, deren Fourier-Rücktransformierte eine Lösung der Wellengleichung ist. Anfangswerte können so allerdings nicht vorgegeben werden.

Wenn wir eine Wellengleichung mit Quellen $F(x, t) = f(x)e^{-i\omega t}$ betrachten, also $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u + F$, so finden wir mit dem Ansatz $u(x, t) = v(x)e^{-i\omega t}$ eine Lösung, falls v die Helmholtzgleichung mit der rechten Seite f erfüllt,

$$-c^2 \Delta v - \omega^2 v = f \quad \text{in } \Omega. \quad (1.6)$$

Erste Beispiele. Man sucht erste Lösungen immer in der Form $v(x) = e^{ikx}$ oder $v(x) = \sin(kx)$. Im Ganzraum ist das schon deswegen sinnvoll, weil man auch in der Ortsvariablen x mit einer Fouriertransformation eine beliebige Funktion aus solchen e^{ikx} -Basisfunktionen zusammensetzt.

Tatsächlich gilt: Die Funktionen $v(x) = \sin(kx)$ und $v(x) = \cos(kx)$ sind Lösungen der Helmholtzgleichung (1.5) im Eindimensionalen und für den Ganzraum, also für $\Omega = \mathbb{R}$. Mit der Wellenzahl k müssen wir $c^2 k^2 = \omega^2$ erfüllen, also $k = \pm\omega/c$. Es ist sinnvoll, die physikalischen Einheiten im Blick zu haben: Die Einheit von ω ist Hertz, also $1/s$. Die Einheit von k ist $1/m$. Tatsächlich sollen die Ausdrücke kx und ωt immer frei von Einheiten sein, denn wir setzen sie zum Beispiel in die Sinusfunktion ein. Für c ergibt sich die Einheit m/s , also die Einheit für Geschwindigkeiten.

Zwei andere Lösungen derselben Gleichung in derselben Situation sind $v(x) = e^{ikx}$ und $v(x) = e^{-ikx}$. Die komplexen Lösungen lassen sich durch Superposition aus den reellen Lösungen konstruieren und umgekehrt.

Wenn wir eine Lösung physikalisch interpretieren wollen, so müssen wir immer eine reelle Funktion konstruieren. Hier ergeben sich interessante Lösungen der Wellengleichung aus den obigen Beispielen. Wenn wir aus $v(x) = \sin(kx)$ eine Lösung der Wellengleichung machen wollen, so betrachten wir $u(x, t) = v(x)e^{-i\omega t}$. Wenn wir daraus eine physikalisch relevante Funktion extrahieren wollen, so können wir zum Beispiel den Realteil betrachten, also

$$U(x, t) := \operatorname{Re} u(x, t) = \operatorname{Re} v(x)e^{-i\omega t} = \sin(kx) \cos(\omega t).$$

Dies beschreibt eine stehende Welle, die "Bäuche" sind immer bei den Punkten $\pi/(2k) + \mathbb{Z}\pi/k$. Die Frequenz der Schwingung ist ω . Die räumliche Struktur ist durch k bestimmt; wir erinnern an die Relation $c^2 k^2 = \omega^2$.

Wenn wir denselben Prozess mit der Lösung $v(x) = e^{ikx}$ der Helmholtzgleichung durchführen, so erhalten wir $u(x, t) = v(x)e^{-i\omega t} = e^{i(kx - \omega t)} = e^{ik(x - ct)}$ als Lösung der Wellengleichung. Man vergleiche diese Lösung auch mit (1.4). Eine physikalisch relevante Funktion wäre dann zum Beispiel

$$U(x, t) := \operatorname{Re} u(x, t) = \operatorname{Re} e^{ik(x - ct)} = \cos(k(x - ct)).$$

Dies ist eine nach rechts wandernde Welle mit Geschwindigkeit c . Die Lösung $v(x) = e^{-ikx}$ der Helmholtzgleichung liefert eine nach links wandernde Welle.

Wenn man die Wellengleichung in verschiedenen Materialien betrachtet, so ergeben sich typischerweise Gleichungen von der Form

$$\rho \partial_t^2 u = \nabla \cdot (a \nabla u), \quad (1.7)$$

wobei $\rho = \rho(x)$ eine lokale Dichte beschreibt und $a = a(x)$ eine Steifigkeit des Materials. Entsprechend ergeben sich Koeffizienten in der Helmholtzgleichung (1.6). Der zeithomogene Ansatz kann weiterhin durchgeführt werden, weil die Materialparameter nicht von der Zeit abhängen. Es ergibt sich

$$-\nabla \cdot (a \nabla v) - \omega^2 \rho v = f \quad \text{in } \Omega. \quad (1.8)$$

Höhere Dimension, konstante Koeffizienten. Lösungen im Ganzraum $\mathbb{R}^n$ kann man konstruieren, indem man Lösungen nur von einer der Richtungen abhängen lässt. Für $n = 3$ ist zum Beispiel $v(x_1, x_2, x_3) = \sin(kx_1)$ eine solche planare Lösung der Helmholtzgleichung (1.5), sie entspricht einer stehenden Welle der Wellengleichung. Die Helmholtz-Lösung $v(x_1, x_2, x_3) = e^{ikx_1}$ mit der zeitlichen Abhängigkeit $e^{-i\omega t}$ entspricht einer planaren laufenden Welle in x_1 -Richtung.

Eine Verallgemeinerung ist, einen beliebigen Wellenvektor $k \in \mathbb{R}^n$ zu verwenden und die Lösung in der Form $v(x) = e^{ik \cdot x}$ zu suchen. Die Anfangsbedingung $\partial_t u|_{t=0} = 0$ wird erfüllt von $u(x, t) = e^{ik \cdot x} \cos(\omega t)$. Für $\omega = c|k|$ ist u tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung. Indem man nun für alle $k \in \mathbb{R}^n$ solche Lösungen kombiniert, erhält man

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(k) e^{ik \cdot x} \cos(c|k|t) dk$$

Dies liefert tatsächlich eine Lösung der Wellengleichung in $\mathbb{R}^n$ für $u_1 = 0$ und beliebiges u_0 (die Theorie der Fourier-Transformation besagt, dass jedes u_0 durch Überlagerung von $e^{ik \cdot x}$ -Funktionen geschrieben werden kann). Dies zeigt, dass die Analyse von $e^{ik \cdot x}$ -Wellen tatsächlich viel Information liefert.

Die Helmholtzgleichung ist vor allem aufgrund von Resonanzphänomenen interessant, das einfachste Beispiel ist der Helmholtz-Resonator, siehe [11]. In periodischen Medien können interessante Phänomene beobachtet werden, wir erwähnen hier für die Mathematik [12, 8].

Übungen

Übung 1.1 (Eindimensionale Wellengleichung). *Wir betrachten die Wellengleichung $\partial_t^2 u = c^2 \Delta u$ in einer Raumdimension.*

(a) Finden Sie für beliebige glatte Anfangsdaten $u(., 0) = u_0$ und $\partial_t u(., 0) = u_1$ eine Lösung der Form $u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$ mit geeigneten φ und ψ .

(b) Zeigen Sie, dass auch für $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Funktion $u(x, t) = \varphi(x + ct)$ eine distributionelle Lösung der Gleichung in $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ ist.

Übung 1.2 (Wellengleichung im beschränkten Gebiet). *Für das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ wählen wir die Eigenfunktionen $(\psi_k)_k$ des Laplace-Operators (Dirichlet-Randdaten) als Basis von $L^2(\Omega)$. Geben Sie damit die Lösung der Wellengleichung auf Ω für Anfangsdaten $u(., 0) = u_0$ und $\partial_t u(., 0) = u_1$ und homogenen Dirichlet-Randdaten an.*

Teil I.

Grundlagen

2. Fredholmoperatoren und Spektralsatz

2.1. Eigenschaften von Fredholmoperatoren

Dieser Abschnitt ist ähnlich zu Abschnitt 7 meines Skriptes “Nichtlineare Analysis” (online). Daher: Für weitere Zusammenhänge siehe dort.

Fredholmoperatoren sind in gewisser Weise das Gegenstück zu kompakten Operatoren. Während die kompakten Operatoren bis auf endlich viele Komponenten nahe der Null sind, sind die Fredholmoperatoren im Wesentlichen nahe der Identität. Wir betrachten stetige lineare Abbildungen $L : X \rightarrow Y$ zwischen Banachräumen, also Elemente $L \in \mathcal{L}(X, Y)$. Wir bezeichnen mit $\ker(L)$ den Kern des Operators, $\ker(L) := \{x \in X \mid Lx = 0\}$, und mit $R(L) := L(X) = \{Lx \mid x \in X\}$ das Bild des Operators.

Definition 2.1 (Fredholmoperator). *Ein Operator $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ heißt Fredholmoperator, falls $R(L)$ abgeschlossen ist und*

$$\dim \ker(L) < \infty \quad \text{und} \quad \operatorname{codim} R(L) < \infty.$$

Die zweite Bedingung heißt, dass es eine Zerlegung $Y = Y_0 \oplus R(L)$ gibt mit endlich-dimensionalem Y_0 . Die Codimension $\operatorname{codim} R(L)$ ist die minimale Dimension von Y_0 . Die ganze Zahl $\dim \ker(L) - \operatorname{codim} R(L)$ heißt der Index des Fredholmoperators.

Ein wichtiges Resultat der Funktionalanalysis ist der folgende Satz vom abgeschlossenen Komplement (siehe z.B. [1], Satz 7.3).

Satz 2.2 (Satz vom abgeschlossenen Komplement). *Sei X ein Banachraum, $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, und $Z \subset X$ ein Unterraum mit $X = Y \oplus Z$. Dann sind äquivalent:*

- (a) *Es gibt eine stetige Projektion auf Y mit Kern Z , also ein Element $P \in \mathcal{L}(X)$ mit $P \circ P = P$, $R(P) = Y$ und $\ker(P) = Z$.*
- (b) *Z ist abgeschlossen.*

Die eine Richtung in diesem Satz ist trivial, nämlich (a) $\Rightarrow$ (b): Falls P stetig ist, so ist $Z = P^{-1}(\{0\})$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen.

Zur Voraussetzung an Y : Mit einer Projektion P wie in (a) ist auch die Projektion $Q = \operatorname{id} - P$ stetig, also ist auch $Y = \ker Q$ abgeschlossen. Eine Projektion wie in (a) kann also tatsächlich nur für abgeschlossene Unterräume Y existieren.

Der interessante Teil des Satzes lautet: "Ist $Y \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum mit abgeschlossenem Komplement, so gibt es eine stetige Projektion auf Y ."

Für eine direkte Summe sind die Projektionen etwas sehr Konkretes: Jedes Element $x \in X$ kann eindeutig geschrieben werden als $x = y + z$ mit $y \in Y$ und $z \in Z$. Die Projektion P ist gegeben durch $P(x) = y$.

Bemerkungen zu Definition 2.1: (i) Sei X ein Banachraum und X_0 ein endlichdimensionaler Teilraum. Dann gibt es eine stetige Projektion auf X_0 . Insbesondere hat X_0 ein abgeschlossenes Komplement.

Beweis von (i): Sei $X_0 = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$ und $\lambda_k : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ die linearen Funktionale mit $\lambda_k(e_l) = \delta_{kl}$. Setze mit Hahn-Banach λ_k fort zu stetigen linearen Funktionalen auf X . Dann ist durch

$$Px := \sum_{k=1}^n \lambda_k(x) e_k$$

eine stetige lineare Projektion von X auf X_0 definiert.

Insbesondere gilt für Fredholmoperatoren L und $X_0 = \ker(L)$: Wir können die Zerlegung $X = X_0 \oplus X_1$ immer so wählen, dass der Raum X_1 abgeschlossen ist.

(ii) Für einen Fredholmoperator L sei $X = X_0 \oplus X_1$ eine Zerlegung von X mit $X_0 = \ker(L)$ und X_1 abgeschlossen. Dann ist der Operator $L_1 := L|_{X_1} : X_1 \rightarrow R(L)$ stetig invertierbar. Tatsächlich ist nach Definition der Unterräume der Operator bijektiv. Wegen der Abgeschlossenheit der Räume folgt die stetige Invertierbarkeit aus dem Satz über die inverse Abbildung.

(iii) Die Abgeschlossenheit des Bildes $R(L)$ muss in der Definition des Fredholmoperators gar nicht gefordert werden, sie folgt schon aus den anderen Eigenschaften. Dies wird auch als Satz von Kato bezeichnet.

Beweis von (iii): Sei $X = X_0 \oplus X_1$ mit $X_0 = \ker L$ endlichdimensional und X_1 abgeschlossen. Zudem gelte $Y = Y_0 \oplus Y_1$ mit $Y_1 = R(L)$ und endlichdimensionalem Y_0 . Wir betrachten den erweiterten Operator $\tilde{L} : X_1 \times Y_0 \rightarrow Y$, $(x_1, y_0) \mapsto Lx_1 + y_0$. Dieser Operator ist linear und stetig zwischen Banachräumen. Außerdem ist der Operator bijektiv: $0 = Lx_1 + y_0 \in Y_1 \oplus Y_0$ impliziert $Lx_1 = 0$ und $y_0 = 0$ und daher auch $x_1 \in \ker(L) \cap X_1 = \{0\}$. Umgekehrt hat ein beliebiges Element $y = y_1 + y_0 \in Y_1 \oplus Y_0$ ein Urbild unter $\tilde{L}$, es ist gegeben durch y_0 und ein Urbild von $y_1 \in Y_1 = R(L)$. Als bijektiver linearer stetiger Operator zwischen Banachräumen hat $\tilde{L}$ eine stetige Inverse $B := \tilde{L}^{-1} : Y \rightarrow X_1 \times Y_0$. Also ist

$$R(L) = L(X_1) = \tilde{L}(X_1 \times \{0\}) = B^{-1}(X_1 \times \{0\})$$

abgeschlossen.

Einen ersten Zusammenhang zwischen Fredholmoperatoren und kompakten Operatoren liefert der folgende Satz.

Lemma 2.3 (Fredholm ist Identität plus kompakt). *Sei $L : X \rightarrow Y$ Fredholmoperator mit Index 0. Dann existiert ein Banachraumisomorphismus $I : Y \rightarrow X$, so dass $I \circ L$ von der Form $I \circ L := \text{id} + K$ ist mit $K \in \mathcal{L}(X)$ kompakt. Man kann sogar erreichen, dass K endlichdimensional ist.*

Beweis. Wir verwenden wieder $\tilde{L} : X_1 \times Y_0 \rightarrow Y$, $(x_1, y_0) \mapsto Lx_1 + y_0$ mit der stetigen Inversen $B := \tilde{L}^{-1} : Y \rightarrow X_1 \times Y_0$. Die erste Komponente des Operators $\Phi := (\Phi_1, \Phi_2) := B \circ L : X \rightarrow X_1 \times Y_0$ ist, aufgefasst als $\Phi_1|_{X_1} : X_1 \rightarrow X_1$, die Identität.

Die endlichdimensionalen Teilräume X_0 und Y_0 haben dieselbe Dimension und sind daher isomorph. Mit einem solchen Isomorphismus kann $B : Y \rightarrow X_1 \times Y_0$ auf dem Teil Y_0 des Bildraumes verkettet werden, um einen Banachraumisomorphismus $I : Y \rightarrow X_1 \times X_0$ zu erhalten. Dieser erfüllt das Gewünschte. $\square$

Fredholmalternative

Die Eigenschaft von Fredholmoperatoren aus Lemma 2.3 kann im Wesentlichen umgekehrt werden, sie liefert also eine Charakterisierung von Fredholmoperatoren mit Index 0. Wieder gilt die Aussage nur bis auf eine Isomorphie.

Satz 2.4 (Identität plus kompakt ist Fredholm). *Falls $K \in \mathcal{L}(X, X)$ ein kompakter Operator ist, so ist $L := id + K$ ein Fredholmoperator mit Index 0.*

Beweis. Siehe Alt [1], Nr. 8.15. Wir beweisen den Satz hier nicht; für selbstadjungierte Operatoren ist er ein Corollar aus dem Spektralsatz 2.8. $\square$

Der Satz liefert als Corollar die berühmte Fredholm-Alternative.

Corollar 2.5 (Fredholm-Alternative). *Sei $\lambda \neq 0$ und $K \in \mathcal{L}(X, X)$ kompakt. Dann gilt die folgende Fredholm-Alternative*

*Entweder hat die Gleichung $(\lambda - K)x = 0$ eine Lösung $x \neq 0$,
oder der Operator $(\lambda - K) : X \rightarrow X$ ist invertierbar.*

Bemerkung. Die Alternative liefert auch: Entweder hat die Gleichung $(\lambda - K)(x) = 0$ eine nichttriviale Lösung x oder die Gleichung $(\lambda - K)(x) = f$ hat für jedes $f \in X$ eine eindeutige Lösung $x \in X$.

Eine nochmals andere Formulierung als Äquivalenz ist:

$$\exists (\lambda - K)^{-1} : X \rightarrow X \iff \exists x \neq 0 : (\lambda - K)(x) = 0 \quad (2.1)$$

In dieser Äquivalenz ist die Richtung “ $\Leftarrow$ ” trivial, die interessante Richtung ist “ $\Rightarrow$ ”.

Bei dieser Formulierung sieht man die Verwandtschaft mit einer Spektralaussage: Wenn λ ein Spektralwert von K ist, also $(\lambda - K)^{-1}$ nicht existiert, dann muss λ ein Eigenwert von K sein, also ein $x \neq 0$ mit $(\lambda - K)(x) = 0$ existieren.

Beweis von Corollar 2.5. Der Operator $L := \lambda - K = \lambda id - K$ ist nach Satz 2.4 ein Fredholmoperator mit Index 0 (ein Faktor ungleich Null verändert die Fredholm-Eigenschaften nicht). Wenn der Operator $L = \lambda - K$ invertierbar ist, dann ist das einzige Urbild der Null die Null. Umgekehrt: Falls $\ker(L) = \{0\}$, so gilt $R(L) = X$ nach der Definition des Index von Fredholmoperatoren. $\square$

Nach den bisherigen Überlegungen zu Fredholmoperatoren ist das nachfolgende Lemma keine Überraschung.

Lemma 2.6 (Fredholm plus kompakt ist Fredholm). *Sei $L : X \rightarrow Y$ ein Fredholm-operator und*

$$K : X \rightarrow Y \text{ kompakt,}$$

beide linear und stetig. Dann ist der Operator

$$L + K : X \rightarrow Y$$

ein Fredholmoperator. Der Index von $L + K$ stimmt mit dem Index von L überein.

Beweis. Durch triviales Hinzufügen einer endlichdimensionalen Komponente zu einem der Banachräume X oder Y können wir einen beliebigen Fredholmoperator so modifizieren, dass er den Index 0 hat. Wir können daher im Folgenden ohne Einschränkung annehmen, dass L den Index 0 hat.

Wir müssen zeigen, dass der Operator $L + K$ auch Fredholm mit Index 0 ist. Lemma 2.3 liefert die Existenz eines Isomorphismus $I : Y \rightarrow X$, so dass $I \circ L = \text{id} + K_1$ mit $K_1 : X \rightarrow X$ kompakt. Der Operator $I \circ K : X \rightarrow X$ ist als Verkettung eines stetigen Operators mit einem kompakten Operator wieder kompakt. Nach Satz 2.4 ist daher $I \circ (L + K) = I \circ L + I \circ K = \text{id} + K_1 + I \circ K$ ein Fredholmoperator mit Index 0. Der Isomorphismus I ändert die Fredholm-Eigenschaften nicht, wir erhalten also das Ergebnis für $L + K$. $\square$

Beispiel 2.7. *Auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ können wir betrachten:*

$$L = \Delta : X = H^2(\Omega) \cap \{u \mid \partial_n u|_{\partial\Omega} = 0\} \rightarrow Y = L^2(\Omega). \quad (2.2)$$

Das Bild von L ist nicht ganz Y , denn alle $f = Lu$ haben die Eigenschaft $\int_{\Omega} f = 0$. Aber: $Y = R(L) \oplus \{u = c\}$, der Bildraum hat also ein eindimensionales Komplement.

Der Kern von L ist nicht die Null, denn konstante Funktionen sind in X enthalten, werden aber auf die $0 \in Y$ abgebildet. Auch hier gilt: $\ker(L) = \{u = c\}$ ist eindimensional.

Ergebnis: Der Operator L aus (2.2) ist nicht invertierbar, aber er ist ein Fredholmoperator mit Index 0. Lax gesprochen: Es gibt in Bild und Urbild jeweils endlich viele langweilige Dimensionen, bis auf diese ist L invertierbar.

2.2. Spektralsatz für kompakte Operatoren

Dieser Abschnitt enthält Material, das auch in Kapitel 8.3 von [10] vorkommt. Dort werden die Werkzeuge bereitgestellt, die wir hier verwenden.

Wir betrachten lineare Operatoren $K : X \rightarrow X$ auf einem Banachraum X und sind interessiert am Spektrum

$$\sigma(K) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{id} - K \text{ ist nicht stetig invertierbar}\}. \quad (2.3)$$

Für diese Vorlesung genügt uns der einfachste Spektralsatz: K sei ein kompakter selbstadjungierter Operator auf einem separablen Hilbertraum X .

Zur Erinnerung: Ein Operator ist kompakt, falls für jede beschränkte Menge im Urbild der Abschluss des Bildes kompakt ist. Der Operator K heißt selbstadjungiert, falls $\langle Ku, v \rangle_X = \langle u, Kv \rangle_X$ für alle Elemente $u, v \in X$.

Satz 2.8 (Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren). *Sei X ein unendlichdimensionaler separabler reeller oder komplexer Hilbertraum, $K : X \rightarrow X$ ein linearer kompakter selbstadjungierter Operator. Dann existiert eine abzählbare Familie von Eigenwerten $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$ und Eigenvektoren $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_*}$,*

$$Ku_k = \lambda_k u_k, \quad u_k \in X, \quad \lambda_k \in \mathbb{R},$$

so dass $(u_k)_{k \in \mathbb{N}_}$ eine Orthonormalbasis von X bildet: Es gilt $\langle u_l, u_k \rangle = \delta_{kl}$ für alle $k, l \in \mathbb{N}_*$ und, für reelle Hilberträume X ,*

$$\forall u \in X \exists (b_k)_{k \in \mathbb{N}_*}, b_k \in \mathbb{R} : \quad u = \sum_{k=1}^{\infty} b_k u_k$$

mit Konvergenz der Reihe in X . Das Spektrum ist $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$.

Im endlichdimensionalen Raum gilt derselbe Satz, allerdings ist die Indexmenge dann endlich und 0 ist nicht notwendigerweise im Spektrum von K . Im komplexen Raum gelten die letzten beiden Aussagen auch, nur ist im Allgemeinen $b_k \in \mathbb{C}$.

Zur Vorbereitung des Beweises stellen wir fest, dass im Falle eines komplexen Hilbertraumes wegen der Selbstadjungiertheit von K und der (hermiteschen) Symmetrie des Skalarproduktes die Gleichung

$$\langle Ku, u \rangle = \langle u, Ku \rangle = \overline{\langle Ku, u \rangle} \quad (2.4)$$

gilt. Es gilt also $\langle Ku, u \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $u \in X$. Für Eigenvektoren u mit $Ku = \lambda u$ gilt

$$\lambda \|u\|^2 = \langle \lambda u, u \rangle = \langle Ku, u \rangle \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

alle Eigenwerte sind also reell. Orthogonalität: Für Eigenvektoren u und v zu Eigenwerten $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lambda \langle u, v \rangle = \langle Ku, v \rangle = \langle u, Kv \rangle = \bar{\mu} \langle u, v \rangle = \mu \langle u, v \rangle. \quad (2.6)$$

Im Fall $\lambda \neq \mu$ gilt also $\langle u, v \rangle = 0$, Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Die Idee des nachfolgenden Beweises ist: Minimiere ein Funktional auf Sphären im Hilbertraum, dies liefert die Eigenvektoren. Wegen der Orthogonalität der Eigenräume können wir jeweils den nächsten Eigenvektor im orthogonalen Komplement der bisherigen Eigenräume zu suchen.

Beweis des Spektralsatzes 2.8. Wir verwenden variationelle Methoden.

Schritt 1: Variationsproblem mit Nebenbedingungen und Direkte Methode. Wir betrachten das reelle Funktional

$$A : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad A(u) := \langle Ku, u \rangle. \quad (2.7)$$

Wir betrachten das Funktional A auf der Einheitssphäre, untersuchen also die Nebenbedingung $\mathcal{N} = \{u \in X \mid \|u\| = 1\}$. Wir suchen positive Maxima und negative Minima von A auf $\mathcal{N}$. Das Funktional A ist nach oben und nach unten beschränkt

wegen der Stetigkeit von K . Der Raum X ist als Hilbertraum reflexiv. Wir wenden die Direkte Methode an. Durch die Nebenbedingung $\mathcal{N}$ sind alle Minimalfolgen automatisch beschränkt.

Wir behaupten, dass A schwach folgenstetig ist. Wir betrachten dazu eine beliebige schwach konvergente Folge $u_j \rightharpoonup u$ in X . Dann ist die Folge u_j beschränkt in X . Wegen der Kompaktheit von K finden wir eine Teilfolge und einen Limes f mit $Ku_j \rightarrow f$ in X entlang der Teilfolge. Wir behaupten, dass $Ku = f$ gilt. Wir erhalten dies mit folgender Rechnung für einen beliebigen Testvektor $\varphi \in X$ für $j \rightarrow \infty$,

$$\langle Ku, \varphi \rangle = \langle u, K\varphi \rangle \longleftarrow \langle u_j, K\varphi \rangle = \langle Ku_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle.$$

Die starke Konvergenz $Ku_j \rightarrow f$ in X impliziert die Konvergenz von $A(u_j)$ wegen

$$A(u_j) = \langle u_j, Ku_j \rangle \rightarrow \langle u, f \rangle = \langle u, Ku \rangle = A(u).$$

Das Lemma ohne Namen impliziert, dass die ursprüngliche Folge $A(u_j)$ ebenfalls konvergiert. Damit ist die schwache Stetigkeit von A gezeigt.

Schritt 2: Positive Maxima und negative Minima. Es gilt nicht, dass die Einheitskugel $\mathcal{N}$ schwach folgenabgeschlossen ist. Wir werden dennoch mit der Direkten Methode Maxima und Minima finden.

Wir betrachten eine Minimalfolge $u_j \in \mathcal{N}$ mit $A(u_j) \searrow \inf_{v \in \mathcal{N}} A(v) =: \alpha$ und nehmen an, dass $\alpha < 0$ gilt. Für eine Teilfolge finden wir einen schwachen Limes, also $u_j \rightharpoonup u$ in X , mit $\|u\| \leq 1$ wegen der schwachen Unterhalbstetigkeit der Norm. Den schwachen Limes u normieren wir und betrachten $\tilde{u} = u/\|u\|$ (die schwache Stetigkeit von A impliziert $A(u) = \alpha < 0$ und daher $u \neq 0$). Die schwache Stetigkeit von A und $\alpha < 0$ liefert

$$A(\tilde{u}) = \frac{1}{\|u\|^2} A(u) = \frac{1}{\|u\|^2} \alpha \leq \alpha.$$

Die linke Seite ist nach Definition von α größer oder gleich α , daher gilt überall Gleichheit und insbesondere die Normierung $\|u\| = 1$, also $u \in \mathcal{N}$. Wir können also negative Minima und analog positive Maxima mit der Direkten Methode finden. Der Satz über Minimierung mit Nebenbedingungen liefert für Minimierer u , dass mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ die Relationen

$$Ku = \lambda u, \quad \|u\| = 1$$

gelten. Dann gilt auch $0 > \alpha = A(u) = \langle u, Ku \rangle = \lambda \|u\|^2 = \lambda$, wir haben also einen Eigenvektor zu dem negativen Eigenwert $\lambda = \alpha$ konstruiert. Analog erhalten wir als Maximierer von A bei positivem $\alpha = \sup_{v \in \mathcal{N}} A(v)$ den positiven Eigenwert $\lambda = \alpha$.

Schritt 3: Dimension von Eigenräumen und orthogonale Komplemente. Wir behaupten, dass für jedes $\lambda \neq 0$ der Eigenraum

$$X_\lambda := \{u \in X \mid Ku = \lambda u\} = \ker(\lambda \text{id} - K)$$

endlichdimensional ist. Wir schließen dies, indem wir zeigen, dass die Einheitskugel in X_λ kompakt ist. Sei dazu u_j eine beliebige Folge in X_λ mit $\|u_j\| \leq 1$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Wegen der Kompaktheit von K finden wir eine Teilfolge und $f \in X$ mit $Ku_j \rightarrow f$

in X . Dies impliziert die starke Konvergenz von $u_j = \lambda^{-1}Ku_j \rightarrow \lambda^{-1}f$ entlang der Teilfolge. Damit ist die Kompaktheit der Kugel gezeigt, X_λ ist endlichdimensional.

Wir betrachten nun für endlich viele Eigenwerte $0 \neq \lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$, die zugehörigen Eigenräume X_{λ_k} und den Spann dieser Räume, $Y_m := \text{span}\{X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_m}\}$. Wir bezeichnen das orthogonale Komplement von Y_m in X mit $Y_m^\perp$. Dieser Raum ist wieder abgeschlossen, also ein Hilbertraum. Den Operator K können wir auf $Y_m^\perp$ einschränken; wir behaupten, dass wir damit einen Operator $K|_{Y_m^\perp} : Y_m^\perp \rightarrow Y_m^\perp$ erhalten. Die nachzuweisende Relation ist $Ky \in Y_m^\perp$ für $y \in Y_m^\perp$. Sie folgt einfach mit der folgenden Rechnung für beliebige Elemente $\varphi \in X_{\lambda_k}$:

$$\langle Ky, \varphi \rangle = \langle y, K\varphi \rangle = \lambda_k \langle y, \varphi \rangle = 0.$$

Wir gehen nun induktiv vor. Zu Eigenwerten $0 \neq \lambda_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, m$ betrachten wir $\alpha_+ := \sup_{v \in \mathcal{N} \cap Y_m^\perp} A(v)$ und $\alpha_- := \inf_{v \in \mathcal{N} \cap Y_m^\perp} A(v)$. Im Fall $|\alpha_+| \geq |\alpha_-|$ suchen wir ein Maximum von $A(v)$ in $\mathcal{N} \cap Y_m^\perp$, im umgekehrten Fall ein Minimum. Wir erhalten einen neuen Eigenwert λ_{m+1} (es sei denn, Minimum und Maximum verschwinden; in diesem Fall sind in endlich vielen Schritten alle Eigenwerte gefunden). Die Konstruktion liefert $|\lambda_{m+1}| \leq |\lambda_m|$, wobei Gleichheit nur auftritt, falls $\lambda_{m+1} = -\lambda_m$.

Schritt 4: Die Folge von Eigenwerten. Wir behaupten, dass die so gefundene Folge von Eigenwerten

$$\lambda_m \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

erfüllt. Dies folgt sofort mit einem Widerspruchsargument: Angenommen, für eine Teilfolge gilt $\lambda_m \rightarrow \lambda \neq 0$, wobei alle λ_m unterschiedlich sind. Dann können wir normierte Eigenvektoren u_m mit $Ku_m = \lambda_m u_m$ wählen. Wegen der Kompaktheit von K und $\lambda \neq 0$ gilt $u_m = \lambda_m^{-1}Ku_m \rightarrow \lambda^{-1}f$. Andererseits gilt für $m \neq n$ wegen der Orthogonalität von Eigenvektoren $\|u_m - u_n\|^2 = \|u_m\|^2 + \|u_n\|^2 = 2 \not\rightarrow 0$, ein Widerspruch. Wir haben insbesondere erhalten, dass es nur abzählbar viele Eigenwerte gibt.

Wir behaupten, dass auch die folgende Normabschätzung gilt: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Index $m \in \mathbb{N}$, so dass für $Y_m = \text{span}\{X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_m}\}$ gilt:

$$K|_{Y_m^\perp} : Y_m^\perp \rightarrow Y_m^\perp \quad \text{hat die Norm} \quad \|K|_{Y_m^\perp}\| < \varepsilon. \quad (2.8)$$

Die Zahl $\alpha_+ := \sup_{u \in \mathcal{N} \cap Y_m^\perp} A(u)$ ist im Fall $\alpha_+ > 0$ nach Schritt 2 ein Eigenwert von $K|_{Y_m^\perp}$, also auch ein Eigenwert von K . Nach Konstruktion gilt $\alpha_+ \leq |\lambda_m|$, und analog gilt $\alpha_- \geq -|\lambda_m|$ für das Infimum. Die Selbstadjungiertheit von K nutzen wir aus, um eine Parallelogrammidentität aufzustellen (hier notiert für reelle Hilberträume):

$$4\langle Ku, v \rangle = \langle K(u+v), (u+v) \rangle - \langle K(u-v), (u-v) \rangle = A(u+v) - A(u-v). \quad (2.9)$$

Wir betrachten einen normierten Vektor $u \in Y_m^\perp$. Einen beliebigen Testvektor $v \in X$ zerlegen wir als $v = v_\parallel + v_\perp \in Y_m \oplus Y_m^\perp$, so dass $\langle Ku, v \rangle = \langle u, Kv_\parallel \rangle + \langle Ku, v_\perp \rangle = \langle Ku, v_\perp \rangle$. Wir erhalten aus (2.9) die Ungleichung $\|Ku\| \leq C \sup_{\varphi \in \mathcal{N} \cap Y_m^\perp} |A(\varphi)| \leq C|\lambda_m|$, und damit (2.8).

Wir wollen nun noch eine Orthonormalbasis von X aus Eigenvektoren konstruieren. In jedem der endlichdimensionalen Eigenräume X_λ , $\lambda \neq 0$, wählen wir eine orthonormale Basis. Wegen der Orthogonalität verschiedener Eigenräume erhalten wir durch Normierung $\langle u_k, u_l \rangle = \delta_{kl}$ für alle k, l . Schließlich können wir

noch eine orthonormale Basis des (im Allgemeinen unendlichdimensionalen) Raumes $X_0 = \ker K \subset X$ wählen, da X separabel ist. Diese Eigenvektoren zum Eigenwert 0 sind wiederum senkrecht auf den zuvor konstruierten Eigenvektoren.

In der Formulierung des Satzes haben wir eine Folge von Eigenvektoren verwendet und nicht zwischen dem Kern X_0 und seinem Komplement unterschieden. Um Eigenwerte wie im Satz zu erhalten, müssen die hier gefundenen nichttrivialen λ_k eventuell teilweise wiederholt werden (entsprechend der Dimension des zugehörigen Eigenraumes) und Eigenwerte 0 müssen in die Folge eingefügt werden (zum Beispiel könnte mit den geraden Indizes k die Basis von X_0 durchlaufen werden, mit den ungeraden Indizes k die Basen zu allen anderen Eigenräumen). Der Index k bezieht sich nun auf diese neue Abzählung der Eigenwerte, die Orthonormalität $\langle u_k, u_l \rangle = \delta_{kl}$ bleibt erhalten.

Wir bemerken an dieser Stelle, dass notwendigerweise $0 \in \sigma(K)$ gilt (obwohl die Trivialität des Kernes $X_0 = \{0\}$ möglich ist). Tatsächlich könnten wir andernfalls die Identität auf X schreiben als $\text{id} = K^{-1} \circ K$, die Identität wäre dann eine kompakte Abbildung. Dies ist nur im endlichdimensionalen Raum der Fall.

Schritt 5: Vollständigkeit. Uns bleibt nun noch die Vollständigkeit der konstruierten Familie zu zeigen, also für ein beliebiges $v \in X$ die Existenz von Koeffizienten $b_k \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_k b_k u_k$ (Konvergenz in X). Mit Hilfe unserer normierten Basisvektoren u_k können wir uns die Koeffizienten b_k verschaffen,

$$b_k := \langle v, u_k \rangle, \quad P_M v := \sum_{k=1}^M b_k u_k, \quad e^M := v - P_M v.$$

Der Ausdruck $P_M v = \sum_{k=1}^M b_k u_k$ liefert die Projektion von v auf den Spann der ersten M Eigenvektoren; nach Wahl der Koeffizienten gilt insbesondere

$$\|P_M v\|_X^2 = \sum_{k=1}^M |b_k|^2 = \langle P_M v, v \rangle \leq \|P_M v\|_X \|v\|_X,$$

also auch $\|P_M v\|_X \leq \|v\|_X$. Wir müssen die Konvergenz des Fehlers zeigen, $e^M \rightarrow 0$ in X . Da wir eine Basis des Kernes in die Familie $(u_k)_k$ aufgenommen haben, reicht es im Folgenden aus, Elemente $v \in X_0^\perp$ im Komplement des Kernes zu betrachten.

Für den Fehler $e^M = v - P_M v$ gilt $e^M \in Y_M^\perp$. Da die Projektion beschränkt ist, ist e^M eine beschränkte Folge. Wir wählen einen Limes und eine schwach konvergente Teilfolge $e^M \rightharpoonup e$ in X . Wegen der Kompaktheit von K gilt $Ke^M \rightarrow Ke$ in X , und wegen (2.8)

$$\|Ke^M\|_X \leq \|K|_{Y_M^\perp}\| \|e^M\|_X \rightarrow 0,$$

also $Ke = 0$. Die Relation $e^M \in X_0^\perp$ für alle M impliziert $e \in X_0^\perp$ (schwache Abgeschlossenheit von abgeschlossenen Unterräumen), daher muss $e = 0$ gelten. Die Fehler e^M konvergieren also zumindest schwach in X gegen 0.

Die starke Konvergenz der Fehler folgt mit der Rechnung

$$\|e^M\|_X^2 = \left\langle e^M, v - \sum_{k=1}^M b_k u_k \right\rangle = \langle e^M, v \rangle - \sum_{k=1}^M b_k \langle e^M, u_k \rangle = \langle e^M, v \rangle \rightarrow 0$$

für $M \rightarrow \infty$. Damit ist die Vollständigkeit der Eigenvektoren u_k gezeigt.

Wir müssen noch $\sigma(K) = \{0\} \cup \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ zeigen, wobei die Inklusion “ $\supset$ ” bereits gezeigt ist. Wir verwenden eine einfache Spektralaussage: Für alle $\mu \in \sigma(K)$ gilt die Relation $|\mu| \leq \|K\|$. Dies folgt sofort mit der Neumann-Reihe: Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > \|K\|$ konvergiert die Neumann-Reihe und liefert die Inverse des Operators $\lambda - K$. In unserer obigen Konstruktion bedeutet das, dass jedes $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ für hinreichend großes M nicht im Spektrum des Operators $K|_{Y_M^\perp}$ liegt. Dies liefert “ $\subset$ ”. $\square$

Übungen

Übung 2.1 (Zerlegung mit einem nicht-abgeschlossenen Unterraum). *Wir betrachten den Banachraum $X = \ell^2(\mathbb{N})$ und den (eindimensionalen und daher abgeschlossenen) Unterraum $Y_0 = \text{span}\{e_1\}$. Für ein nicht-stetiges lineares Funktional $\lambda : X \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten wir*

$$Y := \{x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in X \mid x_1 = \lambda((x_2, x_3, \dots))\}.$$

Zeigen Sie: (a) Y ist ein linearer Unterraum von X . (b) Y ist nicht abgeschlossen in X . (c) Es gilt $X = Y_0 \oplus Y$.

Bemerkung: Bei Fredholmoperatoren L ist $R(L)$ automatisch abgeschlossen (Satz von Kato). Die Übungsaufgabe zeigt, dass dies nicht alleine aus der Tatsache folgt, dass es ein endlichdimensionales Komplement gibt.

Übung 2.2 (Spektralsatz für nicht-normale Operatoren). *Formulieren Sie einen Spektralsatz für kompakte Operatoren $K : X \rightarrow X$ auf einem Hilbertraum X , ohne die Forderung, dass K normal ist (Stichwort: Satz von Riesz–Schauder). Überlegen Sie sich anhand von Matrizen, welche Aussagen des Spektralsatzes nicht allgemein gelten können. Überlegen Sie sich mit dem Material der Vorlesung, welche Aussagen des Spektralsatzes gültig bleiben.*

Übung 2.3 (Spezielle Spektralaussagen). *Sei X ein Hilbertraum und $K : X \rightarrow X$ kompakt und normal. Zeigen Sie: K hat einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = \|K\|$. Diese Zahl stimmt mit dem Spektralradius überein.*

Sei X ein Banachraum. Zeigen Sie: Jeder nilpotente Operator $T : X \rightarrow X$ (es gilt $T^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$) hat das Spektrum $\sigma(T) = \{0\}$.

Übung 2.4 (Spektralsatz und Kompaktheit). *Sei $K : X \rightarrow X$ ein normaler Operator auf einem Hilbertraum. Weiterhin gelte: 0 ist der einzige Häufungspunkt von $\sigma(K)$ und für alle $\lambda \in \sigma(K) \setminus \{0\}$ ist der verallgemeinerte Eigenraum $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \ker((\lambda - K)^j)$ endlichdimensional. Zeigen Sie, dass K kompakt ist. Zeigen Sie, dass ohne die Voraussetzung der Normalität die Aussage falsch ist.*

3. Laplace-Beltrami Operator und Kugelfunktionen

3.1. Der Laplace-Beltrami Operator

Dieser Abschnitt enthält Material, das auch in Kapitel 8.3 von [10] vorkommt.

Wir betrachten in diesem Abschnitt die Mannigfaltigkeit $S := S^{n-1} = \partial B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Die vorgestellten Konzepte sind aber auf beliebige Untermannigfaltigkeiten verallgemeinerbar.

Der tangentielle Gradient

Wir wollen zunächst den tangentiellen Gradienten definieren. Dazu sei $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung. Den Tangentialraum an S im Punkt x bezeichnen wir mit $T_x S$, er kann identifiziert werden mit einem $n - 1$ -dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^n$, nämlich dem Spann von $n - 1$ Tangentialvektoren $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$. Dabei sind Tangentialvektoren $\tau \in T_x S$ solche Vektoren $\tau \in \mathbb{R}^n$, für die es differenzierbare Wege $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma'(0) = \tau$. Für den Tangentialraum $T_x S$ bezeichnen wir mit $P_x : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ die orthogonale Projektion auf $T_x S$.

Eine elementare Definition des tangentiellen Gradienten kann mit Fortsetzungen von u angegeben werden. Sei $\tilde{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Fortsetzung von u , also $\tilde{u} = u$ auf S (es genügt dabei, wenn $\tilde{u}$ nur auf einer Umgebung von S definiert ist; man kann auf der Sphäre zum Beispiel $\tilde{u}(x) = u(\frac{x}{|x|})$ wählen). Mit der Projektion P_x auf den Tangentialraum (auf der Sphäre durch $P_x(\xi) = \xi - \langle \xi, \frac{x}{|x|} \rangle \frac{x}{|x|}$ gegeben) setzen wir

$$\nabla_T u(x) := P_x(\nabla \tilde{u}(x)). \quad (3.1)$$

Falls uns ein umgebender Raum nicht gegeben ist, ist eine andere Definition notwendig. Wir gehen dann aus von der Ableitung $Du(x) : T_x S \rightarrow \mathbb{R}$; diese ist über die Ableitungen von $u \circ \gamma$ für Wege γ allgemein definierbar. Mit Hilfe eines Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im Tangentialraum und dem Riesz'schen Darstellungssatz stellen wir nun $Du(x)$ mit einem Vektor $g \in T_x S$ dar:

$$\text{Falls } Du(x)(\tau) = \langle g, \tau \rangle \quad \forall \tau \in T_x S, \quad \text{so setze } \nabla_T u(x) := g. \quad (3.2)$$

Wir wollen noch einsehen, dass die zwei Definitionen von $\nabla_T u(x)$ tatsächlich dasselbe Ergebnis liefern. Wir verwenden dazu eine Basis $\tau_1, \dots, \tau_{n-1}$ von $T_x S$, die zugehörigen Wege bezeichnen wir mit $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$. Dann gilt wegen der Kettenregel

$$\langle g, \tau_j \rangle = Du(x)(\tau_j) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (u \circ \gamma_j) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\tilde{u} \circ \gamma_j) \right|_{\varepsilon=0} = \nabla \tilde{u}(x) \cdot \tau_j.$$

Die Normalenkomponente von g verschwindet wegen der Forderung $g \in T_x S$. Daher stimmen die beiden Definitionen (3.1) und (3.2) des tangentiellen Gradienten überein.

Der Raum $H^1(S)$ und der Laplace-Beltrami-Operator

Für Funktionen $u \in C^1(S, \mathbb{R})$ können wir die Norm

$$\|u\|_{H^1(S)}^2 := \int_S |u|^2 + |\nabla_T u|^2 \quad (3.3)$$

betrachten und den Raum $H^1(S)$ als den Abschluss von $C^\infty(S, \mathbb{R})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^1(S)}$. Auf dem Raum $H^1(S)$ haben wir dann eine Bilinearform gegeben durch

$$a : H^1(S) \times H^1(S) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a(u, v) := \int_S \nabla_T u \cdot \nabla_T v. \quad (3.4)$$

Für jedes $u \in H^1(S)$ ist durch $\lambda : H^1(S) \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto -a(u, v)$ eine Linearform $\lambda \in H^{-1}(S) := H^1(S)'$ gegeben. Diese Linearform wird mit $\Delta_S u$ bezeichnet. Wenn die Linearform (durch Regularität von u) sogar eine stetige Linearform auf $L^2(S)$ ist, so kann $\Delta_S u$ mit einer $L^2(S)$ -Funktion dargestellt werden, die Anwendung auf eine Testfunktion v ist dann durch das $L^2(S)$ -Skalarprodukt gegeben. In diesem Fall ist die nachfolgende suggestivere Schreibweise gerechtfertigt.

$$-\Delta_S : H^1(S) \rightarrow H^{-1}(S), \quad \int_S (-\Delta_S u) v = \int_S \nabla_T u \cdot \nabla_T v. \quad (3.5)$$

Der Operator $\Delta_S : H^1(S) \rightarrow H^{-1}(S)$ heißt der Laplace-Beltrami-Operator.

Zusammenhang zum vollen Laplace-Operator

Wir verwenden Kugelkoordinaten und schreiben einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ als $x = r\xi$ mit $r = |x|$ und $\xi \in S$. In einem Punkt $x \neq 0$ verwenden wir den Einheitsvektor in radiale Richtung, $e_r := \frac{x}{|x|}$. Unser Ziel ist es, den Laplace-Operator in einen sphärischen Anteil und einen radialen Anteil zu zerlegen. Dabei soll der radiale Anteil nur Ableitungen nach dem Radius r enthalten. Wir setzen

$$\begin{aligned} \Delta_r : C^2((0, \infty), \mathbb{R}) &\rightarrow C^0((0, \infty), \mathbb{R}), \quad w \mapsto \Delta_r w, \\ \Delta_r w(r) &= \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r (r^{n-1} \partial_r w)(r). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Lemma 3.1 (Darstellung des Laplace-Operators mit dem Laplace-Beltrami-Operator). *Für $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ gilt in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$*

$$\Delta u = \Delta_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_S u. \quad (3.7)$$

Die Formel (3.7) ist wie folgt zu lesen: In einem Punkt $x_0 = r_0 \xi_0$ wird links Δu in dem Punkt x_0 ausgewertet. Rechts wird im ersten Term auf die Funktion $r \mapsto u(r \xi_0)$ der Operator Δ_r angewendet und das Ergebnis in r_0 ausgewertet; im zweiten Term wird auf die Funktion $\xi \mapsto u(r_0 \xi)$ der Operator Δ_S angewendet und das Ergebnis in ξ_0 ausgewertet.

Die Formel (3.7) zeigt, dass sich die Summe aller zweiten Ableitungen auch bezüglich der Polarkoordinaten separieren lässt in zweite radiale Ableitungen und zweite tangentielle Ableitungen. Dabei tauchen allerdings durch das krummlinige Koordinatensystem in beiden Richtungen auch erste Ableitungen auf, im radialen Anteil relativ explizit, im tangentialen Anteil eher implizit über den Laplace-Beltrami-Operator.

Beweis. Um (3.7) zu beweisen, genügt eine partielle Integration mit einer Testfunktion $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. Wir rechnen nach, dass beide Seiten von (3.7) auf die Testfunktion φ in derselben Art wirken. Wir verwenden nacheinander: (a) partielle Integration in $\mathbb{R}^n$, (b) die Formel der Zwiebelintegration, (c) die Zerlegung des Gradienten in einen radialen und einen tangentialen Anteil $\nabla u = \partial_r u e_r + \nabla_T u$. In der zweiten Zeile der Rechnung (und nur dort) bezeichnet $\nabla_T u$ den tangentialen Gradienten auf der r -Sphäre rS ; dieser berechnet sich mit der Kettenregel als $(\nabla_T u)(r\xi) = r^{-1} \nabla_T(u(r \cdot))(\xi)$, was wir in (d) ausnutzen. Zusätzlich wird in (d) der Transformationssatz mit dem Volumenelement r^{n-1} verwendet, in (e) eine partielle Integration von ∂_r auf $(0, \infty)$ und die Definition von Δ_S , in (f) eine weitere Zwiebelintegration.

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \cdot \varphi &\stackrel{(a)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla \varphi \stackrel{(b)}{=} \int_0^\infty \int_{rS} \nabla u \cdot \nabla \varphi d\mathcal{H}^{n-1} dr \\
 &\stackrel{(c)}{=} \int_0^\infty \int_{rS} \partial_r u \cdot \partial_r \varphi + \nabla_T u \cdot \nabla_T \varphi d\mathcal{H}^{n-1} dr \\
 &\stackrel{(d)}{=} \int_0^\infty \int_S \partial_r u(r\xi) \cdot \partial_r \varphi(r\xi) d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) r^{n-1} dr \\
 &\quad + \int_0^\infty \int_S r^{-1} \nabla_T(u(r \cdot))(\xi) r^{-1} \nabla_T(\varphi(r \cdot))(\xi) d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) r^{n-1} dr \\
 &\stackrel{(e)}{=} - \int_0^\infty \int_S \frac{1}{r^{n-1}} \partial_r(r^{n-1} \partial_r u(\cdot \xi))(r) \varphi(r\xi) d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) r^{n-1} dr \\
 &\quad - \int_0^\infty \int_S \frac{1}{r^2} \Delta_S u(r \cdot)(\xi) \varphi(r\xi) d\mathcal{H}^{n-1}(\xi) r^{n-1} dr \\
 &\stackrel{(f)}{=} - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta_r u + \frac{1}{r^2} \Delta_S u \right) \varphi.
 \end{aligned}$$

Da φ beliebig war, ist damit die behauptete Formel (3.7) nachgewiesen. $\square$

3.2. Kugelfunktionen

Der Operator Δ_S ist nicht invertierbar, denn konstante Funktionen auf der Sphäre werden auf die konstante Funktion 0 abgebildet. Wir dividieren die konstanten Funktionen aus dem Raum heraus und verwenden den Raum $L_0^2(S) := \{u \in L^2(S) \mid \int_S u = 0\}$ mit der Norm von $L^2(S)$. Dann ist die Abbildung in den Dualraum

$$\Delta_S : H^1(S) \cap L_0^2(S) \rightarrow [H^1(S) \cap L_0^2(S)]'$$

invertierbar. Dies folgt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz mit a aus (3.4). Die Abbildung $K := \Delta_S^{-1} : L_0^2(S) \rightarrow L_0^2(S)$ ist kompakt und selbstadjungiert.

Der Spektralsatz 2.8 für selbstadjungierte kompakte Operatoren liefert: Der Raum $L_0^2(S)$ wird aufgespannt von Eigenvektoren von K , also von Eigenvektoren von Δ_S . Es gibt $\mu_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $k \geq 1$, und Lösungen $u_k \in L^2(S)$ mit

$$\Delta_S u_k = -\mu_k u_k.$$

Durch Hinzunahme der konstanten Funktion $u_0 \equiv 1$ (eine Funktion mit $\Delta_S u_0 = 0$, also Eigenvektor zu $\mu_0 = 0$) erhalten wir eine Basis von $L^2(S)$. Die Eigenfunktionen u_k heißen Kugelfunktionen.

Mit Hilfe der Kugelfunktionen können wir viele harmonische Funktionen konstruieren: Wir machen den Separationsansatz $u(r, \xi) = w(r)u_k(\xi)$ und rechnen

$$\Delta u(x) = (\Delta_r w)(r)u_k(\xi) + w(r)\frac{1}{r^2}\Delta_S u_k(\xi) = \left[\Delta_r w(r) - \frac{\mu_k}{r^2}w(r)\right]u_k(\xi).$$

Die Funktion u ist harmonisch, wenn w die gewöhnliche Differentialgleichung $\Delta_r w(r) = \mu_k r^{-2}w(r)$ löst. Für $q \in \mathbb{Z}$ setzen wir $w(r) = r^q$ und rechnen $\Delta_r w(r) = r^{-(n-1)}\partial_r(r^{n-1}\partial_r w)(r) = qr^{-(n-1)}\partial_r(r^{n-1+q-1}) = q(q+n-2)r^{-2}w(r)$. Tatsächlich sind die Eigenwerte μ_k von $-\Delta_S$ von der Form $\mu_k = q(q+n-2)$ und Kugelfunktionen liefern mit dem entsprechenden Faktor r^q harmonische Funktionen. Dies erlaubt, zu beliebigen Randwerten auf der Sphäre eine harmonische Fortsetzung in der Form einer Reihe anzugeben.

Auch Eigenfunktionen von $-\Delta$ auf Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ können mit Kugelfunktionen gefunden werden. Die Gleichung $-\Delta u = \lambda u$ wird durch die Funktion $u(r, \xi) = w(r)u_k(\xi)$ gelöst, falls w die Gleichung

$$-\Delta_r w(r) + \frac{\mu_k}{r^2}w(r) = \lambda w(r)$$

löst. Diese Gleichung ist eine Form der Bessel'schen Differentialgleichung.

Tatsächlich kann man zeigen, dass dieses Verfahren (basierend auf einem Separationsansatz mit Kugelfunktionen) ein vollständiges System von Eigenfunktionen des Laplace-Operators liefert. Dies erklärt das häufige Auftreten von Kugelfunktionen in Lösungen verschiedener Gleichungen. Am bekanntesten sind die Eigenfunktionen im Zusammenhang mit dem Schrödinger-Operator: Das s -Orbital von Elektronenverteilungen im Atom entspricht der konstanten Kugelfunktion u_0 , das hantelförmige p -Orbital der Kugelfunktion mit zwei gegenüberliegenden Maxima.

Übungen

Übung 3.1 (Kugelfunktionen im Zweidimensionalen). *Wir betrachten $n = 2$. Geben Sie Δ_r und Δ_S und alle Kugelfunktionen an. Geben Sie für alle Kugelfunktionen die harmonischen Funktionen an, die dieselbe Winkelabhängigkeit haben. Stellen Sie einen Zusammenhang zu holomorphen Funktionen her.*

Übung 3.2 (Laplace-Beltrami Operator im Dreidimensionalen). *Wir betrachten $n = 3$ und die Koordinaten*

$$x = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie im Dreidimensionalen für den Laplace-Beltrami Operator die Formel

$$\Delta_S = \frac{1}{\sin^2(\theta)}\partial_\varphi^2 + \frac{1}{\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)\partial_\theta).$$

Teil II.

Die Helmholtzgleichung mit konstanten Koeffizienten

4. Beschränkte Gebiete

4.1. Spektrum elliptischer Operatoren

Der Spektralsatz 2.8 trifft eine Aussage über beschränkte (sogar kompakte) Operatoren K . Damit ist er nicht direkt auf einen elliptischen Operator anwendbar, denn dieser ist nicht kompakt, noch nicht einmal beschränkt (als Abbildung von einem Raum in sich selbst). Man bekommt eine Spektralaussage, indem man den Satz auf die Inverse des Differentialoperators anwendet.

Wir betrachten die Helmholtzgleichung in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Die Koeffizienten $a \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n \times n})$ seien symmetrisch und koerziv, $b \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ mit positiver unterer Schranke. Wir betrachten den Operator $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$,

$$L : u \mapsto -\nabla \cdot (a \nabla u) , \quad (4.1)$$

definiert durch

$$\langle Lu \rangle (\varphi) = \int (a(x) \nabla u(x)) \cdot \nabla \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) .$$

Durch unsere Voraussetzungen (a und b positiv) ist der Operator $L+b$ invertierbar, es gibt einen Lösungsoperator $(L+b)^{-1} : H^{-1} \rightarrow H_0^1$, dieser ist linear und stetig. Insbesondere haben wir, nach Einschränkung des Operators,

$$(L+b)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \text{ linear und stetig.}$$

Wenn wir nun noch die Kompaktheit der Rellich-Einbettung verwenden, so erhalten wir den Operator

$$(L+b)^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \text{ kompakt.}$$

Damit die Aussage aus dem Spektralsatz für uns nützlich wird, müssen wir noch die Multiplikation mit dem Koeffizienten b in geeigneter Weise einbauen. Wir betrachten

$$K := (L+b)^{-1} \circ (b \text{ id}) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \text{ kompakt.}$$

Den Raum $L^2(\Omega)$ stattdessen wir mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} b(x) u(x) v(x) dx$$

aus. Wegen der Beschränktheit von b und der positiven unteren Schranke induziert dieses Skalarprodukt eine äquivalente Norm auf $L^2(\Omega)$, wir machen damit $L^2(\Omega)$ zu einem Hilbertraum mit einem neuen Skalarprodukt und schreiben X für diesen Raum.

Die Helmholtzgleichung

In X ist der Operator $(L + b)^{-1} \circ (bid)$ selbstadjungiert. Um dies einzusehen, rechnen wir für beliebige $f, g \in X$ und die zugehörigen "Lösungen" $u = K(f) = (L + b)^{-1}(b \cdot f)$ und $v = K(g) = (L + b)^{-1}(b \cdot g)$:

$$\langle Kf, g \rangle_X = \langle u, b^{-1}(L + b)(v) \rangle_X = \langle u, (L + b)(v) \rangle_{L^2}.$$

Die Symmetrie von L und bid in L^2 liefert, dass dies gleich $\langle (L + b)(u), v \rangle_{L^2}$ ist, und dies ist (mit derselben Rechnung) $\langle f, Kg \rangle_X$. Der Operator K ist also selbstadjungiert in X .

Der Spektralsatz 2.8 für selbstadjungierte kompakte Operatoren liefert: Der Raum $L^2(\Omega)$ wird aufgespannt durch die Eigenvektoren u_k von $K = (L + b)^{-1} \circ (bid) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$. Es gibt also $\mu_k \in \mathbb{R}$ und Lösungen $u_k \in L^2(\Omega)$ mit

$$(L + b)^{-1}(bu_k) = \mu_k u_k.$$

Der Operator ist positiv, es gilt also $\mu_k > 0$. Wir können den Operator anwenden und erhalten

$$\mu_k (L + b)u_k = bu_k.$$

Indem man das Skalarprodukt (in L^2) mit u_k bildet und $\langle u_k, Lu_k \rangle > 0$ ausnutzt, erhält man $0 < \mu_k < 1$. Wir erhalten

$$Lu_k = \left(-1 + \frac{1}{\mu_k}\right) bu_k =: \lambda_k bu_k$$

mit $\lambda_k = -1 + \mu_k^{-1} > 0$. Die Funktionen u_k sind also Eigenfunktionen von L zum Multiplikationsoperator bid . Die Eigenwerte sind $\lambda_k = -1 + \mu_k^{-1} > 0$ mit $\lambda_k \rightarrow +\infty$ für $k \rightarrow \infty$. Wir haben also mit Hilfe des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte Operatoren Eigenfunktionen für den Differentialoperator gefunden.

4.2. Die Helmholtzgleichung im beschränkten Gebiet

Wir betrachten im beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ die folgende inhomogene Helmholtzgleichung, eine Verallgemeinerung von (1.6):

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) - \omega^2 b u = f \quad \text{in } \Omega. \quad (4.2)$$

Die Koeffizienten a und b seien wie im letzten Abschnitt, insbesondere beide positiv, $\omega > 0$ ist eine Frequenz, $f \in L^2(\Omega)$ eine rechte Seite.

Fredholmalternative. Wir verwenden die Notation des letzten Abschnittes. Wir fügen zunächst einen Term in die Gleichung ein und schreiben sie äquivalent als

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) + b u = (1 + \omega^2) b u + f.$$

Nun wenden wir den kompakten Operator $(L + b)^{-1}$ an, wodurch wir links u erhalten. Durch Umstellen erhalten wir

$$u - (1 + \omega^2) (L + b)^{-1}(b u) = (L + b)^{-1}(f).$$

Dieses Problem für u ist von der Form $(id + \mathcal{K})(u) = g$ für einen kompakten Operator $\mathcal{K}$. Es gilt also die Fredholmalternative: Entweder es gibt Lösungen u für alle f oder es gibt nichttriviale Lösungen zu $f = 0$.

Zusätzliche Aussagen mit dem Spektralsatz. Die zwei Möglichkeiten lassen sich genauer charakterisieren. Welche vorliegt, ist von der Frequenz ω abhängig.

Möglichkeit 1: Es gilt $\omega^2 \neq \lambda_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Zahl ω^2 ist also kein Spektralwert. Dann ist der Operator $L - \omega^2 b$ invertierbar. Wir erhalten die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung für alle f .

Möglichkeit 2: Es gilt $\omega^2 = \lambda_k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. In diesem Fall gibt es $u_k \neq 0$ mit $Lu_k = \lambda_k bu_k$. Dies liefert eine nichttriviale Lösung für (4.2) mit $f = 0$. Insbesondere ist das Problem (4.2) nicht eindeutig lösbar. Die Fredholmalternative liefert eine zusätzliche Information: Es gibt tatsächlich eine rechte Seite f , so dass die Gleichung nicht lösbar ist.

Übungen

Übung 4.1 (Spektralsatz mit Massenoperator). *Der Spektralsatz liefert Eigenwerte λ_k und Eigenvektoren u_k mit $Ku_k = \lambda_k u_k$. Für einen linearen beschränkten selbstadjungierten invertierbaren und positiven Operator $B : X \rightarrow X$ wollen wir Eigenwerte und Eigenvektoren mit der verallgemeinerten Relation $Ku_k = \lambda_k Bu_k$ suchen. Wie können wir den Beweis des Spektralsatzes anpassen, um mit dem “Massenoperator” dieselben Aussagen zu bekommen wie für $B = id$?*

5. Außenraumgebiete

5.1. Das Lemma von Rellich

Für einen Spektralparameter $\lambda > 0$ und einen Radius $R > 0$ betrachten wir Lösungen der Gleichung

$$(\Delta + \lambda)u = 0 \quad (5.1)$$

im Gebiet $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$. Die Dimension $n \in \mathbb{N}$ ist beliebig mit $n \geq 2$.

Selbst wenn wir eine Randbedingung entlang $\partial B_R(0)$ festlegen, können wir nicht erwarten, dass Lösungen eindeutig sind; wir müssen zusätzlich eine “Randbedingung für $|x| \rightarrow \infty$ ” vorgeben, eine sogenannte Strahlungsbedingung. Mit einer Strahlungsbedingung kann Eindeutigkeit sichergestellt werden.

Eindeutigkeit kann aus dem Lemma von Rellich gefolgert werden. Aus dem Lemma folgt sogar: Wenn die Lösung sehr schnell abfällt, dann muss sie verschwinden.

Satz 5.1 (Superkritischer Abfall von Helmholtz-Lösungen). *Sei u eine Lösung der Helmholtzgleichung (5.1) im Gebiet $\Omega := \mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$ mit der Abfallbedingung*

$$\int_{\partial B_\rho} |u|^2 \rightarrow 0 \quad \text{für } \rho \rightarrow \infty. \quad (5.2)$$

Dann verschwindet u identisch.

Satz 5.1 folgt unmittelbar aus Lemma 5.3 unten, dem berühmten Rellich-Lemma. Der Satz ist sehr erstaunlich, weil wir auf $\partial B_R(0)$ keine Randbedingung vorschreiben.

Wir erwähnen hier, was in Übung 5.1 nachgerechnet werden soll: Im dreidimensionalen Gebiet $\mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$ ist, mit der Notation $r = |x|$,

$$u(x) := \frac{e^{i\omega r}}{r} \quad (5.3)$$

eine Lösung der Helmholtzgleichung (5.1) für $\lambda = \omega^2$.

Wir bemerken, dass die Lösung aus (5.3) die Bedingung aus (5.2) nicht erfüllt. Dies kann aufgrund von Satz 5.1 auch nicht anders sein.

Eine weitere Bemerkung: Da wir u aus (5.3) als Lösung in einem Außenraumgebiet zulassen wollen, dürfen wir niemals (5.2) als Randbedingung vorschreiben.

Bemerkung 5.2 (Regularität von u). *Wir geben in Satz 5.1 und Lemma 5.3 für die Lösung u keinen Funktionenraum an. Die Aussagen sind selbstverständlich richtig für $u \in C^2(\Omega)$. Aber es reicht, zu fordern: $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ sei distributionelle Lösung der Gleichung. Dann ist wegen elliptischer Regularitätstheorie u automatisch eine glatte Funktion.*

In Satz 5.7 muss dafür gesorgt werden, dass Randwerte definiert sind. Im Dirichlet-Problem könnte man zum Beispiel fordern: Für jede Testfunktion $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^1 mit kompaktem Träger gilt $\psi u \in H^1_0(\Omega)$.

Lemma von Rellich: Formulierung und Beweis. Wir verwenden im Wesentlichen die ursprüngliche Formulierung von Franz Rellich aus dem Jahr 1943, formuliert und bewiesen in [9].

Lemma 5.3 (Rellich-Lemma). *Wir betrachten Parameter $\lambda, R > 0$ und eine Dimension $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Eine Abbildung $u : \Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Lösung von (5.1). Falls u nicht identisch verschwindet, so existieren Konstanten $r_1 > R$ und $c_R > 0$ mit*

$$\int_{B_\rho \setminus B_R} |u|^2 \geq c_R \rho \quad \forall \rho \geq r_1. \quad (5.4)$$

Beweis. Schritt 1: Reduktion auf eine Funktion v einer Variablen. Sei $u : \Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ eine nichttriviale Lösung von (5.1). Für einen Radius $r_0 > R$ betrachten wir die Einschränkung von u auf die Sphäre $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = r_0\}$. Durch geeignete Wahl von r_0 können wir annehmen, dass u auf dieser Sphäre nicht verschwindet. Die Kugelflächenfunktionen bilden eine Basis von $L^2(S^{n-1})$. Insbesondere finden wir eine spezielle Kugelflächenfunktion Y , normiert mit 1 in $L^2(S^{n-1})$, so dass

$$\int_{|y|=1} u(r_0 y) Y(y) dS(y) \neq 0. \quad (5.5)$$

Wir definieren eine Funktion $v : [R, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$v(r) := \int_{|y|=1} u(r y) Y(y) dS(y), \quad (5.6)$$

und aus (5.5) folgt $v(r_0) \neq 0$.

Lemma 5.3 ist gezeigt, wenn v für Parameter $r_1 > r_0$ und $c_R > 0$ erfüllt:

$$\int_R^\rho v(r)^2 r^{n-1} dr \geq c_R \rho \quad \forall \rho > r_1. \quad (5.7)$$

Tatsächlich impliziert (5.7) Ungleichung (5.4): Für beliebiges $\rho > r_1$ erhalten wir mit Polarkoordinaten in (i) und $\|Y\| = 1$ und Cauchy-Schwarz in (ii)

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho \setminus B_R} |u|^2 &\stackrel{(i)}{=} \int_R^\rho \int_{|x|=1} |u(r y)|^2 dS(y) r^{n-1} dr \\ &\stackrel{(ii)}{\geq} \int_R^\rho |v(r)|^2 r^{n-1} dr \stackrel{(5.7)}{\geq} c_R \rho. \end{aligned}$$

Es genügt also, (5.7) zu zeigen.

Schritt 2: Eine Gleichung für v . Wir multiplizieren Gleichung (5.1) mit der Kugelfunktion Y und integrieren über eine Kugel mit Radius $r > R$. Wir verwenden den Laplace-Beltrami-Operator Δ_S und die Tatsache, dass der Laplace-Operator in sphärischen Koordinaten die Form $\Delta = r^{-(n-1)} \partial_r (r^{n-1} \partial_r) + r^{-2} \Delta_S$ hat. Wir erhalten, wenn wir Y als eine r -unabhängige Funktion betrachten:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial B_r(0)} (\Delta + \lambda) u Y dS \\ &= \int_{\partial B_r(0)} r^{-(n-1)} \partial_r (r^{n-1} \partial_r u) Y + \int_{\partial B_r(0)} r^{-2} \Delta_S u Y + \int_{\partial B_r(0)} \lambda u Y. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Die Helmholtzgleichung

Man muss vorsichtig sein, wie man den Term mit dem Laplace-Beltrami-Operator liest; wir lassen Δ_S nur auf Funktionen der Einheitskugel wirken. Unter Verwendung der Selbstadjungiertheit von Δ_S und der Tatsache, dass Y Eigenfunktion von $-\Delta_S$ zum reellen Eigenwert $\mu > 0$ ist, erhalten wir für diesen Term

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(0)} r^{-2} \Delta_S u \, Y &= \int_{\partial B_1(0)} r^{-2} \Delta_S [u(r \cdot)] \, Y \, r^{n-1} = \int_{\partial B_1(0)} r^{-2} [u(r \cdot)] \, \Delta_S Y \, r^{n-1} \\ &= -\mu \int_{\partial B_1(0)} r^{-2} [u(r \cdot)] \, Y \, r^{n-1} = -\mu \int_{\partial B_r(0)} r^{-2} u \, Y = -\mu r^{-2} v(r) \, r^{n-1}. \end{aligned}$$

Ebenso muss man auch mit dem ersten Term in (5.8) vorsichtig sein: Wir rechnen

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(0)} r^{-(n-1)} \partial_r (r^{n-1} \partial_r u) \, Y &= \int_{\partial B_1(0)} \partial_r (r^{n-1} \partial_r u)(r \xi) \, Y(\xi) \, dS(\xi) \\ &= \partial_r (r^{n-1} \partial_r) \int_{\partial B_1(0)} u(r \cdot) \, Y = \partial_r (r^{n-1} \partial_r) v(r) \end{aligned}$$

Rechnung (5.8) liefert also, wenn wir durch r^{n-1} teilen,

$$\begin{aligned} 0 &= r^{-(n-1)} \partial_r (r^{n-1} \partial_r v)(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) v(r) \\ &= \partial_r^2 v(r) + \frac{n-1}{r} \partial_r v(r) + \left(\lambda - \frac{\mu}{r^2} \right) v(r). \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für v , die nun zu analysieren ist.

In gewisser Weise treten in dieser Gleichung drei Konstanten auf, nämlich λ , μ und $n-1$. Zunächst bemerken wir, dass der Faktor λ leicht auf den Faktor 1 transformiert werden kann: Wir wechseln von der alten unabhängigen Variablen r zur neuen Variablen $s = r\sqrt{\lambda}$. Dies führt zu einem Faktor λ in allen Termen außer dem Term λv . Für $V(s) := v(r)$ erhalten wir die Gleichung mit dem Faktor 1 anstelle von λ :

$$\partial_s^2 V(s) + \frac{n-1}{s} \partial_s V(s) + \left(1 - \frac{\mu}{s^2} \right) V(s) = 0. \quad (5.9)$$

Für den Vorfaktor $n-1=1$ ist dies die Bessel-Differentialgleichung mit dem Parameter μ .

Schritt 3: Transformation der Gleichung für V in eine Gleichung für W . Wie wir gleich sehen werden, kann auch der Parameter $n-1$ in der Gleichung transformiert werden. Dies geschieht auch in der Arbeit von Rellich, der den Parameter $n-1$ auf den Parameter 1 transformiert, um eine Standard-Besselgleichung zu erhalten. Er kann dann die Eigenschaften der Besselfunktionen nutzen. Da wir einen Beweis anstreben, der nicht auf Eigenschaften von Besselfunktionen basiert, weichen wir hier vom Originalbeweis ab. Wir transformieren anders, wir wollen den Vorfaktor 0 statt $n-1$ erhalten.

Wir verwenden die neue Unbekannte $W(s) := V(s)s^{(n-1)/2}$. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \partial_s W(s) &= \partial_s V(s) s^{(n-1)/2} + \frac{n-1}{2} V(s) s^{(n-3)/2}, \\ \partial_s^2 W(s) &= \partial_s^2 V(s) s^{(n-1)/2} + (n-1) \partial_s V(s) s^{(n-3)/2} + \frac{(n-1)(n-3)}{4} V(s) s^{(n-5)/2}. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Tatsache, dass bis auf den Faktor $s^{(n-1)/2}$ die ersten beiden Terme in der letzten Zeile mit den ersten beiden Termen in (5.9) übereinstimmen, erhalten wir eine einfache Gleichung für W :

$$\begin{aligned} \partial_s^2 W(s) + W(s) &= - \left(1 - \frac{\mu}{s^2}\right) V(s) s^{(n-1)/2} + \frac{(n-1)(n-3)}{4} V(s) s^{(n-5)/2} + V(s) s^{(n-1)/2} \\ &= \frac{\mu}{s^2} V(s) s^{(n-1)/2} + \frac{(n-1)(n-3)}{4} V(s) s^{(n-5)/2} = \frac{\nu}{s^2} W(s) \end{aligned}$$

mit dem Koeffizienten $\nu = \mu + (n-1)(n-3)/4$. Dies ist eine lineare Differentialgleichung für W , sie kann als eine Störung eines harmonischen Oszillators betrachtet werden. Eine wichtige Eigenschaft wird im folgenden Lemma 5.4 gezeigt, nämlich das asymptotische Verhalten der Lösungen: $W(s) = \alpha \cos(s + \beta) + O(1/s)$ für $s \rightarrow \infty$ für geeignete β und ein $\alpha \neq 0$.¹

Das asymptotische Verhalten von W impliziert $V(s) = \alpha s^{-(n-1)/2} \cos(s + \beta) + O(s^{-(n+1)/2})$ und damit $V(s)^2 s^{n-1} = |\alpha|^2 \cos^2(s + \beta) + O(s^{-1})$. Dies liefert (5.7) und damit ist der Beweis abgeschlossen. $\square$

Lemma 5.4 (Asymptotisches Verhalten eines gestörten harmonischen Oszillators). *Wir betrachten Intervalle $(s_0, \infty) \subset \mathbb{R}$ für $s_0 > 0$. Sei $W : [s_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von*

$$(\partial_s^2 + 1)W(s) = g(s)W(s) \quad \forall s \in (s_0, \infty) \quad (5.10)$$

für eine Funktion g mit der Abschätzung $|g(s)| \leq C_0 s^{-2}$. Dann ist W beschränkt und besitzt für geeignete $\alpha, \beta, C_1 \in \mathbb{R}$ das asymptotische Verhalten

$$|W(s) - \alpha \cos(s + \beta)| \leq C_1 s^{-1}. \quad (5.11)$$

Falls W nicht identisch verschwindet, so gilt $\alpha \neq 0$.

Beweis. Variation der Konstanten. Der Beweis basiert auf der Variation-der-Konstanten-Formel. Um (5.10) als System erster Ordnung zu schreiben, setzen wir

$$X(s) := \begin{pmatrix} W(s) \\ W'(s) \end{pmatrix}, \quad A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F(s) := \begin{pmatrix} 0 \\ g(s)W(s) \end{pmatrix}.$$

Damit kann man (5.10) schreiben als

$$\partial_s X(s) + A \cdot X(s) = F(s).$$

Die Fundamentalmatrix der homogenen Gleichung ist $S(t) = \exp(-At)$, die Einträge dieser Matrix sind $\pm \sin(t)$ und $\cos(t)$. Variation der Konstanten liefert die Formel

$$X(t) = S(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t S(t - s)F(s) ds. \quad (5.12)$$

Beschränktheit. Für beliebige Zeitpunkte $t_0 < t_1$ setzen wir $C_X := \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |X(t)|$ und $\eta = \int_{t_0}^\infty s^{-2} ds = 1/t_0$. Wegen $|F(s)| \leq C_0 s^{-2} C_X$ und $|S(s)| \leq 1$ erhalten wir

¹An der entsprechenden Stelle seines Beweises schreibt Rellich „Bekanntlich ...“. Dies war zu seiner Zeit sicherlich korrekt, aber heutzutage sind die Eigenschaften von Besselfunktionen nicht mehr allgemein bekannt.

aus (5.12) die Abschätzung $|X(t) - S(t - t_0)X(t_0)| \leq C_0\eta C_X \leq C_X/2$, wobei die letzte Ungleichung für jedes $t_0 > 2C_0$ gilt. Die Abschätzung ist unabhängig von t_1 . Da $S(t - t_0)X(t_0)$ unabhängig von t_1 beschränkt ist, folgt, für $t_0 > 2C_0$:

$$C_X = \sup_{t_0 \leq t \leq t_1} |X(t)| \leq |X(t_0)| + C_X/2.$$

Wir halten t_0 fest und erhalten $C_X \leq 2|X(t_0)|$, unabhängig von t_1 . Dass C_X unabhängig von t_1 ist, impliziert, dass $X(t)$ für alle $t < \infty$ beschränkt ist.

Abklingen und Grenzformel. Mit denselben Argumenten können wir nun die Abschätzungen verbessern. Wir wählen eine Folge $t_k \rightarrow \infty$ und verwenden (5.12) mit $t_0 = t_k$. Der Vektor $X(t_k)$ bestimmt $\alpha_k \in [0, \infty)$ und $\beta_k \in [0, 2\pi)$ so, dass

$$S(s - t_k)X(t_k) = \begin{pmatrix} \alpha_k \cos(s + \beta_k) \\ -\alpha_k \sin(s + \beta_k) \end{pmatrix} \quad \forall s > s_0.$$

Da α_k beschränkt ist, finden wir eine Teilfolge und Grenzwerte so, dass $\alpha_k \rightarrow \alpha \geq 0$ und $\beta_k \rightarrow \beta \in [0, 2\pi]$. Dies impliziert, dass der erste Teil der Lösung $X(t)$ in (5.12) in der gewünschten Weise konvergiert: Die erste Komponente erfüllt $e_1 \cdot S(t - t_k)X(t_k) = \alpha_k \cos(t + \beta_k) \rightarrow \alpha \cos(t + \beta)$ für alle t .

Der andere Term erfüllt unter Verwendung der Beschränktheit der Lösung $|X(s)| \leq C_X$ (wir benutzen hier die globale Schranke C_X) für jedes feste t :

$$\varepsilon_k(t) := \int_{t_k}^t S(t - s)F(s) ds, \quad |\varepsilon_k(t)| \leq \int_t^{t_k} C_0 C_X s^{-2} ds \leq C_0 C_X t^{-1}.$$

Mit (5.12) schreiben wir die Lösung als

$$\begin{aligned} W(t) &= e_1 \cdot X(t) = e_1 \cdot S(t - t_k)X(t_k) + e_1 \cdot \int_{t_k}^t S(t - s)F(s) ds \\ &= \alpha_k \cos(t + \beta_k) + e_1 \cdot \varepsilon_k(t). \end{aligned}$$

Beim Übergang $k \rightarrow \infty$ erhalten wir (5.11). Zudem erhalten wir eine Integralformel für W : Mit $F(s) = g(s)W(s)e_2$ gilt für jedes t ,

$$W(t) = \alpha \cos(t + \beta) + e_1 \cdot \int_{\infty}^t S(t - s)F(s) ds. \quad (5.13)$$

Nichttrivialer Vorfaktor. Es bleibt die letzte Aussage bezüglich $\alpha \neq 0$ zu zeigen. Wir zeigen: Wenn (5.11) mit $\alpha = 0$ gilt, dann ist W identisch verschwindend. Wir nehmen daher $\alpha = 0$ an. Wir wählen $t_0 \geq 2C_0$ und setzen $C_X := \sup_{t_0 \leq t < \infty} |W(t)|$. Dann liefert (5.13) für jedes $t \geq t_0$:

$$|W(t)| \leq \int_t^{\infty} |S(t - s)| |F(s)| ds \leq \int_t^{\infty} C_0 s^{-2} C_X ds \leq t_0^{-1} C_0 C_X \leq C_X/2.$$

Durch Bildung des Supremums über $t \geq t_0$ erhalten wir $C_X \leq C_X/2$. Dies impliziert $C_X = 0$ und damit $W \equiv 0$ auf $[t_0, \infty)$. Als Lösung einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit verschwindenden Anfangsdaten bei t_0 muss W identisch verschwinden. $\square$

5.2. Sommerfeld-Bedingung und Eindeutigkeit

Als Außenraumgebiete bezeichnen wir offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, deren Komplement eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist. Wir fordern immer, dass der Rand ein Lipschitz-Rand ist. Als Standardreferenz zu diesem Material benennen wir [2].

Definition 5.5 (Sommerfeld-Strahlungsbedingung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Außenraumgebiet und $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung der Helmholtzgleichung mit Parameter $\lambda = \omega^2$.*

Die klassische Sommerfeld-Strahlungsbedingung lautet: Es gelte

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{(n-1)/2} (\partial_r u - i\omega u) = 0 \quad (5.14)$$

gleichmäßig in der Richtung. Dies kann man mathematisch interpretieren als: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein Radius $R > 0$ mit

$$\sup_{|x|=r} r^{(n-1)/2} |\partial_r u(x) - i\omega u(x)| < \varepsilon \quad \forall r \geq R. \quad (5.15)$$

Für uns wird die nachfolgende schwächere Integralbedingung ausreichen:

$$\int_{\partial B_r} |\partial_r u(x) - i\omega u(x)|^2 dS(x) \rightarrow 0 \quad \text{für } r \rightarrow \infty. \quad (5.16)$$

Bemerkung 5.6 (Interpretation der Sommerfeld-Bedingungen). *Wenn die Lösung sich in radialer Richtung wie $e^{i\omega r}$ verhält, so erwarten wir, dass $\partial_r u$ sich ähnlich wie $i\omega u$ verhält. Eine solche Lösung kann also die Sommerfeld'sche Strahlungsbedingung erfüllen. Für die Lösung u aus (5.3) im Dreidimensionalen gilt*

$$\partial_r u(x) - i\omega u(x) = i\omega \frac{e^{i\omega r}}{r} - \frac{e^{i\omega r}}{r^2} - i\omega u(x) = -\frac{e^{i\omega r}}{r^2}.$$

Multipliziert mit $r^{(n-1)/2} = r$ konvergiert dies gegen 0.

Anders ist die Situation, wenn die Lösung sich in radialer Richtung wie $e^{-i\omega r}$ verhält; für eine solche Lösung gilt $|\partial_r u(x) - i\omega u(x)| \sim r^{-1}$ und die Sommerfeld'sche Strahlungsbedingung ist nicht erfüllt.

Wenn wir die zugehörige zeitabhängige Lösung ansehen, so ist diese im ersteren Fall $e^{i\omega r} e^{-i\omega t} = e^{i\omega(r-t)}$, also eine Welle, die nach außen läuft. Der zweite Fall beschreibt eine Welle, die nach innen läuft – eine solche Welle ist physikalisch nicht relevant.

Eindeutigkeit im Außenraumgebiet. Mit Hilfe des Lemmas von Rellich können wir für Lösungen, die die Sommerfeld-Bedingung erfüllen, die Eindeutigkeit nachweisen.

Satz 5.7 (Eindeutigkeit im Außenraumgebiet). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Außenraumgebiet, $R > 0$ sei ein Radius mit $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subset \Omega$. Die Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine Lösung der Helmholtzgleichung mit Parameter $\lambda = \omega^2$. Es gelte $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und die Sommerfeld'sche Strahlungsbedingung (5.16). Dann gilt $u \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$.*

Bemerkung 5.8. *Die Aussage des Satzes gilt auch für die Neumann-Randbedingung $\partial_\nu u = 0$ auf $\partial\Omega$. Sie gilt auch, wenn auf einem Teil des Randes $u = 0$ gefordert wird und auf dem Rest des Randes $\partial_\nu u = 0$. Der Beweis bleibt unverändert.*

Die Helmholtzgleichung

Beweis. Der Beweis basiert auf zwei Rechnungen. Die eine ist eine Auswertung der Sommerfeld-Bedingung. Für beliebige differenzierbare Funktionen u können wir rechnen:

$$|\partial_r u - i\omega u|^2 = |\partial_r u|^2 + \omega^2 |u|^2 - 2\omega \operatorname{Im}(\partial_r u \bar{u}) . \quad (5.17)$$

Wenn wir diese Identität über eine Sphäre $S_r := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\}$ integrieren, so erhalten wir

$$\int_{S_r} |\partial_r u - i\omega u|^2 = \int_{S_r} |\partial_r u|^2 + \omega^2 \int_{S_r} |u|^2 - 2\omega \int_{S_r} \operatorname{Im}(\partial_r u \bar{u}) . \quad (5.18)$$

Die Strahlungsbedingung (5.16) besagt, dass die linke Seite gegen 0 konvergiert für $r \rightarrow \infty$. Die rechte Seite konvergiert also auch gegen 0, und das, obwohl sie zwei nichtnegative Terme enthält.

Die zweite Rechnung liefert eine Aussage über den Term mit unbestimmtem Vorzeichen, das Integral über $\operatorname{Im}(\partial_r u \bar{u})$. Tatsächlich entsteht dieser Term als Randintegral beim Testen der Helmholtzgleichung mit der Lösung. Wir integrieren über $\Omega_r := \Omega \cap B_r(0)$ für $r \geq R$. Bei der partiellen Integration entsteht kein Randterm über $\partial\Omega$, weil dort u (oder $\partial_\nu u$) verschwindet.

$$0 = \int_{\Omega_r} (-\Delta u - \omega^2 u) \bar{u} = \int_{\Omega_r} \{|\nabla u|^2 - \omega^2 |u|^2\} - \int_{S_r} \partial_r u \bar{u} .$$

Das Volumenintegral ist reell. Indem wir den Imaginärteil der Gleichung bilden, erhalten wir

$$\int_{S_r} \operatorname{Im}(\partial_r u \bar{u}) = 0 . \quad (5.19)$$

Der letzte Term in (5.18) verschwindet also. Da die linke Seite im Limes verschwindet, müssen beide nichtnegativen Integrale im Limes verschwinden, insbesondere also das Sphärenintegral über $|u|^2$. Satz 5.1 liefert $u \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$. $\square$

Für viele Außenraumgebiete Ω liefert der Satz tatsächlich $u \equiv 0$ auf Ω . Da wir diese Frage hier nicht vertiefen wollen, verwenden wir die folgende Ad-hoc-Definition, wobei “ E ” für “Eindeutigkeit” steht:

Für $\lambda > 0$ heißt ein Außenraumgebiet Ω ein *E -Gebiet*, wenn gilt: Jede Lösung von $-\Delta u = \lambda u$ mit $u \equiv 0$ auf jeder Menge $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0) \subset \Omega$ verschwindet identisch auf Ω .

Die Definition ist so gestaltet, dass für E -Gebiete unser Satz $u \equiv 0$ auf Ω liefert.

Die Definition liefert, dass jede Menge $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus \bar{B}_R(0)$ ein E -Gebiet ist.

Das Prinzip der “eindeutigen Fortsetzbarkeit” (englisch “unique continuation”) impliziert, dass jedes einfach zusammenhängende Außenraumgebiet Ω ein E -Gebiet ist.

Der Energiefluss. Eine wichtige Größe im Eindeutigkeitsbeweis war der Energiefluss. Für eine Richtung $\nu \in \mathbb{R}^n$, $|\nu| = 1$, betrachten wir die Energieflussdichte

$$F_\nu(x) := \operatorname{Im}(\partial_\nu u(x) \bar{u}(x)) . \quad (5.20)$$

Für Lösungen u der homogenen Gleichung ist der gesamte Energiefluss durch alle Flächen gleich. Genauer: Sei $\Sigma \subset \Omega$ ein Gebiet, dessen Rand aus zwei geschlossenen Flächen besteht, $\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ mit einer “inneren” Fläche $\Gamma_1 \subset \Omega$ und einer disjunkten “äußeren” Fläche $\Gamma_2 \subset \Omega$. Dann gilt mit dem Normalenvektor ν_2 auf Γ_2 (äußerer Normalenvektor von Σ) und dem Normalenvektor ν_1 auf Γ_1 (innerer Normalenvektor von Σ):

$$\int_{\Gamma_2} \operatorname{Im}(\partial_{\nu_2} u \bar{u}) = \int_{\Gamma_1} \operatorname{Im}(\partial_{\nu_1} u \bar{u}) . \quad (5.21)$$

Die Fluss-Gleichung (5.21) erhält man, indem man die Gleichung $-\Delta u = \lambda u$ mit $\bar{u}$ multipliziert, das Ergebnis über Σ integriert, partiell integriert und dann den Imaginärteil nimmt.

Damit können wir den Eindeutigkeitsbeweis so interpretieren: Die Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ impliziert, dass der Energiefluss durch $\partial\Omega$ verschwindet. Wegen (5.21) muss dann der Energiefluss durch jede Kugelschale S_r verschwinden. Dies wird für die Eindeutigkeit benutzt, siehe (5.19).

Das Streupproblem. Die für uns wichtigste Lösung der Helmholtzgleichung im Außenraumgebiet ist die Fundamentallösung aus (5.3). Es gibt eine noch einfachere Lösung im Ganzraum, die wir bisher nicht betrachtet haben, nämlich planare Wellen. Für einen Vektor $k \in \mathbb{R}^n$ (der Wellenvektor) betrachten wir

$$u^{\text{inc}}(x) := e^{ik \cdot x} . \quad (5.22)$$

Wenn man das physikalisch relevante Feld benötigt, muss man oft nur den Realteil betrachten, also $\operatorname{Re} u^{\text{inc}}(x) = \cos(k \cdot x)$. Wegen $\Delta u^{\text{inc}} = -|k|^2 u^{\text{inc}}$ ist u^{inc} Lösung der Helmholtzgleichung mit $\lambda = \omega^2$, falls der Betrag des Wellenvektors gleich der zeitlichen Frequenz ist, $|k| = \omega$.

Die Lösung u^{inc} erfüllt nicht die Sommerfeld’sche Strahlungsbedingung. Physikalisch relevant ist die folgende Situation. Ein Objekt, beschrieben durch eine beschränkte abgeschlossene Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, wird “angestrahlt” oder “beschallt” mit der Welle u^{inc} . Wir können uns dann fragen, welche Anteile der Bestrahlung reflektiert werden oder zur Seite gestreut werden oder ob es quasi “hinter dem Objekt einen Schatten gibt”, also ein vermindertes Feld. Das ist das sogenannte Streupproblem.

Mathematisch ist es leicht zu beschreiben: Wir nehmen an, dass auf dem Außenraumgebiet $\Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \Sigma$ das gesamte Feld durch eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben ist; dieses ist eine Überlagerung der planaren Welle mit einer ausstrahlenden Welle,

$$u = u^{\text{inc}} + u^{\text{rad}}, \quad u(x) = e^{ik \cdot x} + u^{\text{rad}} . \quad (5.23)$$

Wenn die Physik eine Dirichlet-Randbedingung für u erfordert, so haben wir für u^{rad} das folgende System zu lösen (wir erinnern an $|k| = \omega$):

$$-\Delta u^{\text{rad}} = \omega^2 u^{\text{rad}} \quad \text{in } \Omega, \quad (5.24)$$

$$u^{\text{rad}}(x) = -e^{ik \cdot x} \quad \text{für } x \in \partial\Sigma, \quad (5.25)$$

$$u^{\text{rad}}(x) \text{ erfüllt die Sommerfeld'sche Strahlungsbedingung.} \quad (5.26)$$

Für dieses System haben wir in Satz 5.7 eine Eindeutigkeitsaussage erhalten. Im nächsten Abschnitt werden wir auch die Existenz beweisen.

5.3. Darstellungsformeln und Existenz

Während die bisherigen Betrachtungen dimensionsunabhängig waren, schränken wir uns ab jetzt auf 3 Raumdimensionen ein, weil wir die Fundamentallösung $\Phi(x, y) := e^{i\omega|x-y|}/(4\pi|x-y|)$ benutzen. Wir gehen von der Darstellungsformel auf beschränkten Gebieten G aus. Für beliebiges $x \in G$ gilt, siehe Übung 5.4:

$$u(x) = \int_{\partial G} \{ \partial_\nu u(y) \Phi(x, y) - u(y) \partial_\nu \Phi(x, y) \} dS(y). \quad (5.27)$$

Wir betrachten im Folgenden die Fundamentallösung $\Phi(x, y)$ für ein festes $x \in \Omega$ und für großes $|y| = r$. Der explizite Ausdruck für $\Phi(x, y)$ kann approximiert werden: Wir verwenden $\nu = y/r$ und rechnen $|x-y|^2 = |y|^2 - 2x \cdot y + O(1)$ und daher, mit der Taylor-Formel, $|x-y| = |y| - x \cdot \nu + O(1/r)$. Wir erhalten für die Fundamentallösung

$$\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} = \frac{e^{i\omega|y|}}{|y|} \left[e^{-i\omega x \cdot \nu} + O\left(\frac{1}{r}\right) \right]. \quad (5.28)$$

Wenn ∇_y den Gradienten in der Variablen y bezeichnet, so erhalten wir für die Ableitung

$$\begin{aligned} \nu \cdot \nabla_y \left(\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \right) &= -i\omega \left(\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|} \nu \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right) - \left(\frac{e^{i\omega|x-y|}}{|x-y|^2} \nu \cdot \frac{x-y}{|x-y|} \right) \\ &= i\omega \frac{e^{i\omega|y|}}{|y|} \left[e^{-i\omega x \cdot \nu} + O\left(\frac{1}{r}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Damit haben wir insbesondere auch verifiziert, dass die Fundamentallösung die klassische Sommerfeld-Bedingung aus (5.14) erfüllt: $|y| |\partial_\nu \Phi(x, y) - i\omega \Phi(x, y)| \rightarrow 0$ für $|y| = r \rightarrow \infty$.

Existenz im Außenraumgebiet. Wir verwenden die Darstellungsformeln, um einen Existenzsatz herzuleiten. Wir erinnern daran, dass wir E -Gebiete auf Seite 32 eingeführt haben und dass gilt: Einfach zusammenhängende Außenraumgebiete sind E -Gebiete.

Satz 5.9 (Existenz im Außenraumgebiet). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein E -Gebiet, $\omega > 0$, $R > 0$ ein Radius mit $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0) \subset \Omega$, eine rechte Seite sei gegeben durch $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ von der Klasse $L^2(\Omega)$ mit Träger in $B_R(0)$. Dann existiert eine Lösung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ der Helmholtzgleichung $-\Delta u - \omega^2 u = f$ zur Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$ und der Strahlungsbedingung (5.16). Die Lösung besitzt für $|x| > R$ die Darstellung*

$$u(x) = \int_{\partial B_R(0)} \{ \partial_\nu u(y) \Phi(x, y) - u(y) \partial_\nu \Phi(x, y) \} dS(y). \quad (5.30)$$

Bemerkung: Eine andere Randbedingung (homogene Neumann-Bedingung oder eine inhomogene Bedingung) kann auf $\partial\Omega$ gestellt werden. Die Aussage und der Beweis bleiben unverändert.

Beweis. Schritt 1: Näherungslösungen. Für einen (großen) Radius $r \geq R$ betrachten wir Lösungen $u_r : \Omega_r \rightarrow \mathbb{C}$ auf einem beschränkten Gebiet, nämlich auf $\Omega_r := \Omega \cap B_r(0)$. Wir betrachten das Problem

$$-\Delta u_r - \omega^2 u_r = f \quad \text{in } \Omega_r, \quad (5.31)$$

$$u_r = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (5.32)$$

$$\partial_\nu u_r = i\omega u_r \quad \text{auf } \partial B_r(0). \quad (5.33)$$

Zur Lösbarkeit: Als Funktionenraum verwenden wir $X := \{u \in H^1(\Omega_r) \mid u|_{\partial\Omega} = 0\}$, darauf definieren wir eine Sesquilinearform durch

$$a(u, v) := \int_{\Omega_r} \nabla u \cdot \nabla \bar{v} - \omega^2 \int_{\Omega_r} u \bar{v} + i\omega \int_{\partial B_r(0)} u \bar{v}. \quad (5.34)$$

Ein Element $u \in X$ ist eine Lösung von (5.31)–(5.33), falls

$$a(u, v) = \int_{\Omega_r} f \bar{v} \quad \forall v \in X. \quad (5.35)$$

Das Problem (5.35) auf der beschränkten offenen Menge Ω_r hat die Fredholm-Eigenschaft. Dies kann wie in Abschnitt 4.2 gezeigt werden, wir wollen dies mit Übung 5.5 untersuchen. Wir gehen in den nächsten Schritten des Beweises von der eindeutigen Lösbarkeit dieser Probleme aus.

Annahme E, Existenz: Es gibt eine Teilfolge $r \rightarrow \infty$, so dass die Probleme (5.35) eindeutig lösbar sind für alle r in der Folge.

Schritt 2: Abschätzungen. Im Folgenden werden Sphären mit $S_r := \partial B_r(0)$ bezeichnet. Wir starten mit dem Testen der Gleichung mit $\bar{u}_r$. Wegen der Sommerfeld-artigen Randbedingung (5.33) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_r} f \bar{u}_r &= \int_{\Omega_r} (-\Delta u_r - \omega^2 u_r) \bar{u}_r = \int_{\Omega_r} \{|\nabla u_r|^2 - \omega^2 |u_r|^2\} - \int_{S_r} \partial_\nu u_r \bar{u}_r \\ &= \int_{\Omega_r} \{|\nabla u_r|^2 - \omega^2 |u_r|^2\} - i\omega \int_{S_r} |u_r|^2. \end{aligned}$$

Der Imaginärteil des Volumenintegrals auf der rechten Seite verschwindet, wir erhalten also die Information

$$-\omega^{-1} \operatorname{Im} \int_{\Omega_r} f \bar{u}_r = \int_{S_r} |u_r|^2. \quad (5.36)$$

Da f seinen Träger in $B_R(0)$ hat, liefert diese Identität, dass die Werte von u_r auf S_r durch die Norm von u_r in $B_R(0)$ abgeschätzt werden können.

Wir wählen ein $\rho > R$, bis zum Ende des Beweises ist dieser Radius fest. Zu einer Folge von Lösungen $(u_r)_r$ betrachten wir die Folge der Normen

$$N_r := \|u_r\|_{L^2(B_\rho(0))} = \left(\int_{B_\rho(0)} |u_r|^2 \right)^{1/2}. \quad (5.37)$$

Wir führen eine zweite Annahme ein.

Annahme B, Beschränktheit: Für jede Folge $r \rightarrow \infty$, für die Lösungen u_r existieren, ist die Folge N_r beschränkt.

Schritt 3: Konvergenzen in Ω_ρ . Wir gehen von den Annahmen E und B aus, uns ist also eine Folge von Näherungslösungen u_r gegeben, für die $u_r|_{\Omega_\rho}$ beschränkt ist in $L^2(\Omega_\rho)$. Wir wählen eine Teilfolge $r \rightarrow \infty$ und eine Grenzfunktion u mit der Konvergenz $u_r|_{\Omega_\rho} \rightharpoonup u$ schwach in $L^2(\Omega_\rho)$ für $r \rightarrow \infty$.

Da es sich um Lösungen von Poisson-Problemen handelt, ist die Konvergenz automatisch besser, das Stichwort lautet "Caccioppoli-Ungleichung". Wir skizzieren das Argument: Wir wählen eine glatte Abschneidefunktion $\theta : \Omega \rightarrow [0, 1]$ mit Träger in Ω_ρ und mit $\theta \equiv 1$ in einer Umgebung von $\bar{\Omega}_R$. Gleichung (5.31), also $-\Delta u_r - \omega^2 u_r = f$, testen wir mit $\bar{u}_r \theta^2$ und erhalten

$$\int_{\Omega_\rho} |\nabla u_r|^2 \theta^2 + 2 \int_{\Omega_\rho} \bar{u}_r \theta \nabla u_r \cdot \nabla \theta = \omega^2 \int_{\Omega_\rho} |u_r|^2 \theta^2 + \int_{\Omega_\rho} f \bar{u}_r \theta^2. \quad (5.38)$$

Die Terme auf der rechten Seite sind beschränkt. Der zweite Term auf der linken Seite wird mit Cauchy-Schwarz und ε -Ungleichung abgeschätzt durch

$$2 \left| \int_{\Omega_\rho} \bar{u}_r \theta \nabla u_r \cdot \nabla \theta \right| \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_\rho} |\nabla u_r|^2 \theta^2 + C \int_{\Omega_\rho} |u_r|^2 |\nabla \theta|^2.$$

Der erste Term der rechten Seite wird in die linke Seite von (5.38) absorbiert. Der zweite Term der rechten Seite ist beschränkt. Wir erhalten daher auf jeder verkleinerten Menge (also zum Beispiel auf Ω_R) eine H^1 -Abschätzung der Lösungsfolge. Wir erhalten auf Ω_R die schwache H^1 - und die starke L^2 -Konvergenz der Folge $(u_r|_{\Omega_R})_r$.

Wir können ein ähnliches Argument nochmals in einer Umgebung von $\partial B_R(0)$ anwenden: Für eine glatte Abschneidefunktion $\vartheta : \Omega \rightarrow [0, 1]$, die nur in einer Umgebung von $\partial B_R(0)$ lebt, erfüllt die neue Funktion $U_r = u_r \vartheta$ die elliptische Gleichung

$$\Delta U_r = (-\omega^2 u_r - f) \vartheta + 2 \nabla u_r \cdot \nabla \vartheta + u_r \Delta \vartheta$$

mit Nullrandwerten. Da die rechte Seite schwach in L^2 konvergiert, konvergiert U_r (und damit auch u_r) in einer Umgebung von S_R sogar schwach in H^2 . Damit konvergieren auch Spuren von ersten Ableitungen auf S_R stark in $L^2(S_R)$.

Wir fassen zusammen: Auf Ω_ρ konvergieren die u_r schwach in L^2 gegen die Grenzfunktion u , diese ist also distributionelle Lösung der Helmholtzgleichung. Auf Ω_R konvergieren die u_r sogar schwach in H^1 gegen die Grenzfunktion u , diese ist also auch schwache Lösung der Helmholtzgleichung in Ω_R und erfüllt die Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Auf S_R gilt die Konvergenz der Spuren von u_r und von Spuren der ersten Ableitungen.

Schritt 4: Darstellungsformel. Wir verwenden die Darstellungsformel (5.27) für u_r im beschränkten Gebiet $D_r = B_r(0) \setminus \bar{B}_R(0)$. Wir berechnen zunächst das äußere Randintegral, also das Integral über S_r . Dieses Integral vereinfacht sich wegen der gewählten Randbedingung $\partial_\nu u_r = i\omega u_r$:

$$\begin{aligned} & \int_{S_r} \{ \partial_\nu u_r(y) \Phi(x, y) - u_r(y) \partial_\nu \Phi(x, y) \} dS(y) \\ &= \int_{S_r} \{ i\omega u_r(y) \Phi(x, y) - u_r(y) \partial_\nu \Phi(x, y) \} dS(y) \end{aligned}$$

$$= \int_{S_r} u_r(y) \{i\omega\Phi(x, y) - \partial_\nu\Phi(x, y)\} dS(y).$$

Der Betrag des Randintegrals auf der linken Seite ist daher abschätzbar durch

$$|l.S.| \leq \|u_r\|_{L^2(S_r)} \left(\int_{S_r} |i\omega\Phi(x, y) - \partial_\nu\Phi(x, y)|^2 dS(y) \right)^{1/2}$$

Der Faktor $\|u_r\|_{L^2(S_r)}$ ist wegen (5.36) und der Beschränktheit der Norm N_r beschränkt (unabhängig von r). Der zweite Faktor geht für jedes feste $x \in \Omega$ gegen 0 für $r \rightarrow \infty$; dies folgt aus der expliziten Form von Φ und den beiden Ausdrücken (5.28) und (5.29). Im Grunde ist dies nichts weiter als die Tatsache, dass $y \mapsto \Phi(x, y)$ die Sommerfeld'sche Strahlungsbedingung erfüllt, wir verweisen auf Übung 5.6.

Diese Vorüberlegung zeigt, dass wir in der Darstellungsformel für das beschränkte Gebiet $D_r = B_r(0) \setminus \bar{B}_R(0)$ Grenzwerte bilden können. Wir erinnern, dass in einer Umgebung von ∂B_R die Funktionen glatt sind und auch Ableitungen von u_r konvergieren. Für beliebiges $x \in D_r$ schreiben wir $u_r(x)$ mit der Fundamentallösung und bilden den Limes $r \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} u_r(x) &= \int_{S_r} \{\partial_\nu u_r(y)\Phi(x, y) - u_r(y)\partial_\nu\Phi(x, y)\} dS(y) \\ &\quad + \int_{S_R} \{\partial_\nu u_r(y)\Phi(x, y) - u_r(y)\partial_\nu\Phi(x, y)\} dS(y) \\ &\rightarrow \int_{S_R} \{\partial_\nu u(y)\Phi(x, y) - u(y)\partial_\nu\Phi(x, y)\} dS(y) =: u(x). \end{aligned}$$

Dies liefert eine Grenzfunktion u auf ganz Ω . Für $|x| < \rho$ ist u die lokale Grenzfunktion der u_r , für $|x| > R$ ist u durch die Darstellungsformel (5.30) gegeben.

Die Darstellungsformel für u zeigt, dass u auch in $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0)$ eine Lösung der Helmholtzgleichung ist, weil ja $x \mapsto \Phi(x, y)$ und $x \mapsto \partial_\nu\Phi(x, y)$ für jedes feste y Lösungen sind.

Weiterhin erfüllt u die Sommerfeld'sche Strahlungsbedingung, weil sowohl $\Phi(x, y)$ als auch jede Ableitung $\nu_0 \cdot \nabla_y \Phi(x, y)$ für beschränktes y und $|x| \rightarrow \infty$ die Strahlungsbedingung erfüllt. Dies soll in Übung 5.7 nachgewiesen werden. Damit haben wir, unter den Annahmen E und B, eine Lösung u für das Außenraumproblem gefunden. Aufgrund der Voraussetzung an das Außenraumgebiet ist diese Lösung eindeutig bestimmt.

Schritt 5: Zur Annahme B. Unser Ziel ist es, einen Widerspruch herzuleiten, wenn wir annehmen, dass es eine Folge $r \rightarrow \infty$ mit Existenz von u_r gibt, so dass aber $N_r \rightarrow \infty$ gilt.

Wir fixieren die Folge $r \rightarrow \infty$ mit $N_r \rightarrow \infty$. Wir normieren die Lösungsfolge und setzen $\tilde{u}_r := u_r/N_r$. Diese Folge ist eine Folge von Lösungen zu $\tilde{f}_r := f/N_r \rightarrow 0$. Alle Betrachtungen der Schritte 3 und 4 bleiben anwendbar für die Folge $\tilde{u}_r$ (die ja nach Konstruktion die Beschränktheit erfüllt). Wir erhalten eine Grenzfunktion $\tilde{u}$ zu der rechten Seite $\tilde{f} = 0$. Gemäß Annahme an Ω gilt die Eindeutigkeit, es muss also $\tilde{u} = 0$ gelten.

Wir erinnern, dass $\tilde{u}_r \rightarrow \tilde{u}$ eine starke L^2 -Konvergenz in Ω_R ist. Wir haben sogar etwas mehr festgestellt: Für jeden Radius $s \in (R, \rho)$ gilt die starke L^2 -Konvergenz auf Ω_s . Auf der Kugelschale $\Omega_\rho \setminus \Omega_s = B_\rho(0) \setminus B_s(0)$ gilt die starke L^2 -Konvergenz

aufgrund der Konvergenz in der Darstellungsformel (punktweise Konvergenz und Beschränktheit).

Damit ist der Widerspruch gefunden: Einerseits sind die $\tilde{u}_r$ auf $B_\rho(0)$ normiert, andererseits konvergieren sie stark gegen $\tilde{u} = 0$ auf $B_\rho(0)$.

Schritt 6: Zur Annahme E. Wir nehmen an, dass es eine Folge $r \rightarrow \infty$ gibt, so dass entlang dieser Folge die Probleme in den beschränkten offenen Mengen *nicht* lösbar sind. Die Fredholm-Eigenschaft der Probleme impliziert, dass wir dann eine Folge von Lösungen u_r der homogenen Probleme ($f = 0$) finden. Wir normieren die Folge, so dass $\|u_r\|_{L^2(B_\rho(0))} = 1$ für alle r gilt. Die obigen Schritte 3 und 4 sind auf diese Folge anwendbar. Sie liefern eine Grenzfunktion u , die das homogene Problem und die Strahlungsbedingung auf Ω löst. Wegen der Eindeutigkeit muss $u = 0$ gelten. Andererseits war u_r normiert auf $B_\rho(0)$ und konvergiert in $L^2(B_\rho(0))$ stark gegen u , was wie in Schritt 5 folgt. Dies liefert den gewünschten Widerspruch. $\square$

Mit den Sätzen 5.7 und 5.9 haben wir ein befriedigendes Verständnis für die Helmholtzgleichung im Außenraumgebiet gewonnen: Die Sommerfeld-Bedingung impliziert Eindeutigkeit von Lösungen in beliebiger Raumdimension. In drei Dimensionen existiert eine Lösung zur Sommerfeld-Bedingung. Der Beweis des Existenzsatzes funktioniert in beliebiger Dimension, sobald man eine Fundamentallösung hat.

Das Fernfeld. Man kann Lösungen noch genauer charakterisieren: In großer Entfernung ist die Lösung im Wesentlichen durch ihr sogenanntes Fernfeld gegeben. Die entsprechende Aussage ist insbesondere im Streuproblem von Interesse.

Satz 5.10 (Fernfeld). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Außenraumgebiet mit $\mathbb{R}^3 \setminus B_R(0) \subset \Omega$. Die Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sei eine Lösung von $-\Delta u - \omega^2 u = f$, wobei $f \in L^2(\Omega)$ kompakten Träger hat. Dann hat u das asymptotische Verhalten für $x = r\xi$ und $r \rightarrow \infty$:*

$$u(x) = \frac{e^{i\omega r}}{r} [u_\infty(\xi) + O(1/r)] , \quad (5.39)$$

wobei das Fernfeld-Muster $u_\infty : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$u_\infty(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial B_R} \{ \partial_\nu u(y) e^{-i\omega y \cdot \xi} + u(y) i\omega \nu(y) \cdot \xi e^{-i\omega y \cdot \xi} \} dS(y) . \quad (5.40)$$

Beweis. Wir gehen von der Darstellungsformel (5.30) für die Lösung aus,

$$u(x) = \int_{\partial B_R} \{ \partial_\nu u(y) \Phi(x, y) - u(y) \partial_\nu \Phi(x, y) \} dS(y) . \quad (5.41)$$

Einsetzen der Asymptotiken (5.28) und (5.29) liefert das Ergebnis. $\square$

Ein großer Bereich mathematischer Forschung beschäftigt sich mit einer zentralen Frage, dem **inversen Problem**. Es ist relevant in vielen Anwendungen, man denke etwa an Computertomographie.

Angenommen, für ein ‘‘Hindernis’’ (eine beschränkte Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$) kennt man, für jede Richtung $k \in \partial B_\omega(0) \subset \mathbb{R}^n$ einer einfallenden Welle, das Fernfeld $u_\infty = u_\infty^{(k)} : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}$ der zugehörigen ausstrahlenden Welle u^{rad} aus (5.24)–(5.26). Können wir aus dieser Information das Hindernis Σ rekonstruieren?

Es stellt sich heraus, dass dies eine sehr schwierige Aufgabe ist. Hier werden wir uns aber nicht weiter mit den entsprechenden Methoden beschäftigen. Man kann die Frage etwas abwandeln und die Gleichung $-\Delta u - \omega^2 b u = 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ betrachten für eine einfallende Welle, wobei wir einen positiven Koeffizienten $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ verwenden, der außerhalb eines Kompaktums identisch 1 sein soll. In diesem Setting wird ein positives Resultat in Theorem 10.5 in [2] gegeben: Die Kenntnis von $u_\infty^{(k)}$ für alle k bestimmt den Koeffizienten b eindeutig.

Übungen

Übung 5.1 (Radialsymmetrische Lösungen im Dreidimensionalen). *Wir betrachten $x \in \mathbb{R}^3$ und benutzen $r = |x|$. Geben Sie die gewöhnliche Differentialgleichung an, die U erfüllt, wenn $u(x) = U(r)$ eine Lösung der Helmholtzgleichung $-\Delta u = \lambda u$ ist. Rechnen Sie nach, dass*

$$u(x) := \frac{e^{i\omega r}}{r}$$

eine Lösung der Helmholtzgleichung für $\lambda = \omega^2$ ist.

Übung 5.2 (Variation der Konstanten). *Zeigen Sie für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und die Fundamentalmatrix $S(t) = \exp(-At)$ für Lösungen X der gewöhnlichen Differentialgleichung $\partial_t X + A \cdot X = F$ die Variation-der-Konstanten-Formel*

$$X(t) = S(t - t_0)X(t_0) + \int_{t_0}^t S(t - s)F(s) ds.$$

Übung 5.3 (Fundamentallösung). *Zeigen Sie, dass*

$$\Phi(x) := \frac{e^{i\omega|x|}}{4\pi|x|}$$

eine Fundamentallösung der Helmholtzgleichung ist in dem Sinne, dass

$$(-\Delta - \omega^2)\Phi = \delta_0.$$

Übung 5.4 (Darstellung im beschränkten Gebiet). *Wir betrachten ein beschränktes Lipschitz-Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ und eine Lösung u der Helmholtzgleichung $-\Delta u = \omega^2 u$ in Ω mit der Regularität $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$. Zeigen Sie mit der Fundamentallösung*

$$\Phi(x, y) := \frac{e^{i\omega|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

die Darstellungsformel für beliebiges $x \in \Omega$:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \{\partial_\nu u(y)\Phi(x, y) - u(y)\partial_\nu \Phi(x, y)\} dS(y),$$

wobei wir die letzte Normalenableitung als Ableitung in der y -Variablen verstehen.

Übung 5.5 (Fredholm-Eigenschaft). *Zeigen Sie die Fredholm-Alternative für das Problem (5.35) auf dem beschränkten Gebiet Ω_r .*

Übung 5.6 (Kleinheit eines Integrals). Zeigen Sie in $\mathbb{R}^3$, für festes $x \in \mathbb{R}^3$ und für die Fundamentallösung $\Phi(x, y) := e^{i\omega|x-y|}/(4\pi|x-y|)$ die Konvergenz des Sommerfeld-Integrals für $r \rightarrow \infty$:

$$\int_{S_r} |i\omega\Phi(x, y) - \partial_\nu\Phi(x, y)|^2 dS(y) \rightarrow 0.$$

Übung 5.7 (Sommerfeld-Bedingung für ein Integral). Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ und die Fundamentallösung $\Phi(x, y) := e^{i\omega|x-y|}/(4\pi|x-y|)$. Eine Lösung der Helmholtzgleichung sei gegeben durch eine Darstellungsformel: Für zwei Funktionen $f, g : \partial B_R(0) \rightarrow \mathbb{C}$ gelte, für jedes $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}_R(0)$,

$$u(x) = \int_{\partial B_R} \{f(y)\Phi(x, y) - g(y)\partial_\nu\Phi(x, y)\} dS(y).$$

Zeigen Sie, dass u die Sommerfeld-Strahlungsbedingung erfüllt.

Teil III.

Die Helmholtzgleichung mit periodischen Koeffizienten

6. Floquet-Bloch Transformation

6.1. Die Transformation und ihre Inverse

Unser Interesse ist die Analyse von Wellenleitern. Das typische Grundgebiet ist hier $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$, wobei $\Sigma \subset \mathbb{R}^{d-1}$ der Querschnitt des Wellenleiters ist, dies soll immer ein beschränktes Lipschitz-Gebiet sein, $d \geq 2$ ist die Dimension. Alles, was wir hier besprechen, gilt aber auch im Eindimensionalen, $d = 1$, man betrachtet dann immer $\Omega = \mathbb{R}$ (anstelle von $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$). Der Zielraum aller Funktionen sei hier immer $\mathbb{C}$, daher setzen wir zum Beispiel $L^2(\Omega) := L^2(\Omega, \mathbb{C})$. Der Zielraum $\mathbb{C}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ kann auch betrachtet werden, man kann die Theorie dann auf jede Komponente einzeln anwenden.

Wir führen die Floquet-Bloch Transformation nur in der x_1 -Variablen durch. Wir verwenden die folgende Notation: Für den Floquet-Parameter (das Quasimoment) schreiben wir $\alpha \in I := [-\pi, \pi]$. Die Periodizitätszelle ist $W := (0, 1) \times \Sigma$.

Definition der Floquet-Bloch Transformation

Definition 6.1 (Floquet-Bloch Transformation). *Die Floquet-Bloch Transformation ist eine beschränkte lineare Abbildung*

$$\mathcal{F}_{\text{FB}} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(W \times I), \quad u \mapsto \hat{u}. \quad (6.1)$$

Für glatte Funktionen u mit kompaktem Träger ist die Transformation definiert durch

$$\hat{u}(x, \alpha) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} u(x + \ell e_1) e^{-i\ell\alpha}, \quad (6.2)$$

für jedes $x \in W$ und $\alpha \in I$. Die Abbildung $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ aus (6.1) ist als die stetige Fortsetzung dieser Abbildung definiert.

Lemma 6.2 (Wohldefiniertheit). *Die Abbildung (6.2) besitzt eine eindeutige stetige Fortsetzung zu einem beschränkten linearen Operator $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ wie in (6.1). Die Transformation $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ respektiert das Skalarprodukt, es gilt $\langle \mathcal{F}_{\text{FB}}(u), \mathcal{F}_{\text{FB}}(v) \rangle_{L^2(W \times I)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ für alle $u \in X = L^2(\Omega)$, sie ist daher insbesondere eine Isometrie.*

Beweis. Die zentrale Beobachtung ist die nachfolgende Identität für beliebige Elemente $u, v \in C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}, \hat{v} \rangle_{L^2(W \times I)} &= \int_I \int_W \hat{u}(x, \alpha) \overline{\hat{v}(x, \alpha)} dx d\alpha \\ &\stackrel{(6.2)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_I \int_W \sum_{\ell, k \in \mathbb{Z}} u(x + \ell e_1) \overline{v(x + k e_1)} e^{-i(\ell - k)\alpha} dx d\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_W \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{k\ell} u(x + \ell e_1) \overline{v(x + k e_1)} dx \\
&= \int_W \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} u(x + \ell e_1) \overline{v(x + \ell e_1)} dx = \int_{\mathbb{R} \times \Sigma} u \bar{v} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (6.3)
\end{aligned}$$

Die Transformation $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ respektiert also das Skalarprodukt und ist daher insbesondere auch normerhaltend.

Aus dieser Eigenschaft folgt auch, dass die Fortsetzung $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ wohldefiniert ist auf $L^2(\Omega)$: Eine beliebige Funktion $u \in L^2(\Omega)$ kann approximiert werden durch glatte Funktionen mit kompaktem Träger $u_j \rightarrow u$. Die Folge $(u_j)_j$ ist eine Cauchy-Folge in $L^2(\Omega)$, also sind die Bilder $(\hat{u}_j)_j$ eine Cauchy-Folge in $L^2(W \times I)$. Daher haben die Bilder einen Limes $\hat{u}$ in diesem Raum (mit dem üblichen Argument ist dieser Limes von der Wahl der Folge unabhängig). Auf diese Weise ist die Abbildung $\mathcal{F}_{\text{FB}} : u \mapsto \hat{u}$ definiert. Die Fortsetzung respektiert ebenfalls das Skalarprodukt. $\square$

Die Rücktransformation

Wir werden nicht nur zeigen, dass $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ invertierbar ist, wir werden sogar den inversen Operator $\mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1} : \hat{u} \mapsto u$ mit einer einfachen Formel beschreiben können.

Definition 6.3 (Die inverse Transformation). *Die inverse Transformation ist der stetige lineare Operator*

$$\mathcal{G} : L^2(W \times I) \rightarrow L^2(\Omega), \quad (6.4)$$

der eine Funktion $\hat{u} \in L^2(W \times I)$ auf die Funktion $u = \mathcal{G}(\hat{u})$ abbildet, die für fast alle $x \in W$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gegeben ist durch

$$u(x + k e_1) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I \hat{u}(x, \beta) e^{ik\beta} d\beta. \quad (6.5)$$

Ähnlich wie in Definition 6.1 ist nicht sofort klar, ob der Operator $\mathcal{G}$ wohldefiniert ist. Die Situation ist jedoch ein wenig anders: Für den Operator $\mathcal{G}$ können wir die Zielfunktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tatsächlich für alle $\hat{u} \in L^2(W \times I)$ angeben – allerdings ist a priori nicht klar, dass auch $u \in L^2(\Omega)$ gilt.

Lemma 6.4 ($\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1}$). *Der Operator $\mathcal{G}$ aus Definition 6.3 ist wohldefiniert, er ist ein normerhaltender Isomorphismus und er ist ein inverser Operator zu $\mathcal{F}_{\text{FB}}$.*

Beweis. Schritt 1: Die zentrale Rechnung. Wir betrachten eine glatte Funktion mit kompaktem Träger $u \in C_c^\infty(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ und dazu die Transformierte $\hat{u} = \mathcal{F}_{\text{FB}}(u)$ aus (6.2). Wir rechnen, für beliebiges $x \in W$ und beliebiges $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(\hat{u})(x + k e_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I \hat{u}(x, \beta) e^{ik\beta} d\beta = \frac{1}{2\pi} \int_I \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} u(x + \ell e_1) e^{-i\ell\beta} e^{ik\beta} d\beta \\
&= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \delta_{k\ell} u(x + \ell e_1) = u(x + k e_1).
\end{aligned}$$

Die Transformation (6.5) stellt also tatsächlich die ursprüngliche Funktion wieder her. Damit ist $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{\text{FB}}(u) = u$ zumindest für glatte Funktionen u gezeigt.

Schritt 2: Das Bild von $\mathcal{F}_{\text{FB}}$. Warum sind wir noch nicht fertig mit dem Beweis? Nach allem, was wir bisher erarbeitet haben, könnte das Bild $\mathcal{F}_{\text{FB}}(L^2(\Omega))$ immer noch ein echter Unterraum von $L^2(W \times I)$ sein. Dann kann $\mathcal{G}$ linksinvers sein, aber nicht rechtsinvers. Zudem könnte $\mathcal{G}$ dann auf ganz $L^2(W \times I)$ nicht wohldefiniert sein (weil die Bildelemente nicht in $L^2(\Omega)$ liegen). Dies illustriert, dass es hilfreich wäre, zu wissen, dass $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ surjektiv ist,

$$\mathcal{F}_{\text{FB}}(L^2(\Omega)) = L^2(W \times I). \quad (6.6)$$

Um (6.6) zu zeigen, zeigen wir zunächst, dass das Bild $\mathcal{F}_{\text{FB}}(L^2(\Omega))$ zumindest dicht liegt in $L^2(W \times I)$. Gemäß Lebesgue-Theorie spannen Funktionen der Form $\hat{u}(x, \alpha) = \psi(x)\theta(\alpha)$ für $\psi \in C_c^\infty(W)$ und $\theta : I \rightarrow \mathbb{C}$ einen dichten Unterraum auf. Wir verwenden nun zusätzlich die Theorie der Fourier-Reihen, welche besagt, dass sich jede glatte Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{C}$ mit Linearkombinationen von Funktionen $e^{-i\ell\alpha}$ in $L^2(I)$ approximieren lässt. Daher spannen auch die Funktionen $\hat{u}(x, \alpha) = \psi(x)e^{-i\ell\alpha}$ für $\psi : W \rightarrow \mathbb{C}$ glatt und $\ell \in \mathbb{Z}$ einen dichten Unterraum auf.

Es genügt also, für eine Funktion $\hat{u}(x, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\psi(x)e^{-i\ell\alpha}$ ein Urbild zu finden. Wir finden es mit der Formel (6.5) für $\mathcal{G}$,

$$u(x + k e_1) = \frac{1}{2\pi} \int_I \psi(x) e^{-i\ell\beta} e^{ik\beta} d\beta = \psi(x) \delta_{k,\ell}.$$

Tatsächlich sieht man sofort, dass dieses u (was nur im Segment $[\ell, \ell + 1] \times \Sigma$ nicht verschwindet) tatsächlich $\mathcal{F}_{\text{FB}}(u)(x, \beta) = \hat{u}(x, \beta)$ erfüllt.

Damit ist gezeigt, dass das Bild $\mathcal{F}_{\text{FB}}(L^2(\Omega))$ dicht liegt in $L^2(W \times I)$. Sei nun $\hat{u}_j \rightarrow \hat{u}$ eine konvergente Folge von Bildelementen, also $\hat{u}_j = \mathcal{F}_{\text{FB}}(u_j)$. Wegen der Isometrieeigenschaft von $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ ist dann mit $(\hat{u}_j)_j$ auch $(u_j)_j$ eine Cauchy-Folge. Es gilt also $u_j \rightarrow u$ für ein $u \in L^2(\Omega)$ und, wegen Stetigkeit von $\mathcal{F}_{\text{FB}}$, auch $\mathcal{F}_{\text{FB}}(u) = \hat{u}$. Dies zeigt (6.6).

Schritt 3: Die Eigenschaften von $\mathcal{G}$. Wir finden nun alle gewünschten Eigenschaften. Die Abbildung $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ ist als Isometrie injektiv und wegen (6.6) ist sie auch surjektiv. Als bijektive lineare stetige Abbildung zwischen Banachräumen besitzt sie eine Inverse $\mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1} : L^2(W \times I) \rightarrow L^2(\Omega)$.

In Schritt 2 haben wir gesehen, dass der Operator $\mathcal{G}$ auf einer dichten Teilmenge von $L^2(W \times I)$ wohldefiniert ist. Bildelemente $\hat{u} = \mathcal{F}_{\text{FB}}(u)$ in dieser dichten Teilmenge werden auf u geworfen; da $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ normerhaltend ist, ist auch $\mathcal{G} : \hat{u} \mapsto u$ normerhaltend (auf der dichten Teilmenge). Also kann $\mathcal{G}$ auf ganz $L^2(W \times I)$ zu einem stetigen Operator fortgesetzt werden.

Die Relation $\mathcal{G} \circ \mathcal{F}_{\text{FB}}(u) = u$ für glatte Funktionen u überträgt sich wegen der Stetigkeit beider Operatoren auf alle Funktionen $u \in L^2(\Omega)$. Daher ist $\mathcal{G}$ linksinvers zu $\mathcal{F}_{\text{FB}}$. Der linksinverse Operator zu einem invertierbaren Operator ist aber immer die Inverse, es gilt also $\mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1} = \mathcal{G}$. $\square$

Wir fassen die Ergebnisse in einem Satz zusammen.

Satz 6.5 (Inverse Floquet-Bloch Transformation). *Die Abbildung $\mathcal{F}_{\text{FB}} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(W \times I)$ aus (6.2) ist ein unitärer Isomorphismus, die Inverse ist durch die Formel (6.5) gegeben.*

6.2. Quasiperiodische Funktionen, Erweiterungen

Wir verwenden dieselben Notationen wie oben, insbesondere $I = [-\pi, \pi]$, $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$ und $W = (0, 1) \times \Sigma$ für die Einheitszelle.

Definition 6.6 (Quasiperiodische Funktionen). *Sei $\alpha \in I$ eine Zahl, wir nennen α das Quasimoment. Eine Abbildung $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ nennen wir α -quasiperiodisch (in die Richtung e_1 mit der Einheitszelle $W = (0, 1) \times \Sigma$), wenn für fast alle $x \in \Omega$ gilt:*

$$u(x + e_1) = e^{i\alpha} u(x). \quad (6.7)$$

Umgekehrt können wir für eine beliebige Funktion $u \in L^2(W)$ die α -quasiperiodische Fortsetzung von u definieren. Wir setzen für (fast) jedes $x \in W$ und jedes $\ell \in \mathbb{Z}$:

$$\tilde{u}(x + \ell e_1) := e^{i\ell\alpha} u(x). \quad (6.8)$$

Die Funktion $\tilde{u}$ ist quasiperiodisch auf Ω . Allerdings ist es so, dass diese Funktion im Allgemeinen an allen Flächen $\Gamma_k = \{x \in \Omega \mid x_1 = k\}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ Sprünge hat. Dies ist zwar später nicht das, was wir sehen wollen, aber da die Funktion ja hier nur die Regularität $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ hat, haben wir keine Spuren und können insofern gar nicht von Sprüngen sprechen.

Bemerkung 6.7 (Bilder der Floquet-Bloch Transformation). *Wir beobachten Folgendes: Wenn wir die Formel (6.2) für beliebiges $x \in \Omega$ auswerten, so erhalten wir für jedes α eine α -quasiperiodische Funktion $\hat{u}(\cdot, \alpha) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$:*

$$\begin{aligned} \hat{u}(x + e_1, \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} u(x + e_1 + \ell e_1) e^{-i\ell\alpha} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u(x + k e_1) e^{-i(k-1)\alpha} = e^{i\alpha} \hat{u}(x, \alpha). \end{aligned}$$

Insbesondere erwarten wir, wann immer von diesen Spurwerten überhaupt gesprochen werden kann, dass $u(1, \cdot) = e^{i\alpha} u(0, \cdot)$ als Funktionen auf Σ .

Bemerkung 6.8 (Vereinfachte Rücktransformation). *Sei $u \in L^2(\Omega)$ und $\hat{u} = \mathcal{F}_{\text{FB}}(u)$. Für festes $\alpha \in I$ wollen wir die Funktion $\hat{u}(\cdot, \alpha)$ als eine α -quasiperiodische Funktion auf ganz Ω betrachten; dies erreichen wir, indem wir $\hat{u}$ fortsetzen mit der Vorschrift $\hat{u}(x + k e_1, \alpha) = \hat{u}(x, \alpha) e^{ik\alpha}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in W$.*

Wenn wir diese Fortsetzung betrachten, lautet Formel (6.5) für die Inverse, für beliebiges $y = x + k e_1 \in \Omega$ mit $x \in W$,

$$u(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_I \hat{u}(y, \alpha) d\alpha. \quad (6.9)$$

Ableitungen von u . Funktionen in L^2 haben keine Spuren, daher muss die α -Quasiperiodizität wie oben definiert werden. Wenn wir allerdings $u \in H^1(W)$ betrachten, so können wir die Randwerte im Sinne der Spuren auswerten; mit $x = (x_1, \tilde{x})$ schreiben wir für die Spur am rechten Rand $u(1, \cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ und für die Spur am linken Rand $u(0, \cdot) : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$. Damit können wir α -quasiperiodische Funktionen definieren als solche $v \in H^1(W)$ mit

$$v(1, \cdot) = e^{i\alpha} v(0, \cdot). \quad (6.10)$$

Wir definieren den Raum $H_\alpha^1(W)$ als den Unterraum von $H^1(W)$, der aus α -quasiperiodischen Funktionen besteht.

Wir wollen nun untersuchen, ob wir die Floquet-Bloch Transformation auch auf anderen Funktionenräumen betrachten können. Eine direkte Konsequenz der Definition (6.2) ist, dass die Transformation Ableitungen respektiert: Für jede Richtung $j \leq n$ und $u \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\mathcal{F}_{\text{FB}}(\partial_j u) = \partial_j(\mathcal{F}_{\text{FB}} u).$$

Dies impliziert, dass wir $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ auch auffassen können als

$$\mathcal{F}_{\text{FB}} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(I, H^1(W)) = \{h \in L^2(W \times I) \mid \nabla_x h \in L^2(W \times I)\}. \quad (6.11)$$

Wie wir bereits gesehen haben, ist die Definition von $\hat{u}$ in (6.2) tatsächlich so, dass für jedes $\alpha \in I$ die Formel der Floquet-Bloch Transformation eine α -quasiperiodische Funktion liefert. Für stetige Funktionen u mit kompaktem Träger können wir dies in der Form von Randbedingungen wie in (6.10) schreiben. Wegen der Stetigkeit von $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ im Sinne von (6.11) überträgt sich diese Formel auf $u \in H^1(\Omega)$, das Bild $\hat{u}(\cdot, \alpha)$ ist eine α -quasiperiodische Funktion für fast jedes $\alpha \in I$.

Daher ist $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ eine Abbildung von $H^1(\Omega)$ in den Raum

$$L^2(I, H_\alpha^1(W)) := \left\{ u \in L^2(I, H^1(W)) \mid \begin{array}{l} u(\cdot, \alpha) \text{ ist } \alpha\text{-quasiperiodisch} \\ \text{für fast alle } \alpha \end{array} \right\}.$$

Zur Notation: Der Zielraum $H_\alpha^1(W)$ hängt vom Parameter $\alpha \in I$ ab, daher ist $L^2(I, H_\alpha^1(W))$ kein klassischer Bochner-Raum. Der Raum ist aber ein abgeschlossener Unterraum des Bochner-Raumes $L^2(I, H^1(W))$; wir versehen ihn mit der Norm und dem Skalarprodukt dieses umgebenden Raumes.

Der Operator $\mathcal{F}_{\text{FB}} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(I, H_\alpha^1(W))$ kann ebenso wie sein L^2 -Gegenstück invertiert werden. Die Inverse ist der Operator $\mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1} : L^2(I, H_\alpha^1(W)) \rightarrow H^1(\Omega)$, der wieder durch die Formel (6.5) gegeben ist. Wir bemerken dazu: Für $\hat{u} \in L^2(I, H_\alpha^1(W))$ ist, für fast jedes $\alpha \in I$, die Funktion $u(\cdot, \alpha)$ eine α -quasiperiodische Funktion auf W , wir identifizieren diese Funktion mit einer α -quasiperiodischen Funktion auf Ω , die lokal von der Klasse H^1 ist (keine Sprünge auf den Flächen $\{x_1 \in \mathbb{Z}\}$). Die vereinfachte Rücktransformation aus (6.9) zeigt, dass dann auch u lokal von der Klasse H^1 ist.

Übungen

Übung 6.1 (Floquet-Bloch Formel für L^2 -Funktionen). *Zeigen Sie zunächst mit einem Approximationsargument, dass die Formel (6.2) der Floquet-Bloch Transformation für alle $L^2(\Omega)$ -Funktionen mit beschränktem Träger gültig ist.*

Zeigen Sie damit, dass Formel (6.2) für alle $u \in L^2(\Omega)$ gültig ist, wenn man auf der rechten Seite die Summe als Konvergenz der Partialsummen in $L^2(W)$ interpretiert.

Übung 6.2 (Floquet-Bloch Transformation für konkrete Funktionen). *Wir betrachten immer die Floquet-Bloch Transformation $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ des Skriptes, insbesondere also die Transformation nur in der Variablen x_1 . Berechnen Sie $\mathcal{F}_{\text{FB}}(u)$ für:*

- (a) $u : \mathbb{R} \times (0, h) \rightarrow \mathbb{C}$, $u(x) = \psi(x) \mathbf{1}_{(0,1)}(x_1)$, wobei $\mathbf{1}_A$ die charakteristische Funktion der Menge A ist und $\psi \in L^2(W)$ eine Funktion auf $W = (0, 1) \times (0, h)$.

(b) $u : \mathbb{R} \times (0, h) \rightarrow \mathbb{C}$, $u(x + k e_1) := \psi(x) e^{ik\omega} \mathbf{1}_{(-L, L)}(k)$ für $x \in W$ und $k \in \mathbb{Z}$,
wobei $\omega \in \mathbb{R}$ eine Frequenz ist, $L \in \mathbb{N}$ und $\psi \in L^2(W)$ für $W = (0, 1) \times (0, h)$.
Wie ist das Verhalten für großes L ?

(c) $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) := \sin(\omega x) \mathbf{1}_{(-L, L)}(x)$ für ein $\omega \in \mathbb{R}$ und ein $L \in \mathbb{N}$.

Übung 6.3 (Floquet-Bloch Transformation eines Produktes). *Im üblichen Setting sei $u \in L^2(\Omega)$ und $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine 1-periodische beschränkte Funktion in x_1 . Zeigen Sie, dass dann gilt*

$$\mathcal{F}_{\text{FB}}(bu) = b \mathcal{F}_{\text{FB}}(u), \text{ also } \mathcal{F}_{\text{FB}}(bu)(x, \alpha) = b(x) \hat{u}(x, \alpha)$$

für fast alle $(x, \alpha) \in W \times I$.

7. Periodische Wellenleiter

Unser Ziel ist die Untersuchung von elliptischen Operatoren in einem Wellenleiter $\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma$, wobei wie zuvor $\Sigma \subset \mathbb{R}^{d-1}$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet ist. Gegeben seien Koeffizienten $a, b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die beide in Richtung $x_1 \in \mathbb{R}$ periodisch sind, also $a(x + e_1) = a(x)$ und $b(x + e_1) = b(x)$ für fast alle $x \in \Omega$. Weiterhin seien beide Koeffizienten beschränkt und positiv, für ein $\gamma > 0$ gelte $a(x), b(x) \geq \gamma$ und $a(x), b(x) \leq 1/\gamma$ für alle $x \in \Omega$.

Wir interessieren uns für das Helmholtz-Problem

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) - \lambda b u = f. \quad (7.1)$$

Wir fordern ab jetzt immer die Randbedingung $u = 0$ auf $\mathbb{R} \times \partial\Sigma$; es ist aber kein Problem, hier andere Bedingungen vorzuschreiben. Für $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sind Lösungen Funktionen $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$. Der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ ist der Spektralparameter.

Wir verstehen (7.1) immer als lokale Gleichung in der schwachen Form, also als: Gesucht ist $u : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, auf jeder beschränkten Menge von der Klasse H^1 mit Nullrandwerten auf $\mathbb{R} \times \partial\Sigma$ im Spursinn, so dass für jede Funktion $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ mit beschränktem Träger gilt:

$$\int_{\Omega} \{a \nabla u \cdot \nabla \varphi - \lambda b u \varphi\} = \int_{\Omega} f \varphi. \quad (7.2)$$

7.1. Quasiperiodische Probleme

Wir wollen anstelle des Problems (7.1) auf dem unbeschränkten Gebiet lieber Probleme auf dem beschränkten Gebiet W betrachten. Die rechte Seite $\tilde{f}_{\alpha}$ wird in unserer Anwendung die Form $\tilde{f}_{\alpha} = \hat{f}(\cdot, \alpha)$ haben.

Definition 7.1 (Das quasiperiodische Problem). *Für festes $\alpha \in I$ und gegebene rechte Seite $\tilde{f}_{\alpha} \in L^2(W)$ suchen wir eine α -quasiperiodische Lösung $\tilde{u}_{\alpha}$ der elliptischen Gleichung aus (7.1) auf dem Segment W , wobei wir Dirichlet-Bedingungen auf $(0, 1) \times \partial\Sigma$ stellen. Genauer formulieren wir schwach: Gesucht ist*

$$\tilde{u}_{\alpha} \in X := \{\tilde{u}_{\alpha} \in H_{\alpha}^1(W) \mid \tilde{u}_{\alpha} = 0 \text{ auf } (0, 1) \times \partial\Sigma\},$$

so dass für alle $\varphi \in X$ gilt:

$$\int_W \{a(x) \nabla \tilde{u}_{\alpha}(x) \cdot \nabla \bar{\varphi}(x) - \lambda b(x) \tilde{u}_{\alpha}(x) \bar{\varphi}(x)\} dx = \int_W \tilde{f}_{\alpha}(x) \bar{\varphi}(x) dx. \quad (7.3)$$

Bemerkung 7.2 (Fortsetzung von Lösungen). *Es sei $\tilde{u}_{\alpha}$ eine Lösung des α -quasiperiodischen Problems zu $\tilde{f}_{\alpha}$. Wir identifizieren die beiden Funktionen mit ihren α -quasiperiodischen Fortsetzungen. Dann gilt: Die Fortsetzungen lösen im Distributionssinn die Gleichung (7.1) auf ganz Ω , insbesondere über die Grenzflächen mit ganzzahligem x_1 hinweg.*

Beweis. Wir betrachten eine glatte Testfunktion $\psi : (1/2, 3/2) \times \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$, erlauben also insbesondere, dass die Testfunktion an einer Grenzfläche nicht verschwindet. Wir wollen für diese nachweisen, dass

$$\int_{\Omega} \{a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \psi - \lambda b \tilde{u}_{\alpha} \psi\} = \int_{\Omega} \tilde{f}_{\alpha} \psi. \quad (7.4)$$

Wir führen eine neue Funktion ein. Wir setzen $\tilde{\psi} : W \rightarrow \mathbb{C}$, $\tilde{\psi}(x) := \psi(x)$ für $x_1 > 1/2$ und $\tilde{\psi}(x) := \psi(x + e_1)e^{-i\alpha}$ für $x_1 < 1/2$. Dann ist $\tilde{\psi}$ auf W eine α -quasiperiodische Funktion. Wir betrachten nun den ersten Term in der Gleichung:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \psi &= \int_W a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \psi + \int_{e_1+W} a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \psi \\ &= \int_W a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \psi + \int_W e^{i\alpha} a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \psi(\cdot + e_1) \\ &= \int_{W \cap \{x_1 > 1/2\}} a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \tilde{\psi} + \int_{W \cap \{x_1 < 1/2\}} a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \tilde{\psi} \\ &= \int_W a \nabla \tilde{u}_{\alpha} \cdot \nabla \tilde{\psi}. \end{aligned}$$

Ebenso werden die anderen Integrale übersetzt. Gleichung (7.4) folgt dann aus Gleichung (7.3). $\square$

Lemma 7.3 (Äquivalente Gleichung mit Floquet-Bloch I). *Sei $\hat{u} \in L^2(I, H_{\alpha}^1(W))$ so, dass $\tilde{u}_{\alpha} := \hat{u}(\cdot, \alpha)$ eine schwache Lösung des quasiperiodischen Problems ist für fast alle $\alpha \in I$. Dann ist die Funktion $u := \mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1}(\hat{u}) = (2\pi)^{-1/2} \int_I \hat{u}(\cdot, \alpha) d\alpha$ ein Element von $H_0^1(\Omega)$ und eine schwache Lösung von (7.1).*

Beweis. Wir haben bereits im letzten Abschnitt gesehen, dass die Rücktransformierte $u = \mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1}(\hat{u})$ eine Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ ist. Wir betrachten nun eine beliebige Testfunktion $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, für diese wollen wir (7.2) nachweisen. Dafür setzen wir die Testfunktion $\hat{\varphi}(\cdot, \alpha)$ in (7.3) ein und integrieren über $\alpha \in I$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_I \int_W \left\{ a(x) \nabla \hat{u}(x, \alpha) \cdot \nabla \overline{\hat{\varphi}(x, \alpha)} - \lambda b(x) \hat{u}(x, \alpha) \overline{\hat{\varphi}(x, \alpha)} \right\} dx d\alpha \\ = \int_I \int_W \hat{f}(x, \alpha) \overline{\hat{\varphi}(x, \alpha)} dx d\alpha. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Es gelten: $\mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1}(\hat{u}) = u$, für das Produkt $\mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1}(a \hat{u}) = a u$, und ebenso für das Produkt mit einem Gradienten $\mathcal{F}_{\text{FB}}^{-1}(a \nabla \hat{u}) = a \nabla u$, siehe Übung 6.3. Wir lesen nun die Terme in (7.5) als Skalarprodukte von Funktionen in $L^2(W \times I)$. Die Unitarität der Floquet-Bloch Transformation erlaubt, diese als $L^2(\Omega)$ -Skalarprodukte der rücktransformierten Funktionen zu schreiben. Damit liefert (7.5) tatsächlich (7.2), die schwache Form der Ausgangsgleichung (7.1) für u . $\square$

Lemma 7.4 (Äquivalente Gleichung mit Floquet-Bloch II). *Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (7.1). Dann ist die Floquet-Bloch-Transformierte $\hat{u} := \mathcal{F}_{\text{FB}}(u)$ ein Element von $L^2(I, H_{\alpha}^1(W))$, insbesondere gilt $\hat{u}(\cdot, \alpha) \in H_{\alpha}^1(W)$ für fast alle $\alpha \in I$. Die Funktionen $\hat{u}(\cdot, \alpha)$ sind schwache Lösungen von (7.3) für fast alle $\alpha \in I$.*

Beweis. Sei $u \in H_0^1(\Omega)$ eine schwache Lösung von (7.1) und $\hat{u} := \mathcal{F}_{\text{FB}}(u)$, die Relation $\hat{u} \in L^2(I, H_\alpha^1(W))$ haben wir bereits gezeigt. Wir wählen eine beliebige Funktion $\psi \in H^1(W)$, die in x_1 periodisch ist. Dann ist die Funktion $\psi(x)e^{i\alpha x_1}$ ein Element von $H_\alpha^1(W)$. Weiterhin wählen wir eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$.

Nun konstruieren wir eine geeignete Testfunktion für u . Wir definieren $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ als die inverse Floquet-Bloch-Transformierte der Funktion $\hat{\varphi}(x, \alpha) := \psi(x)e^{i\alpha(m+x_1)}$. Die schwache Form von (7.1) liefert

$$\int_{\Omega} \left\{ a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla \overline{\varphi(x)} - \lambda b(x) u(x) \overline{\varphi(x)} \right\} dx = \int_{\Omega} f(x) \overline{\varphi(x)} dx. \quad (7.6)$$

Aufgrund der Unitarität der Floquet-Bloch Transformation können wir Integrale über Ω durch Integrale über $W \times I$ ersetzen, wenn wir Funktionen durch ihre Floquet-Bloch-Transformierten ersetzen. Die periodischen Funktionen a und b als Faktoren bleiben bei der Transformation unverändert. Wir erhalten genau die Relation (7.5). Wir setzen gemäß unserer Konstruktion $\hat{\varphi}(x, \alpha) = \psi(x)e^{i\alpha(m+x_1)}$ und können die Relation in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{aligned} & \int_I \left[\int_W \left\{ a(x) \nabla \hat{u}(x, \alpha) \cdot \nabla \overline{\psi(x)e^{i\alpha x_1}} - \lambda b(x) \hat{u}(x, \alpha) \overline{\psi(x)e^{i\alpha x_1}} \right\} dx \right] e^{-im\alpha} d\alpha \\ &= \int_I \left[\int_W \hat{f}(x, \alpha) \overline{\psi(x)e^{i\alpha x_1}} dx \right] e^{-im\alpha} d\alpha. \end{aligned}$$

In dieser Formel ist m beliebig. Es stimmen also alle Fourier-Koeffizienten der beiden in eckigen Klammern stehenden Terme überein. Daraus folgt, dass die Ausdrücke in den eckigen Klammern für fast alle $\alpha \in I$ übereinstimmen. Dies ist gerade (7.3), denn $\psi(x)e^{i\alpha x_1}$ ist eine beliebige α -quasiperiodische Testfunktion. $\square$

Wir merken uns:

Das Problem auf Ω mit $u \in H^1(\Omega)$ zu lösen ist damit äquivalent, für (fast) alle $\alpha \in I$ ein quasiperiodisches Problem auf W zu lösen.

Das Spektrum des quasiperiodischen Problems

Lemma 7.5 (Eigenschaften des quasiperiodischen Problems). *Im Folgenden seien nicht nur das Gebiet W , die Koeffizienten a und b , sondern auch α fixiert. Das quasiperiodische Problem hat ein diskretes Spektrum aus Eigenwerten in folgendem Sinn: Es gibt eine monoton wachsende Folge $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von nichtnegativen reellen Zahlen mit $\lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, so dass mit $\Lambda := \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ gilt:*

1. Für jedes $\lambda \notin \Lambda$: Das quasiperiodische Problem besitzt für jede rechte Seite $\tilde{f}_\alpha \in L^2(W)$ eine eindeutige Lösung $\tilde{u}_\alpha$ und es gilt eine Abschätzung $\|\tilde{u}_\alpha\|_{L^2(W)} \leq C \|\tilde{f}_\alpha\|_{L^2(W)}$ mit $C = C(\lambda, \alpha)$ unabhängig von der rechten Seite.
2. Für jedes $\lambda \in \Lambda$ besitzt das quasiperiodische homogene Problem (rechte Seite $\tilde{f}_\alpha = 0$) eine nichttriviale Lösung. Der Lösungsraum des homogenen Problems ist endlichdimensional. Es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenfunktionen.

Beweis. Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Operatoren. Die Umformulierung mit Operatoren wurde in Abschnitt 4.1 besprochen. Der kompakte Operator wird mit Lax-Milgram auf dem Hilbertraum $X \subset H_\alpha^1(W)$ definiert. Man betrachtet dafür die Beschreibung (7.3). $\square$

Lemma 7.6 (Resolventenabschätzung). *Über die Konstante $C = C(\lambda, \alpha)$ aus Lemma 7.5 kann man eine verbesserte Aussage treffen. Mit den Eigenwerten $\lambda_n = \lambda_n^\alpha$ definieren wir für $\lambda \in \mathbb{C}$ den Abstand zum Spektrum als*

$$\rho := \min\{|\lambda - \lambda_n| \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann existiert ein $C_0 = C_0(a, b)$, unabhängig von α und λ , so dass

$$C(\lambda, \alpha) \leq \frac{C_0}{\rho}. \quad (7.7)$$

Beweis. Die Abschätzung folgt aus dem Spektralsatz: Es seien $(\psi_n)_n$ die (orthonormalen) Eigenfunktionen zu den Eigenwerten $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des Operators $-\nabla \cdot (a \nabla)$ mit dem Massenoperator b . Dabei wiederholen wir den Eigenwert λ_n entsprechend seiner Vielfachheit. Wir können die Lösung und die rechte Seite (mit einem beschränkten Vorfaktor) in dieser Basis entwickeln:

$$u(x) = \sum_n c_n \psi_n(x) \quad \text{und} \quad \frac{1}{b(x)} f(x) = \sum_n d_n \psi_n(x).$$

Die Gleichung ist genau dann erfüllt, wenn $(\lambda_n - \lambda)c_n = d_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Eigenfunktionen orthonormal sind, gilt

$$\|u\|_{L^2(W)}^2 = \sum_n |c_n|^2 = \sum_n \left| \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda} \right|^2 \leq \frac{1}{\rho^2} \sum_n |d_n|^2 = \frac{C_0^2}{\rho^2} \|f\|_{L^2(W)}^2.$$

Dies liefert (7.7), die Resolventenabschätzung für Lösungen. $\square$

Die nächsten beiden Lemmata benutzen die Charakterisierung von Eigenwerten mit dem Minimax-Prinzip von Courant-Fischer. Wir betrachten zwei Hilberträume $X \subset X_0$ (wir denken an $X = H^1$ und $X_0 = L^2$) und den Operator, der durch eine positiv definite Sesquilinearform $\Phi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben ist. Dann ist der k -te Eigenwert (bezüglich des X_0 -Massenoperators) gegeben durch

$$\lambda_k = \sup_{\substack{F \subset X \\ \dim F = k}} \inf_{0 \neq u \perp F} \frac{\Phi(u, u)}{\|u\|_{X_0}^2}. \quad (7.8)$$

Wir verzichten hier auf den Beweis, denn die Charakterisierung (7.8) drückt im Grunde genau das aus, was wir im Beweis des Spektralsatzes 2.8 durchgeführt haben.

Lemma 7.7 (Lipschitz-stetige Abhängigkeit der Eigenwerte). *Sei $k \in \mathbb{N}$. Für den k -ten Eigenwert der quasiperiodischen Probleme ist die Abbildung*

$$I \ni \alpha \mapsto \lambda_k^\alpha \in \mathbb{R} \quad (7.9)$$

Lipschitz-stetig.

Die Helmholtzgleichung

Beweis. Wir formulieren die α -quasiperiodischen Probleme mit dem α -unabhängigen Raum $X := H_{\text{per}}^1(W) \cap \{u | u = 0 \text{ auf } (0, 1) \times \partial\Sigma\}$ und der Familie von Sesquilinearformen $\Phi_\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Phi_\alpha(u, \varphi) := \int_W a(x)(\nabla + i\alpha e_1)u \cdot \overline{(\nabla + i\alpha e_1)\varphi}.$$

Die Sesquilinearformen hängen Lipschitz-stetig von α ab: Für eine Konstante C , die unabhängig von α und β ist, gilt

$$|\Phi_\alpha(u, \varphi) - \Phi_\beta(u, \varphi)| \leq C |\alpha - \beta| \|u\|_X \|\varphi\|_X.$$

In diesem Beweis nutzen wir die Dirichlet-Randbedingungen aus; diese implizieren, dass die Formen Φ_α (gleichmäßig) koerziv auf X sind. Für andere Randbedingungen muss man die Formen durch Addition eines Integrals über $bu\bar{\varphi}$ koerziv machen.

Anwendung des Min-Max-Prinzips. Das Min-Max-Prinzip (7.8) charakterisiert Eigenwerte durch

$$\lambda_k^\alpha = \sup_{\substack{F \subset X \\ \dim F = k}} \inf_{0 \neq u \in F} \frac{\Phi_\alpha(u, u)}{\|u\|_{L^2(W)}^2}.$$

Dabei statuen wir wieder $L^2(W)$ mit dem Skalarprodukt mit dem Faktor b aus. Wir bemerken, dass das Min-Max-Prinzip die Beschränktheit der Eigenwerte impliziert, $\lambda_k^\alpha \leq C_k$ für ein $C_k > 0$, unabhängig von α .

Wir betrachten nun zwei Punkte $\alpha, \beta \in I$. Wir wählen den Raum F so, dass λ_k^α darin realisiert wird. Ab jetzt ist der endlichdimensionale Unterraum F fixiert.

Wir verwenden nun nacheinander: (i) Die Formel für λ_k^β mit F als Vergleichsraum. (ii) Die Lösbarkeit des genannten Infimum-Problems mit einer Lösung $v \in X$ und $\|v\|_{L^2(W)} = 1$ (Existenz wie im Spektralsatz). Wir bemerken, dass die Lösung $\|v\|_X^2 \leq C\Phi_\beta(v, v) \leq C\lambda_k^\beta \leq C_k$ erfüllt. (iii) Die Abschätzung für die Differenz von Formen. (iv) Die X -Abschätzung für den Minimierer v . (v) Die Charakterisierung von λ_k^α mit dem Raum F :

$$\begin{aligned} \lambda_k^\beta &\geq \inf_{0 \neq u \in F} \frac{\Phi_\beta(u, u)}{\|u\|_{L^2(W)}^2} = \frac{\Phi_\beta(v, v)}{\|v\|_{L^2(W)}^2} \\ &\geq \frac{\Phi_\alpha(v, v)}{\|v\|_{L^2(W)}^2} - C |\alpha - \beta| \frac{\|v\|_X^2}{\|v\|_{L^2(W)}^2} \\ &\geq \inf_{0 \neq u \in F} \left(\frac{\Phi_\alpha(u, u)}{\|u\|_{L^2(W)}^2} \right) - C C_k |\alpha - \beta| \\ &= \lambda_k^\alpha - C C_k |\alpha - \beta|. \end{aligned}$$

Da α und β beliebig waren und die Konstanten unabhängig von deren Wahl sind, liefert dies die behauptete Lipschitz-Abhängigkeit. $\square$

Für jedes feste $\alpha \in I$ gilt $\lambda_n^\alpha \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, dies folgt aus dem Spektralsatz. Wir benötigen allerdings später eine quantitative Version dieser Aussage, bei der die Divergenz unabhängig von α ist. Das nachfolgende Lemma liefert dies.

Lemma 7.8 (Anzahl von Eigenwerten in einem festen Intervall). *Wir betrachten das quasiperiodische Problem aus Definition 7.1. Dann gilt*

$$\forall \lambda_* > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall \alpha \in I : \quad \lambda_N^\alpha \geq \lambda_* . \quad (7.10)$$

Es gibt also für jedes α höchstens N Eigenwerte, die kleiner sind als λ_ .*

Beweis. Schritt 1: Kompaktheit. Wir verwenden die Kompaktheit der Einbettung $H_\alpha^1(W) \subset L^2(W)$. Zunächst wählen wir endlichdimensionale Unterräume $F_j \subset H_\alpha^1(W)$, deren Vereinigung dicht ist. Wir fordern $\dim(F_j) = j$ und $F_j \subset F_{j+1}$. Die Kompaktheit impliziert, dass gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : \quad u \perp F_N \Rightarrow \|u\|_{L^2(W)} \leq \varepsilon \|u\|_{H^1(W)} \quad \forall u \in H_\alpha^1(W) . \quad (7.11)$$

Wir betrachten in diesem Beweis den Raum $L^2(W)$ mit der Norm, die durch den Koeffizienten b induziert wird.

Behauptung (7.11) folgt mit einem einfachen Widerspruchsargument. Wir nehmen an, dass es zu festem $\varepsilon > 0$ Funktionen $u_N \perp F_N$ gibt, so dass $1 = \|u_N\|_{L^2(W)} \geq \varepsilon \|u_N\|_{H^1(W)}$. Die Kompaktheit erlaubt es, eine Teilfolge zu finden und einen Limes u mit $u_N \rightarrow u$ in $L^2(W)$. Für alle $\varphi \in F_j$ gilt $\langle u, \varphi \rangle = \lim_N \langle u_N, \varphi \rangle = 0$ und daher, wegen Dichtheit, $u = 0$. Dies steht im Widerspruch zur starken Konvergenz und der Normiertheit.

Schritt 2: Koerzivität. Wir müssen nun eine Koerzivitätseigenschaft der Sesquilinearform ausnutzen. Die Form

$$\Psi_\alpha(u, \varphi) := \int_W a(x) \nabla u(x) \cdot \nabla \varphi(x) dx \quad (7.12)$$

aus (7.3) erfüllt mit Konstanten $c, C > 0$ (unabhängig von α) die Abschätzung¹

$$\Psi_\alpha(u, u) \geq c \|u\|_{H^1(W)}^2 - C \|u\|_{L^2(W)}^2 . \quad (7.13)$$

Wir wählen nun $\varepsilon > 0$ so klein, dass sowohl $c/(2\varepsilon^2) \geq \lambda_*$ als auch $\varepsilon^2 C \leq c/2$ erfüllt ist. Dann können wir für jedes $u \perp F_N$ rechnen:

$$\Psi_\alpha(u, u) \geq c \|u\|_{H^1(W)}^2 - C \|u\|_{L^2(W)}^2 \geq (c - \varepsilon^2 C) \|u\|_{H^1(W)}^2 \geq \frac{c}{2} \|u\|_{H^1(W)}^2 .$$

Schritt 3: Minimax-Prinzip. Die Courant-Fischer Charakterisierung (7.8) von Eigenwerten erlaubt nun den Beweisschluss. Für den Unterraum F_N gilt

$$\inf_{u \perp F_N} \frac{\Psi_\alpha(u, u)}{\|u\|_{L^2(W)}^2} \geq \inf_{u \perp F_N} \frac{\Psi_\alpha(u, u)}{\varepsilon^2 \|u\|_{H^1(W)}^2} \geq \frac{c}{2\varepsilon^2} \geq \lambda_* .$$

Da der Eigenwert λ_N^α charakterisiert werden kann als das Supremum über alle N -dimensionalen Unterräume F , ist λ_N^α größer als der obige Ausdruck, also größer (oder gleich) λ_* . Dies war die Behauptung. $\square$

¹Bei homogenen Dirichlet-Randbedingungen erhält man diese Abschätzung mit Poincaré sogar mit $C = 0$. Wir wollen aber hier zeigen, dass der Beweis nur die schwächere Abschätzung benötigt.

7.2. Spektralaussagen für den Wellenleiter

Wir verzichten hier darauf, das Problem mit Operatoren zu beschreiben. Stattdessen verwenden wir die folgende Definition für das Problem auf dem unbeschränkten Gebiet Ω .

Definition 7.9 (Spektrum des Problems). *Wir sagen, dass $\lambda \in \mathbb{C}$ in der Resolvente liegt, wenn für jedes $f \in L^2(\Omega)$ die Gleichung (7.1) eine Lösung $u \in L^2(\Omega)$ hat, die auf beschränkten Teilmengen von der Klasse H^1 ist; zusätzlich gelte mit einer Konstanten $C = C(\lambda)$ eine Abschätzung $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$.*

Wir sagen, dass $\lambda \in \mathbb{C}$ im Spektrum ist, wenn λ nicht in der Resolvente liegt.

Wir bemerken folgende Tatsache aus der Theorie partieller Differentialgleichungen: Als schwache Lösung einer elliptischen Gleichung ist u immer lokal auch von der Klasse H^1 (Caccioppoli-Ungleichung). Eine Abschätzung $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ impliziert daher immer auch die scheinbar stärkere Abschätzung $\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C'\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Bemerkung 7.10 (Spektrum ist reell und positiv). *Das Spektrum ist eine Teilmenge von $[0, \infty) \subset \mathbb{C}$. Tatsächlich kann für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$ das Problem (7.1) mit dem Satz von Lax-Milgram gelöst werden.*

Lemma 7.11 (Konstante Koeffizienten). *Für konstante Koeffizientenfunktionen $a(\cdot) = a_0$ und $b(\cdot) = b_0$ ist das Spektrum das gesamte Intervall $[0, \infty)$.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion $u(x) = e^{i\omega x_1}$. Wir wenden den elliptischen Operator an und finden

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) - \lambda b u = -a_0 \nabla \cdot (i\omega u e_1) - \lambda b_0 u = a_0 \omega^2 u - \lambda b_0 u = 0$$

für $\omega = \sqrt{\lambda b_0 / a_0}$. Dies zeigt, dass es für jedes $\lambda > 0$ eine nichttriviale Lösung der Gleichung für $f = 0$ gibt.

Der Beweis wäre damit abgeschlossen, würde die gefundene Lösung u im Funktionenraum $L^2(\Omega)$ liegen. Dies ist nicht der Fall. Man spricht daher auch von einer verallgemeinerten Eigenfunktion.

Trotzdem kann mit obiger Funktion u der Beweis leicht geführt werden. Für jede Zahl $R \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Abschnidefunktion $\vartheta_R : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $\vartheta_R(x) = 1$ für $|x| < R$ und $\vartheta_R(x) = 0$ für $|x| > R + 1$, in den beiden Intervallen $(-R - 1, -R)$ und $(R, R + 1)$ wählen wir eine Interpolation, so dass $\vartheta_R \in C^2(\mathbb{R})$. Wir wählen für jedes R dieselbe Interpolation in den Übergangsintervallen.

Wir betrachten nun für die verallgemeinerte Eigenfunktion u von oben die neuen Funktionen $v_R := u \vartheta_R : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, also $v_R(x) = u(x) \vartheta_R(x_1)$. Die quadrierten Normen $\|v_R\|_{L^2(\Omega)}^2$ wachsen wie R für $R \rightarrow \infty$. Wenn wir aber den Operator auf v_R anwenden, so erhalten wir

$$f_R := -\nabla \cdot (a \nabla v_R) - \lambda b v_R = -2a_0 \nabla \vartheta_R \cdot \nabla u - a_0 (\Delta \vartheta_R) u.$$

Da die Funktionen $\nabla \vartheta_R$ und $\Delta \vartheta_R$ nur auf zwei Einheitsintervallen nicht verschwinden, ist die $L^2(\Omega)$ -Norm der rechten Seiten f_R beschränkt. Es kann also keine Abschätzung für Lösungen geben. $\square$

Im Beweis von Lemma 7.11 haben wir bereits ein zentrales Werkzeug benutzt: Die Existenz von verallgemeinerten Eigenfunktionen impliziert meist, dass λ ein Spektralwert ist.

Satz 7.12 (Charakterisierung des Spektrums). *Wir betrachten das Problem (7.1), Gebiet Ω , Koeffizienten a und b und Randbedingungen seien wie dort beschrieben. Dann gilt die folgende Charakterisierung des Spektrums: Ein Wert $\lambda \in [0, \infty)$ ist genau dann im Spektrum des Problems, wenn für ein $\alpha \in I$ gilt:*

$$\lambda \text{ ist ein Eigenwert des } \alpha\text{-quasiperiodischen Problems auf } W. \quad (7.14)$$

Beweis. Schritt 1: Eigenwerte eines quasiperiodischen Problems sind im Spektrum. Dies ist der einfachere Teil der Aussage. Wenn es zu λ eine α -quasiperiodische Lösung des Problems auf W gibt, so liefert diese eine α -quasiperiodische Funktion auf Ω , die Lösung der Gleichung ist. Diese Funktion ist nicht in $L^2(\Omega)$, es handelt sich also um eine verallgemeinerte Eigenfunktion.

Indem wir abgeschnittene Versionen dieser Funktion wie im Beweis von Lemma 7.11 betrachten, erhalten wir, dass es keine Abschätzungen für Lösungen geben kann. Daher muss λ ein Spektralwert des Problems sein.

Schritt 2: Alle Spektralwerte sind Eigenwerte eines quasiperiodischen Problems. Wir zeigen die Kontraposition, nehmen also an, dass λ für kein α ein Eigenwert des α -quasiperiodischen Problems ist. Wir wollen zeigen, dass λ auch kein Spektralwert des Problems ist. Dazu müssen wir ein beliebiges $f \in L^2(\Omega)$ betrachten. Wenn wir die Gleichung mit $u \in H^1(\Omega)$ lösen können, inklusive Abschätzungen, so haben wir die Aussage bewiesen.

Für diesen Teil des Beweises benötigen wir die Floquet-Bloch Transformation. Auf die Funktion $f \in L^2(\Omega)$ wenden wir die Floquet-Bloch Transformation an und erhalten die Funktion $\hat{f} = \hat{f}(x, \alpha)$ von der Klasse $\hat{f} \in L^2(W \times I)$. Für jedes α betrachten wir nun das α -quasiperiodische Problem mit der rechten Seite $\hat{f}(\cdot, \alpha)$ und der Lösung $\hat{u}(\cdot, \alpha)$. Die Floquet-Bloch Rücktransformation liefert $u \in L^2(\Omega)$. Damit ist der Beweis abgeschlossen, wenn wir zeigen können:

$$\begin{aligned} &\text{Die Lösungsoperatoren } \hat{f}(\cdot, \alpha) \mapsto \hat{u}(\cdot, \alpha) \text{ sind} \\ &\text{beschränkt, unabhängig vom Parameter } \alpha \in I. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Tatsächlich folgt aus (7.15) sowohl $\hat{u} \in L^2(W \times I)$ als auch die zugehörige Abschätzung $\|\hat{u}\|_{L^2(W \times I)} \leq C\|\hat{f}\|_{L^2(W \times I)} = C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. Wegen der Isometrie-Eigenschaft von $\mathcal{F}_{\text{FB}}$ also auch $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

Die Funktion u ist Lösung der Gleichung (7.1) nach Lemma 7.3. Damit ist die Lösbarkeit und die Abschätzung gezeigt; λ ist kein Spektralwert.

Schritt 3: Nachweis von (7.15). Wir verwenden die Resolventenabschätzung (7.7) aus Lemma 7.6. Die Eigenwerte $\lambda_n(\alpha)$ hängen nach Lemma 7.7 stetig von α ab. Das Intervall $I = [-\pi, \pi]$ ist kompakt, daher existiert für jedes n ein Abstand $\delta = \delta(n) > 0$, so dass

$$|\lambda - \lambda_n(\alpha)| \geq \delta \quad \text{für alle } \alpha \in I.$$

Aufgrund von Lemma 7.8 müssen wir nur endlich viele Funktionen $\alpha \mapsto \lambda_n(\alpha)$ betrachten. Wir erhalten daher (7.15). $\square$

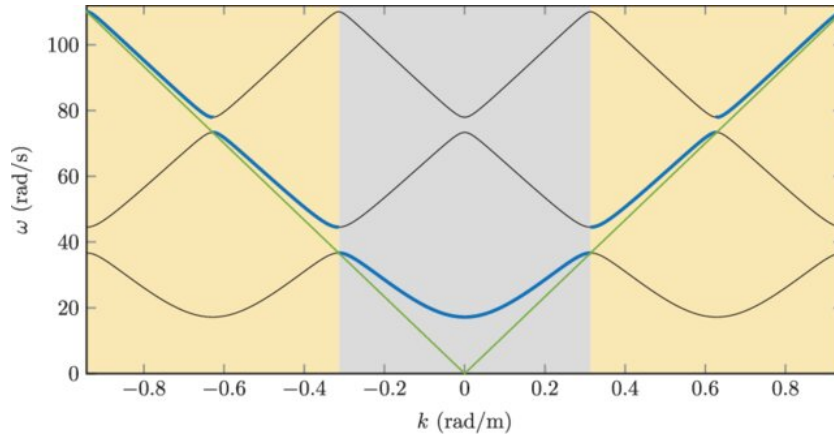


Abbildung 7.1.: Ein typisches Bild von Dispersionskurven, hier aus [4]. Der Parameter k ist unser α (bis auf einen Faktor von etwa 10, weil in dieser Anwendung die Periodizität nicht 1 ist). In unserer Theorie betrachten wir nur den mittleren Bereich, in der Abbildung ist dieser Bereich nach links und rechts fortgesetzt. Nach oben wird die Frequenz aufgetragen, also die Funktionen $\alpha \mapsto \omega_\alpha = \sqrt{\lambda_n^\alpha}$ für die ersten drei Eigenwerte, $n \in \{1, 2, 3\}$. Für das periodische Problem sehen wir, dass der Bereich von 0 bis etwa 20 nicht im Spektrum liegt, dann eine Spektrallücke etwa bei 40, eine weitere Spektrallücke unterhalb von 80. Die Diagonalen kann man interpretieren als: Für großes k haben Eigenfunktionen zu tun mit e^{ickx} , daher Eigenwerte mit $\lambda \sim c^2 k^2$, und Frequenzen mit $\omega \sim c|k|$.

Übungen

Übung 7.1 (Ein elliptisches Problem mit periodischer Randbedingung). *Wir wollen das folgende Problem lösen: $-\Delta u = f$ in $W = (0, 1) \times \Sigma$ mit Dirichlet-Randbedingungen auf $(0, 1) \times \partial\Sigma$ und periodischen Randbedingungen für $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$. Warum ist es nicht ausreichend, $u(1, \cdot) = u(0, \cdot)$ zu fordern?*

Eine gute schwache Formulierung ist wie folgt: Für den Raum

$$X = \{u \in H^1(W) \mid u(1, \cdot) = u(0, \cdot), \quad u = 0 \text{ auf } (0, 1) \times \partial\Sigma\}$$

suchen wir $u \in X$ mit der Eigenschaft

$$\int_W \nabla u \cdot \nabla \varphi = \int_W f \varphi \quad \forall \varphi \in X.$$

Welche Randbedingungen in $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$ haben wir damit kodiert?

Übung 7.2 (Ein elliptisches Problem mit quasiperiodischer Randbedingung). *Wir wollen wieder auf $W = (0, 1) \times \Sigma$ das Problem $-\Delta u = f$ mit Dirichlet-Randbedingungen auf $(0, 1) \times \partial\Sigma$ lösen. Diesmal soll die Lösung $u : W \rightarrow \mathbb{C}$ die Eigenschaft haben, dass sie, wenn wir u und f für ein festes $\alpha \in I$ zu α -quasiperiodischen Funktionen auf Ω fortsetzen, $-\Delta u = f$ auf ganz Ω gelten soll. Welche Bedingungen wollen wir dann in $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$ erfüllen?*

Wir suchen die Lösung in der Form $u(x) = v(x)e^{i\alpha x_1}$ für eine neue Funktion $v : W \rightarrow \mathbb{C}$. Geben Sie eine schwache Gleichung für v an.

Übung 7.3 (Spektrum des quasiperiodischen Problems). *Skizzieren Sie etwas ausführlicher als dort angegeben den Beweis für Lemma 7.5.*

Übung 7.4 (Spektrum reell und positiv). Führen Sie den Beweis für Bemerkung 7.10 aus. Verwenden Sie den komplexen Satz von Lax-Milgram.

Übung 7.5 (Dispersionskurven für konstante Koeffizienten). Berechnen Sie im eindimensionalen Fall alle Dispersionskurven für konstante Koeffizienten, $a \equiv a_0 > 0$ und $b \equiv b_0 > 0$. Nutzen Sie dabei aus, dass alle Eigenfunktionen von der Form $u(x) = e^{i\omega x}$ sind. Argumentieren Sie, warum tatsächlich ein periodisches Diagramm wie in Abbildung 7.1 entsteht.

Übung 7.6 (Öffnung einer Spektrallücke). Wir betrachten den eindimensionalen Fall mit $a \equiv 1$. Das Spektralproblem ist hier etwas anders als in der Vorlesung; wir betrachten

$$[-\partial_x^2 + 2\varepsilon \cos(2\pi x)] u = \lambda u.$$

Der Operator ist 1-periodisch, daher können wir mit der Floquet-Bloch-Theorie das Problem in eine Familie von Problemen auf $W = (0, 1)$ mit Parameter $\alpha \in I = [-\pi, \pi]$ übersetzen. Wenn man die α -quasiperiodischen Probleme in den Raum der 1-periodischen Funktionen übersetzt, dann muss man die folgende Familie von Operatoren betrachten:

$$L_\varepsilon = -(\partial_x + i\alpha)^2 + 2\varepsilon \cos(2\pi x).$$

Die Operatoren L_ε wirken auf 1-periodische Funktionen $u \in H_{\text{per}}^1(W)$.

Finden Sie alle Eigenfunktionen von L_ε für $\varepsilon = 0$. Stellen Sie fest, dass für $\alpha = \pi$ der Eigenwert $\lambda = \pi^2$ die Vielfachheit zwei hat und geben Sie zwei Eigenfunktionen an.

Wir suchen nun Eigenfunktionen von L_ε für $\varepsilon > 0$. Die (periodische) Eigenfunktion u schreiben wir als Fourier-Reihe,

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{i2\pi n x}.$$

Zeigen Sie: u ist eine Eigenfunktion zu $\lambda > 0$ genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt:

$$\left((2\pi n + \alpha)^2 - \lambda \right) c_n + \varepsilon (c_{n-1} + c_{n+1}) = 0.$$

In der Nähe des Kreuzungspunktes $\alpha = \pi$ und $\lambda = \pi^2$ dominieren die beiden resonanten Moden $e_0(x) = 1$ und $e_{-1}(x) = e^{-i2\pi x}$. Vernachlässigt man alle übrigen Fourier-Koeffizienten, so erhält man als Näherung das reduzierte System (nur $n = 0$ und $n = -1$):

$$\begin{pmatrix} \pi^2 - \lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \pi^2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_{-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Berechnen Sie Eigenwerte für $\varepsilon > 0$. Welche Spektrallücke erwarten wir auf der Basis dieser Näherung?

8. Strahlungsproblem im Wellenleiter

Wir wollen nun gewissermaßen die Spektralaussagen überwinden: Wir betrachten ein λ aus dem Spektrum und wollen dennoch Gleichung (7.1) lösen. Das scheint unmöglich, weil es doch, grob gesprochen, Lösungen zur rechten Seite $f = 0$ gibt. Wenn wir allerdings eine weitere Bedingung an Lösungen aufstellen, so können wir vielleicht die eindeutige Lösbarkeit wiederherstellen. Dies wird uns gelingen: Wir müssen dafür das Problem (7.1) mit geeigneten Strahlungsbedingungen ergänzen.

Wir präsentieren hier einen Zugang, der von Andreas Kirsch mit verschiedenen Koautoren entwickelt wurde, siehe unter anderem [5, 6], unsere Darstellung ist recht nah an [7]. Es gibt einen älteren Beweis der meisten Resultate mit anderen Methoden, siehe [3]. Ein Beweis, der weder komplexe Integrale noch die Floquet-Bloch Transformation benutzt, wird in [13] geführt.

Notationsänderungen im Vergleich zu [7] sind: k^2 wird zu λ , n wird zu b , der Laplace-Operator wird verallgemeinert zu $\nabla \cdot a \nabla$. Die Breite der Einheitszelle war 2π , sie ist bei uns 1. Entsprechend sind die Grenzen von I nicht mehr $\pm 1/2$, sondern $\pm \pi$.

8.1. Familien von Operatoren

Definition 8.1 (C^1 -Familien von Operatoren). *Sei X ein Banachraum und $I = [-\pi, \pi]$. Wir sagen, dass $(L_\alpha)_\alpha$ eine C^1 -Familie von Operatoren ist, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert und eine C^1 -Abbildung*

$$I_\varepsilon := (-\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon) \ni \alpha \mapsto L_\alpha \in \mathcal{L}(X, X), \quad (8.1)$$

so dass für jedes $\alpha \in I$ der Operator L_α ein Fredholmoperator mit Index 0 ist.

Wir sagen, dass $(L_\alpha)_\alpha$ eine reguläre C^1 -Familie von Operatoren ist, wenn zusätzlich für jedes $\alpha \in I$ mit $\mathcal{N} := \ker(L_\alpha) \neq \{0\}$ folgende Bedingungen erfüllt sind:

(i) *Der Operator L_α hat Riesz-Zahl 1, d.h. $\mathcal{N} := \ker(L_\alpha) = \ker(L_\alpha^2)$. Wir verwenden dann den Bildraum $\mathcal{R} := L_\alpha(X) \subset X$ und die Zerlegung $X = \mathcal{N} \oplus \mathcal{R}$ mit der zugehörigen Projektion P auf $\mathcal{N}$.*

(ii) *Der Operator*

$$M := \partial_\alpha P L_\alpha|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N} \quad (8.2)$$

ist invertierbar.

Bemerkungen. 1. Wir verlangen, dass jeder Operator L_α ein Fredholmoperator mit Index 0 ist. Dies impliziert, dass für jedes α und $L = L_\alpha$ der Unterraum $\mathcal{N} := \ker(L)$ endlichdimensional ist und der Unterraum $\mathcal{R} := L(X)$ abgeschlossen ist und endliche Codimension besitzt; letztere stimmt mit der Dimension von $\mathcal{N}$ überein, da der Index gleich 0 ist.

2. Die Bedingung $\ker(L) = \ker(L^2)$ impliziert, dass $\mathcal{N} \cap \mathcal{R} = \{0\}$. Daher existiert die Zerlegung in eine direkte Summe, $X = \mathcal{N} \oplus \mathcal{R}$. Tatsächlich gilt für $u \in \mathcal{N} \cap \mathcal{R}$, dass $u = Lx$ und $Lu = 0$, also $L^2x = 0$ und damit nach Voraussetzung auch $Lx = 0$, also $u = 0$.

3. Ist X ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ und L selbstadjungiert, so hat L immer die Riesz-Zahl 1. Tatsächlich impliziert $L^2x = 0$, dass $\langle Lx, Lx \rangle_X = \langle L^2x, x \rangle_X = 0$, also auch $Lx = 0$.

4. Die wesentliche Bedingung in obiger Definition ist (8.2). Dies ist eine Art Transversalitätsbedingung. Sehr lax formuliert (für eindimensionales $\mathcal{N}$): In α ist zwar eine gewisse Funktion Null, aber die Ableitung der Funktion ist ungleich Null.

Ein zentrales Ergebnis ist im nachfolgenden abstrakten Satz festgehalten. Wir erlauben $J = 0$ im nachfolgenden Satz, in diesem Fall ist $\mathcal{A}$ die leere Menge. Der Parameter $\varepsilon > 0$ wird wie in der obigen Definition gewählt.

Satz 8.2 (Familien von Operatorgleichungen). *Sei $(L_\alpha)_\alpha$ eine reguläre C^1 -Familie von Operatoren. Dann gelten die nachfolgenden beiden Aussagen.*

(1) Kritische Werte. *Die Menge der kritischen Werte ist endlich: Für eine Zahl $J \in \mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ und Werte $\{\alpha_j \mid j = 1, \dots, J\} \subset I$ gilt*

$$\mathcal{A} := \{\alpha \in I \mid \ker(L_\alpha) \neq \{0\}\} = \{\alpha_j \mid j = 1, \dots, J\}. \quad (8.3)$$

(2) Lösungsfamilie. *Sei $I_\varepsilon \ni \alpha \mapsto y_\alpha$ eine C^1 -Familie rechter Seiten, so dass $y_{\alpha_j} \in L_{\alpha_j}(X)$ für jedes $j = 1, \dots, J$. Dann lässt sich die Lösungsfamilie*

$$I_\varepsilon \setminus \mathcal{A} \ni \alpha \mapsto u_\alpha := (L_\alpha)^{-1}(y_\alpha)$$

zu einer C^0 -Familie auf I_ε fortsetzen. Mit einer von der Familie $(y_\alpha)_\alpha$ unabhängigen Konstanten C gilt

$$\sup_{\alpha \in I} \|u_\alpha\|_X \leq C \sup_{\alpha \in I} [\|y_\alpha\|_X + \|\partial_\alpha y_\alpha\|_X]. \quad (8.4)$$

Beweis. Schritt 1: Eine äquivalente Form des Systems. Wir beginnen den Beweis mit der Untersuchung eines Punktes $\alpha_0 \in I$ mit $\ker(L_{\alpha_0}) \neq \{0\}$. Ohne Einschränkung nehmen wir $\alpha_0 = 0$ an. Der kritische (nicht invertierbare) Operator ist $L := L_0$. Wir verwenden die Zerlegung $X = \mathcal{N} \times \mathcal{R}$ mit den Projektionen P und Q . Wir betonen, dass diese Unterräume und Projektionen für L gewählt werden und im Folgenden unabhängig von α sind. Für α nahe bei α_0 schreiben wir den Operator L_α als

$$L_\alpha = \begin{bmatrix} PL_\alpha|_{\mathcal{N}} & PL_\alpha|_{\mathcal{R}} \\ QL_\alpha|_{\mathcal{N}} & QL_\alpha|_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} : \mathcal{N} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{N} \times \mathcal{R}. \quad (8.5)$$

Die Gleichung $L_\alpha u_\alpha = y_\alpha$ schreiben wir dann mit $u_\alpha = (u_\alpha^N, u_\alpha^R) \in \mathcal{N} \times \mathcal{R}$ als

$$\begin{bmatrix} PL_\alpha|_{\mathcal{N}} & PL_\alpha|_{\mathcal{R}} \\ QL_\alpha|_{\mathcal{N}} & QL_\alpha|_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\alpha^N \\ u_\alpha^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Py_\alpha \\ Qy_\alpha \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Für $\alpha \neq \alpha_0 = 0$ ist daher die Gleichung $L_\alpha u_\alpha = y_\alpha$ äquivalent zu folgendem Gleichungssystem (wir teilen die erste Zeile durch α):

$$\tilde{L}_\alpha u_\alpha := \begin{bmatrix} \frac{1}{\alpha} PL_\alpha|_{\mathcal{N}} & \frac{1}{\alpha} PL_\alpha|_{\mathcal{R}} \\ QL_\alpha|_{\mathcal{N}} & QL_\alpha|_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_\alpha^N \\ u_\alpha^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} Py_\alpha \\ Qy_\alpha \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Beziehung (8.7) definiert lineare Operatoren $\tilde{L}_\alpha : X \rightarrow X$ für $\alpha \neq 0$.

Wir möchten diese Operatorfamilie in den Punkt $\alpha = 0$ fortsetzen. Mit $L' := (\partial_\alpha L_\alpha)|_{\alpha=0}$ und $M = PL'|_{\mathcal{N}}$ wie in (8.2) setzen wir für beliebiges $u = (u^N, u^R) \in \mathcal{N} \times \mathcal{R} = X$:

$$\tilde{L}_0 u := \begin{bmatrix} M & PL'|_{\mathcal{R}} \\ 0 & QL|_{\mathcal{R}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u^N \\ u^R \end{pmatrix}. \quad (8.8)$$

Wir behaupten, dass die neue Operatorfamilie $(-\varepsilon, \varepsilon) \ni \alpha \mapsto \tilde{L}_\alpha \in \mathcal{L}(X, X)$ stetig ist. Dies ist definitionsgemäß der Fall für alle Punkte $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. Bezüglich $\alpha = 0$ bemerken wir, dass die Operatoren aus (8.7) als Differenzenquotienten geschrieben werden können: Wegen $L|_{\mathcal{N}} \equiv 0$ gilt

$$\frac{1}{\alpha} PL_\alpha|_{\mathcal{N}} = \frac{1}{\alpha} P(L_\alpha - L)|_{\mathcal{N}}.$$

Da wir für $\alpha = 0$ mit $PL'|_{\mathcal{N}} = M$ fortgesetzt haben, ist die resultierende Familie in α stetig. Dasselbe Argument kann für den zweiten Eintrag der Matrix durchgeführt werden: Wegen $PL|_{\mathcal{R}} \equiv 0$ können wir schreiben

$$\frac{1}{\alpha} PL_\alpha|_{\mathcal{R}} = \frac{1}{\alpha} P(L_\alpha - L)|_{\mathcal{R}}.$$

Der Grenzoperator ist durch die Ableitung aus (8.8) gegeben. Schließlich bemerken wir für den dritten Eintrag, dass $QL|_{\mathcal{N}} = 0$ aufgrund der Definition von $\mathcal{N}$ gilt. Wir erhalten, dass die Familie $\tilde{L}_\alpha$ in α stetig ist.

Wir stellen fest, dass der Operator $\tilde{L}_0$ invertierbar ist: Der Operator $M : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ ist aufgrund der Definition einer regulären Familie invertierbar. Der Operator $QL|_{\mathcal{R}} : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ist aufgrund der Definition von $\mathcal{R}$ und Q invertierbar. Als Dreiecksmatrix ist somit $\tilde{L}_0$ invertierbar.

Die Stetigkeit der Familie $\tilde{L}_\alpha$ zusammen mit der Invertierbarkeit von $\tilde{L}_0$ liefert die Invertierbarkeit von $\tilde{L}_\alpha \in \mathcal{L}(X, X)$ für $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, gegebenenfalls nach Verkleinerung von $\varepsilon > 0$.

Schritt 2: Aussage (1). Da $I = [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$ kompakt ist, genügt es, die folgende Behauptung zu zeigen: Zu jedem $\alpha \in I$ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\mathcal{A} \cap (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ höchstens einen Punkt enthält.

Für $\alpha \notin \mathcal{A}$ gilt die Behauptung, da kleine Störungen invertierbarer Operatoren wiederum invertierbar sind.

Wir betrachten nun $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ und untersuchen α in einer Umgebung von α_0 . Zur Vereinfachung der Notation und ohne Einschränkung nehmen wir wieder $\alpha_0 = 0$ an. In Schritt 1 haben wir gezeigt, dass die Gleichung $L_\alpha u_\alpha = y_\alpha$ die äquivalente Form (8.7) besitzt und dass $\tilde{L}_\alpha$ für jedes $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ invertierbar ist. Daraus folgt, dass L_α für jedes $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ invertierbar ist.

Schritt 3: Aussage (2). Wir betrachten erneut die Situation aus Schritt 2, wobei u_α die Gleichung $L_\alpha u_\alpha = y_\alpha$ für $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$ löst. Für die rechte Seite y_α haben wir die Eigenschaft $y_{\alpha_j} \in L_{\alpha_j}(X)$ für alle j vorausgesetzt. In der lokalen Situation und unter unserer Annahme, dass der kritische Punkt $\alpha_0 = 0$ ist, gilt $y_0 \in L(X) = \mathcal{R}$. Dies impliziert $Py_0 = 0$, und wir können den ersten Eintrag der rechten Seite von (8.7) schreiben als

$$\frac{1}{\alpha} Py_\alpha = \frac{1}{\alpha} P(y_\alpha - y_0),$$

was sich für $\alpha = 0$ stetig durch $P\partial_\alpha y|_0$ fortsetzen lässt.

Die Tatsache, dass die Familie $\tilde{L}_\alpha$ eine stetige Familie invertierbarer Operatoren auf $\alpha \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ ist, zusammen mit der Tatsache, dass die rechten Seiten von (8.7) stetig auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ fortgesetzt werden können, zeigt, dass die Familie u_α stetig fortgesetzt werden kann. Der Beweis liefert zugleich die Abschätzung (8.4). $\square$

Regularität der Operatorfamilie der quasiperiodischen Probleme

Wir wollen nun die Familie quasiperiodischer Probleme aus Definition 7.1 untersuchen. Für festes $\alpha \in I$ betrachten wir die rechte Seite $\hat{g}(\cdot, \alpha)$ und suchen eine α -quasiperiodische Lösung $u(\cdot, \alpha)$ des Problems

$$\int_W \{a(x) \nabla u(x, \alpha) \cdot \nabla \bar{\psi}(x) - \lambda b(x) u(x, \alpha) \bar{\psi}(x)\} dx = \int_W \hat{g}(\cdot, \alpha) \bar{\psi}(x) dx \quad \forall \psi, \quad (8.9)$$

wobei ψ eine beliebige α -quasiperiodische Funktion auf W ist.

Wenn wir die obige Theorie anwenden wollen, müssen wir einen Zielraum benutzen, der unabhängig von Parametern ist. Dies haben wir auch in Lemma 7.7 getan; wir verwenden denselben Raum wie dort, nämlich

$$X := \{u \in H^1(W) \mid u = 0 \text{ auf } (0, 1) \times \partial\Sigma \text{ und } u|_{x_1=0} = u|_{x_1=1}\}. \quad (8.10)$$

Auf X verwenden wir das kanonische Skalarprodukt, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^1(W)}$.

Wir nutzen die folgende Äquivalenz für $U \in H^1(W)$:

$$[x \mapsto U(x)] \text{ } \alpha\text{-quasiperiodisch in } x_1 \iff [x \mapsto U(x)e^{-i\alpha x_1}] \text{ periodisch in } x_1. \quad (8.11)$$

Sie erlaubt es, $H_\alpha^1(W)$ -Funktionen in $H_{\text{per}}^1(W)$ -Funktionen umzuwandeln und umgekehrt. Die Familie quasiperiodischer Probleme (8.9) mit rechten Seiten $\hat{g}$ lässt sich durch die Ersetzungen $u(x, \alpha) = v(x, \alpha)e^{i\alpha x_1}$ und $\psi(x) = \varphi(x)e^{i\alpha x_1}$ schreiben als: Wir suchen $v \in L^2(I, X)$, so dass, für fast jedes $\alpha \in I$:

$$\begin{aligned} \int_W \left\{ a(x) \nabla (v(x, \alpha)e^{i\alpha x_1}) \cdot \nabla \overline{(\varphi(x)e^{i\alpha x_1})} - \lambda b(x) v(x, \alpha) \overline{\varphi(x)} \right\} dx \\ = \int_W \hat{g}(x, \alpha) \overline{\varphi(x)e^{i\alpha x_1}} dx \end{aligned} \quad (8.12)$$

für jedes $\varphi \in X$.

Wir betrachten nun ein festes $\alpha \in I$. Die Ausdrücke in (8.12) beschreiben (anti-)lineare Funktionale in φ , Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{C}$. Indem wir diese Funktionale mit dem Darstellungssatz von Riesz als Skalarprodukte schreiben, finden wir zu $\hat{g}(\cdot, \alpha)$ und $v_0 = v(\cdot, \alpha) \in X$ Elemente $y_\alpha \in X$ und $L_\alpha v_0 \in X$ mit

$$\langle L_\alpha v_0, \varphi \rangle_X = \int_W \left\{ a(x) \nabla (v_0(x)e^{i\alpha x_1}) \cdot \nabla \overline{(\varphi(x)e^{i\alpha x_1})} - \lambda b(x) v_0(x) \overline{\varphi(x)} \right\} dx, \quad (8.13)$$

$$\langle y_\alpha, \varphi \rangle_X = \int_W \hat{g}(x, \alpha) \overline{\varphi(x)e^{i\alpha x_1}} dx, \quad (8.14)$$

für jedes $\varphi \in X$. Mit diesen Darstellungen ist das ursprüngliche Problem (8.23) gelöst, wenn wir für fast jedes $\alpha \in I$ eine Lösung $v(\cdot, \alpha) \in X \subset H_{\text{per}}^1(W)$ von

$$L_\alpha v(\cdot, \alpha) = y_\alpha \quad (8.15)$$

finden und diese Lösungsfamilie die Eigenschaft $v \in L^2(I, X)$ besitzt.

Die Operatoren L_α sind alle Fredholmoperatoren mit Index 0 (wir haben diesen Nachweis auf beschränkten Gebieten bereits mehrfach gemacht). Die Definition zeigt auch sofort, dass alle L_α selbstadjungiert sind.

Es ist nicht klar, ob (8.15) für jedes α lösbar ist. Tatsächlich wissen wir für Spektralwerte λ , dass wir für gewisse $\alpha \in I$ den Operator L_α nicht invertieren können. Um Gleichung (8.15) zu lösen, werden strukturelle Annahmen an g notwendig sein. Der Hintergrund für diese Einschränkung ist letztlich, dass wir mit unserem Verfahren Lösungen u des ursprünglichen Problems im Raum $H^1(\Omega)$ suchen, also Lösungen mit Abklingeigenschaften. Wir können nicht für alle rechten Seiten g erwarten, dass Lösungen abfallend sind.

Wir betrachten nun die Einparameterfamilie L_α aus (8.13). Diese Familie ist aufgrund der glatten Abhängigkeit $\alpha \mapsto L_\alpha$ eine C^1 -Familie. Mit Hilfe der Äquivalenz (8.11) ist der Kern $\mathcal{N}_\alpha := \ker(L_\alpha) \subset X$ gegeben durch $\mathcal{N}_\alpha = \{e^{-i\alpha x_1} u \mid u \in Y^\alpha\}$ mit

$$Y^\alpha := \{u \in H_\alpha^1(W) \mid -\nabla \cdot (a\nabla u) - \lambda b u = 0 \text{ in } \Omega \text{ und } u = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times \partial\Sigma\}, \quad (8.16)$$

bei der Lösungseigenschaft haben wir u mit seiner α -quasiperiodischen Fortsetzung identifiziert. Da jeder Operator L_α ein Fredholmoperator ist, ist der Kern $\mathcal{N}_\alpha$ endlichdimensional und somit auch Y^α endlichdimensional. Wir interessieren uns für die Menge der kritischen Punkte

$$\mathcal{A} := \{\alpha \in [-\pi, \pi] \mid \ker(L_\alpha) \neq \{0\}\}. \quad (8.17)$$

Ohne weitere Annahmen kann die Menge $\mathcal{A}$ endlich oder unendlich sein. Satz 8.2 liefert, dass $\mathcal{A}$ endlich ist, sobald wir zeigen können, dass L_α eine reguläre C^1 -Familie ist. Genau dies werden wir unter einer bestimmten Annahme erhalten.

Der Energiefluss. Wir betrachten eine neue Sesquilinearform $E : H^1(W) \times H^1(W) \rightarrow \mathbb{C}$. Für $u, v \in H^1(W)$ setzen wir

$$E(u, v) := i \int_W a(x) \{u \partial_1 \bar{v} - \bar{v} \partial_1 u\}. \quad (8.18)$$

Die Argumente von E werden typischerweise α -quasiperiodische Funktionen sein und nicht Elemente von $X \subset H_{\text{per}}^1(W)$. Wir beobachten, dass E hermitesch ist, also $E(u, v) = \overline{E(v, u)}$ für alle u und v gilt. Insbesondere gilt $E(u, u) \in \mathbb{R}$ für alle u .

Die Form E steht in Beziehung zu Energieflüssen durch Querschnitte der Form $\Gamma_t := \{t\} \times \Sigma \subset \Omega$ für $t \in \mathbb{R}$. Sind nämlich u und v zwei Lösungen, $\nabla \cdot (a\nabla u) + \lambda b u = 0 = \nabla \cdot (a\nabla v) + \lambda b v$, so liefert eine Anwendung des Green'schen Satzes in $W_{s,t} := (s, t) \times \Sigma$ für beliebige $s < t$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_t} a(x) \{u \partial_1 \bar{v} - \bar{v} \partial_1 u\} - \int_{\Gamma_s} a(x) \{u \partial_1 \bar{v} - \bar{v} \partial_1 u\} &= \int_{\partial W_{s,t}} a(x) \{u \partial_\nu \bar{v} - \bar{v} \partial_\nu u\} \\ &= \int_{W_{s,t}} \{u [\nabla \cdot (a\nabla \bar{v}) + \lambda b \bar{v}] - \bar{v} [\nabla \cdot (a\nabla u) + \lambda b u]\} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir mit ∂_ν die Normalableitung nach außen auf $W_{s,t}$ bezeichnet haben. Die Rechnung zeigt, dass die Flussgröße

$$F_{u,v,t} := i \int_{\Gamma_t} a(x) \{u \partial_1 \bar{v} - \bar{v} \partial_1 u\} \quad (8.19)$$

unabhängig von $t \in \mathbb{R}$ ist. Insbesondere gilt $E(u, v) = \int_0^1 F_{u,v,t} dt = F_{u,v,s}$ für jedes $s \in \mathbb{R}$.

Wir erhalten leicht, dass für verschiedene Werte von $\alpha \in (-\pi, \pi]$ die Räume Y^α bezüglich der obigen sesquilinearen Form orthogonal sind:

Lemma 8.3 (Orthogonalität für verschiedene Quasimomente). *Seien $\alpha, \beta \in (-\pi, \pi]$ mit $\alpha \neq \beta$ zwei Quasimomente und seien $u \in Y^\alpha$ und $v \in Y^\beta$ zwei Lösungen der homogenen Gleichung. Dann gilt $E(u, v) = 0$.*

Beweis. Für quasiperiodische Funktionen u und v wie im Lemma erfüllt der Ausdruck aus (8.19) definitionsgemäß die Beziehung $F_{u,v,t+1} = e^{i\alpha} e^{-i\beta} F_{u,v,t}$. Andererseits ist, wie oben bemerkt, $F_{u,v,t}$ unabhängig von t . Wegen $|\alpha - \beta| < 2\pi$ folgern wir $F_{u,v,t} = 0$ und somit $E(u, v) = 0$. $\square$

Unter einer Annahme an E erhalten wir, dass L_α eine reguläre C^1 -Familie ist.

Annahme 8.4 (Nichtdegeneriertheit). *Für jedes $\alpha \in \mathcal{A}$ sei die sesquilineare Form E auf Y^α nichtdegeneriert in folgendem Sinn: Für jedes $0 \neq \phi \in Y^\alpha$ ist die Abbildung $E(\phi, \cdot) : Y^\alpha \rightarrow \mathbb{C}$ nicht identisch 0.*

Proposition 8.5 (Regularität der Operatorfamilie). *Sei L_α die in (8.13) konstruierte C^1 -Familie von Operatoren und sei Annahme 8.4 erfüllt. Dann ist L_α eine reguläre C^1 -Familie von Operatoren im Sinne von Definition 8.1.*

Beweis. Wir fixieren $\alpha \in \mathcal{A}$ und betrachten den Operator $L := L_\alpha$ mit Kern $\mathcal{N} := \ker(L)$ und Ableitung $L' := \partial_\alpha L_\alpha$. Wir müssen nachweisen, dass $M := PL'|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ invertierbar ist, wobei P die Projektion auf $\mathcal{N}$ bezeichnet. In der folgenden Rechnung liefert die Definition von L_α in (8.13) die erste Gleichheit; wir verwenden hier, dass $e^{i\alpha x_1} e^{-i\alpha x_1} = 1$ unabhängig von α ist. In der zweiten Gleichheit verwenden wir, dass sich die Terme aus dem ersten und dem zweiten Ausdruck aufheben, wenn die Ableitungen auf $u(x) e^{i\alpha x_1}$ beziehungsweise auf $\varphi(x) e^{i\alpha x_1}$, aber nicht auf x_1 , angewendet werden.

$$\begin{aligned} & \langle L'u, \varphi \rangle_X \\ &= i \int_W a(x) \left\{ \nabla(u(x) x_1 e^{i\alpha x_1}) \cdot \nabla(\overline{\varphi(x) e^{i\alpha x_1}}) - \nabla(u(x) e^{i\alpha x_1}) \cdot \nabla(\overline{\varphi(x) x_1 e^{i\alpha x_1}}) \right\} dx \\ &= i \int_W a(x) \left\{ u(x) e^{i\alpha x_1} \partial_1(\overline{\varphi(x) e^{i\alpha x_1}}) - \partial_1(u(x) e^{i\alpha x_1}) \overline{\varphi(x) e^{i\alpha x_1}} \right\} dx \\ &= E(u e^{i\alpha x_1}, \varphi e^{i\alpha x_1}). \end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung können wir schließen, dass $PL'|_{\mathcal{N}}$ invertierbar ist. Sei dazu $u \in \mathcal{N}$ mit $PL'u = 0$. Da $L = L_\alpha$ selbstadjungiert ist (in X), sind $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$ orthogonal. In dieser Situation impliziert $PL'u = 0$, dass $\varphi \mapsto \langle L'u, \varphi \rangle_X$ die triviale Form auf $\mathcal{N}$ ist. Die obige Rechnung zusammen mit der Tatsache, dass E nichtdegeneriert ist, impliziert, dass dies nur für $u e^{i\alpha x_1} = 0$ und somit für $u = 0$ möglich ist. Wir erhalten, dass der Kern von $PL'|_{\mathcal{N}}$ trivial ist. Daher ist M aus (8.2) invertierbar. $\square$

Corollar 8.6 (Die Räume Y_j und Basisfunktionen). *Wir betrachten eine Helmholtzgleichung, für die Annahme 8.4 erfüllt ist. In dieser Situation ist die in (8.13) konstruierte Familie L_α eine reguläre C^1 -Familie von Operatoren. Es gibt eine endliche (möglicherweise leere) Menge von Werten $\mathcal{A} = \{\alpha_j | j = 1, \dots, J\}$, so dass*

$$Y_j := \left\{ u \in H_{\alpha_j}^1(W) \mid \nabla \cdot (a \nabla u) + \lambda b u = 0 \text{ in } \Omega \text{ und } u = 0 \text{ auf } \mathbb{R} \times \partial \Sigma \right\} \quad (8.20)$$

nicht trivial ist. Jeder Raum Y_j besitzt eine endliche Dimension $m_j \in \mathbb{N}$, und die Räume Y_j sind bezüglich E orthogonal. Wir verwenden die direkte Summe

$$Y := \bigoplus_{j=1}^J Y_j \subset H^1(W). \quad (8.21)$$

Wir wählen für jeden Raum Y_j ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y_j}$ und lösen das hermitesche Eigenwertproblem

$$E(\phi, \psi) = \lambda \langle \phi, \psi \rangle_{Y_j} \quad \text{für alle } \psi \in Y_j \quad (8.22)$$

nach $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\phi \in Y_j$. Dies liefert eine orthogonale Basis von Y_j , bestehend aus Eigenfunktionen $\phi_{\ell,j}$, $\ell = 1, \dots, m_j$. Der Wert $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert.

Beweis. Proposition 8.5 liefert, dass L_α eine reguläre Familie ist. Das funktionalanalytische Theorem 8.2 liefert, dass die Menge der kritischen α -Werte endlich ist. Aufgrund von Lemma 8.3 sind die Räume Y_j bezüglich E orthogonal. Annahme 8.4 garantiert, dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist. Die übrigen Aussagen wiederholen die Definitionen und folgen aus der Fredholm-Eigenschaft der Operatorfamilie. Die Lösungen ϕ von (8.22) sind nach Konstruktion zueinander orthogonal in Y_j . $\square$

8.2. Existenzresultate

Wir betrachten wieder

$$-\nabla \cdot (a \nabla u) - \lambda b u = g \quad \text{in } \Omega = \mathbb{R} \times \Sigma, \quad (8.23)$$

mit der schwachen Form

$$\int_{\Omega} \{a \nabla u \cdot \nabla \bar{\varphi} - \lambda b u \bar{\varphi}\} = \int_{\Omega} g \bar{\varphi} \quad (8.24)$$

für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Wir legen stets Dirichlet-Randbedingungen zugrunde: $u(\cdot) = 0$ auf $\mathbb{R} \times \partial \Sigma$ für (8.23) und später $\hat{u}(\cdot, \alpha) = 0$ auf $(0, 1) \times \partial \Sigma$ für fast jedes $\alpha \in I$.

Für die Quellterme führen wir einen gewichteten L^2 -Raum ein. Wir setzen

$$L_*^2(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid x \mapsto (1 + |x_1|^2)f(x) \in L^2(\Omega)\}. \quad (8.25)$$

Beschränkte Lösungen für orthogonale Quellen

Wir wenden uns unserem ersten Existenzresultat für die Helmholtzgleichung zu. Wir charakterisieren die rechten Seiten g , für die die Gleichung (8.23) eine Lösung in $H^1(\Omega)$ besitzt.

Satz 8.7 (Existenz von $H^1(\Omega)$ -Lösungen mit Floquet-Bloch-Theorie). *Für gegebene Σ , a , b und λ betrachten wir die Helmholtzgleichung (8.23) für eine rechte Seite $g \in L^2_*(\Omega)$. Annahme 8.4 sei erfüllt.*

Existenz: Die Floquet-Bloch-Transformierte $\hat{g}(\cdot, \alpha)$ habe die zellenweise Orthogonalitätseigenschaft

$$\langle \hat{g}(\cdot, \alpha_j), \phi \rangle_{L^2(W)} = 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, J\} \text{ und } \phi \in Y_j. \quad (8.26)$$

Dann besitzt (8.23) eine Lösung $u \in H^1(\Omega)$ mit $\|u\|_{H^1} \leq C\|g\|_{L^2_(\Omega)}$ für eine Konstante $C = C(\Sigma, a, b, \lambda)$.*

Eindeutigkeit: Ist $u \in H^1(\Omega)$ eine Lösung von (8.23), dann gilt die Orthogonalitätsbedingung (8.26). Die Lösung u ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Existenz. Mit Hilfe der Floquet-Bloch Transformation haben wir gezeigt, dass die Gleichung (8.23) äquivalent ist zu der Familie von Gleichungen $L_\alpha v(\cdot, \alpha) = y_\alpha$ aus (8.15), $\alpha \in I = [-\pi, \pi]$. Insbesondere genügt es, eine Familie $v(\cdot, \alpha)$ von Lösungen von (8.15) zu finden und nachzuweisen, dass $v \in L^2(I, H^1_{\text{per}}(W))$ gilt. Aufgrund der Definition der kritischen Werte $\mathcal{A} = \{\alpha_j | j = 1, \dots, J\}$ existiert für jedes $\alpha \in I \setminus \mathcal{A}$ eine eindeutige Lösung $v(\cdot, \alpha)$. Wir behaupten, dass sich diese Lösungsfamilie stetig auf ganz I fortsetzen lässt.

Wir betrachten einen der kritischen Werte, $\alpha = \alpha_j \in \mathcal{A}$, und ein kleines Intervall $\tilde{I} = [\alpha_j - \varepsilon, \alpha_j + \varepsilon]$, das keinen weiteren kritischen Wert enthält. Wir wollen das funktionalanalytische Resultat aus Theorem 8.2 anwenden. Wir verwenden den Raum X aus (8.10), die Operatorfamilie L_α aus (8.13) sowie die Familie der rechten Seiten y_α aus (8.14).

Wir müssen die Voraussetzungen von Satz 8.2 überprüfen. Die Operatoren L_α hängen glatt von α ab und sind invertierbar für alle $\alpha \in \tilde{I} \setminus \mathcal{A}$. Wir wenden uns der Bedingung $y_{\alpha_j} \in \mathcal{R} = L_{\alpha_j}(X)$ zu. Für ein beliebiges Element $\varphi \in \mathcal{N} := \ker(L_{\alpha_j}) \subset X$ beachten wir, dass $\phi(x) := \varphi(x)e^{i\alpha_j x_1} \in Y_j$ gilt, und aufgrund der Definition von y_α

$$\langle y_{\alpha_j}, \varphi \rangle_X = \int_W \hat{g}(x, \alpha_j) e^{-i\alpha_j x_1} \overline{\varphi(x)} dx = \int_W \hat{g}(\cdot, \alpha_j) \bar{\phi} = 0 \quad (8.27)$$

aufgrund der Orthogonalitätsannahme (8.26). Dies zeigt, dass y_{α_j} orthogonal zu $\mathcal{N}$ ist. Da L_{α_j} selbstadjungiert ist, sind die Unterräume $\mathcal{N}$ und $\mathcal{R}$ orthogonal. Da L_{α_j} außerdem Fredholm mit Index 0 ist, ist der Raum X die orthogonale direkte Summe $\mathcal{N} \oplus \mathcal{R}$. Da wir gezeigt haben, dass y_{α_j} orthogonal zu $\mathcal{N}$ ist, haben wir $y_{\alpha_j} \in \mathcal{R}$ gefunden.

Proposition 8.5 liefert, dass L_α eine reguläre Operatorfamilie im Sinne von Definition 8.1 ist; daher kann Satz 8.2 angewendet werden. Wir erhalten, dass $I \ni \alpha \mapsto v(\cdot, \alpha)$ stetig ist, also insbesondere $v \in L^2(I, H^1_{\text{per}}(W))$. Dies liefert eine $H^1_0(\Omega)$ -Lösung von (8.23).

Wir wenden uns der Abschätzung für die Lösung zu. Die Definition von y_α (vergleiche erste Gleichung in (8.27)) impliziert, dass $[\alpha \mapsto y_\alpha] \in C^1(I, X)$ gilt, wenn $[\alpha \mapsto \hat{g}(\cdot, \alpha)] \in C^1(I, L^2(W))$ gilt. Letzteres werden wir nun nachweisen.

Mit den Funktionen $g_\ell : W \rightarrow \mathbb{C}$, $g_\ell(x_1, \tilde{x}) := g(x_1 + \ell, \tilde{x})$, können wir die Norm von g abschätzen durch

$$\|g\|_{L^2_*(\Omega)}^2 = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_W |g_\ell(x)|^2 [1 + |x_1 + \ell|^2] dx \geq c_0 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (1 + \ell^2)^2 \|g_\ell\|_{L^2(W)}^2$$

für eine universelle Konstante $c_0 > 0$. Dies erlaubt es, für beliebige $0 \leq m < M$ die Norm einer endlichen Summe zu berechnen, die mit der Definition der Floquet-Bloch Transformation von (6.2) zusammenhängt:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{m \leq |\ell| \leq M} \ell g(x + \ell e_1) e^{-i\ell\alpha} \right\|_{L^2(W)} &\leq \sum_{m \leq |\ell| \leq M} |\ell| \|g_\ell\|_{L^2(W)} \\ &\leq \sum_{m \leq |\ell| \leq M} \frac{1}{\sqrt{1 + \ell^2}} (1 + \ell^2) \|g_\ell\|_{L^2(W)} \\ &\leq \sqrt{\sum_{m \leq |\ell| \leq M} \frac{1}{1 + \ell^2}} \sqrt{\sum_{m \leq |\ell| \leq M} (1 + \ell^2)^2 \|g_\ell\|_{L^2(W)}^2} \leq C_m \|g\|_{L_*^2(\Omega)} \end{aligned}$$

mit $C_m > 0$ unabhängig von g und mit beliebig kleinem $C_m > 0$, falls m groß ist. Die Funktion $\hat{g}(\cdot, \alpha)$ ist durch die Floquet-Bloch Transformation aus (6.2) definiert. Der Term auf der linken Seite der obigen Rechnung ist, als unendliche Summe, bis auf einen Faktor gerade $\partial_\alpha \hat{g}(\cdot, \alpha)$. Obige Rechnung zeigt, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge ist, daher ist die Reihe wohldefiniert. Als Ergebnis der Rechnung erhalten wir für ein $C > 0$

$$\|\hat{g}(\cdot, \alpha)\|_{L^2(W)} + \|\partial_\alpha \hat{g}(\cdot, \alpha)\|_{L^2(W)} \leq C \|g\|_{L_*^2(\Omega)}$$

für alle α . Satz 8.2 liefert die Abschätzung (8.4) für Lösungen, also eine Schranke für $\hat{u} \in C^0(I, H^1(W))$, insbesondere für $\hat{u} \in L^2(I, H^1(W))$. Daraus folgt die Abschätzung für $u \in H^1(\Omega)$, nämlich $\|u\|_{H^1} \leq C \|g\|_{L_*^2(\Omega)}$.

Eindeutigkeit. Um die eindeutige Lösbarkeit von (8.23) zu zeigen, genügt es, die eindeutige Lösbarkeit von (8.9) für fast jedes α nachzuweisen. Für jedes $\alpha \notin \mathcal{A}$ kann die Gleichung (8.9) aufgrund der Definition der kritischen α -Werte eindeutig gelöst werden. Dies zeigt bereits die Eindeutigkeit der Lösung.

Wir wollen noch einsehen, dass die Existenz einer Lösung die Orthogonalitätsrelation impliziert. Dazu sei $u \in H^1(\Omega)$ eine Lösung von (8.23), wir wollen (8.26) zeigen. Wir rechnen, für $\phi \in Y_j$, mit der Lösungseigenschaft von $\hat{u}(\cdot, \alpha_j)$,

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}(\cdot, \alpha_j), \phi \rangle_{L^2(W)} &= \int_W \left\{ a(x) \nabla \hat{u}(x, \alpha_j) \cdot \nabla \overline{\phi(x)} - \lambda b(x) \hat{u}(x, \alpha_j) \overline{\phi(x)} \right\} dx \\ &= -\langle \hat{u}(\cdot, \alpha_j), (\nabla \cdot (a \nabla) + \lambda b) \phi \rangle_{L^2(W)} = 0, \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass für jedes α die partielle Integration ohne Randterme für zwei Funktionen aus dem Raum $H_\alpha^1(W)$ gilt. Damit ist der Satz bewiesen. $\square$

Lemma 8.8 (Orthogonalitätskriterium). *Die Orthogonalitätsbedingung (8.26) ist mittels der Floquet-Bloch-Transformierten von g formuliert. Mit der ursprünglichen Funktion g und dem Raum Y aus (8.21) lautet eine äquivalente Bedingung*

$$\int_\Omega g(x) \overline{\phi(x)} dx = 0 \quad \text{für alle } \phi \in Y. \quad (8.28)$$

Beweis. Wir fixieren $j \in \{1, \dots, J\}$, setzen $\alpha := \alpha_j$ und wählen eine Funktion ϕ aus Y_j . Wir identifizieren ϕ mit ihrer α -quasiperiodischen Fortsetzung, die $\phi(x + \ell e_1) =$

$\phi(x)e^{i\ell\alpha}$ erfüllt, wobei e_1 der Einheitsvektor in x_1 -Richtung ist. Wir berechnen für $\hat{g} = \mathcal{F}_{\text{FB}}(g)$

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\langle \hat{g}(\cdot, \alpha), \phi \rangle_{L^2(W)} &= \left\langle \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} g(\cdot + \ell e_1) e^{-i\ell\alpha}, \phi \right\rangle_{L^2(W)} \\ &= \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \left\langle g(\cdot + \ell e_1), \phi(\cdot + \ell e_1) \right\rangle_{L^2(W)} = \int_{\Omega} g(x) \overline{\phi(x)} dx.\end{aligned}$$

Wir bemerken, dass die Reihen aufgrund von $g \in L_*^2(\Omega)$ jeweils wohldefiniert sind. $\square$

Lösung für vorgegebene Strahlungsbedingungen

Im vorherigen Unterabschnitt haben wir eine Lösung u von (8.23) erhalten, wenn g die Orthogonalitätsbedingung (8.28) erfüllt. Dies ist nicht die Art von Lösung, die typischerweise beobachtet wird. Im physikalischen Problem müssen wir die Gleichung

$$-\nabla \cdot a \nabla u - \lambda b u = f \quad \text{in } \Omega = \mathbb{R} \times \Sigma, \quad (8.29)$$

mit einer allgemeinen rechten Seite f betrachten und wollen Lösungen erhalten, die weit entfernt vom Ursprung näherungsweise Linearkombinationen auslaufender Wellen sind. Solche Lösungen gehören nicht zum Raum $H^1(\Omega)$. Wir werden rechte Seiten von der Klasse $f \in L_*^2(\Omega)$ betrachten, siehe (8.25).

Um die Ausstrahlungsbedingung zu definieren, verwenden wir zwei Abschneidefunktionen.

Definition 8.9 (Abschneidefunktionen $\rho_{\pm}$). *Wir sagen, dass $\rho_+, \rho_- \in C^2(\mathbb{R}, [0, 1])$ zulässige Abschneidefunktionen sind, wenn für eine Zahl $R > 0$ gilt:*

$$\begin{aligned}\rho_+(x_1) &= 1, & \rho_-(x_1) &= 0 & \forall x_1 > R, \\ \rho_+(x_1) &= 0, & \rho_-(x_1) &= 1 & \forall x_1 < -R.\end{aligned}$$

Bemerkung zu Abschneidefunktionen. Formal hängt die unten formulierte Ausstrahlungsbedingung von der Wahl der $\rho_{\pm}$ ab. Wir werden jedoch später zeigen, dass die Lösung u des Ausstrahlungsproblems nicht von der Wahl der $\rho_{\pm}$ abhängt.

Die Anforderung $\rho_{\pm} \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ kann durch $\rho_{\pm} \in C^{0,1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ersetzt werden, d. h. durch Lipschitz-Stetigkeit der Abschneidefunktionen.

Von nun an verwenden wir die Räume Y_j und die Basisfunktionen $\phi_{\ell,j}$, wie sie in Korollar 8.6 gewählt wurden. Wir ändern an dieser Stelle die Notation leicht: Wir fassen nun alle Basisfunktionen $\phi_{\ell,j}$ zu einer neuen Familie mit nur einem Index zusammen und schreiben $(\phi_{\ell})_{\ell}$, wobei nun $1 \leq \ell \leq L := \sum_{j=1}^J m_j$ gilt. Wir erinnern daran, dass Orthogonalität bezüglich der hermiteschen sesquilinearen Form E vorliegt, das heißt: $E(\phi_{\ell}, \phi_{\ell'}) = \delta_{\ell,\ell'} E(\phi_{\ell}, \phi_{\ell})$ für alle ℓ, ℓ' .

Definition 8.10 (Propagierender Anteil und Ausstrahlungsbedingung). *Wir fixieren zulässige Abschneidefunktionen $\rho_{\pm}$ wie in Definition 8.9. Für jedes $\ell \leq L$ wird der Modus ϕ_{ℓ} rechtslaufend genannt, wenn $E(\phi_{\ell}, \phi_{\ell}) > 0$ gilt; er wird linkslaufend*

genannt, wenn $E(\phi_\ell, \phi_\ell) < 0$ gilt. Für jedes ℓ , für das ϕ_ℓ rechtslaufend ist, setzen wir $\rho_\ell := \rho_+$ und für jedes ℓ , für das ϕ_ℓ linkslaufend ist, setzen wir $\rho_\ell := \rho_-$.

(i) Propagierender Anteil. Für komplexe Koeffizienten $(c_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$ sagen wir, dass

$$w = \sum_{\ell=1}^L c_\ell \rho_\ell \phi_\ell \quad (8.30)$$

die zu $c \in \mathbb{C}^L$ gehörige propagierende Wellenfunktion ist.

(ii) Ausstrahlungsbedingung. Wir sagen, dass eine Lösung $u \in H_{loc}^1(\Omega)$ von (8.29) die Ausstrahlungsbedingung erfüllt, wenn ein $c \in \mathbb{C}^L$ existiert, so dass mit der zugehörigen propagierenden Wellenfunktion w gilt

$$v := u - w \in H^1(\Omega). \quad (8.31)$$

Definition 8.10 erlaubt es, mit unseren zuvor entwickelten Methoden ein Existenzresultat zu zeigen: Wir lösen das Ausstrahlungsproblem (8.29), indem wir $v = u - w \in H_0^1(\Omega)$ mit Theorem 8.7 konstruieren. Wir können die Gleichung für v schreiben als

$$-\nabla \cdot a \nabla v - \lambda b v = g := f + (\nabla \cdot a \nabla w + \lambda b w). \quad (8.32)$$

Der Ausdruck $\nabla \cdot a \nabla w + \lambda b w$ hat einen kompakten Träger und wir werden Satz 8.7 mit der rechten Seite g anwenden. Die Funktion g hängt vom Koeffizientenvektor $c \in \mathbb{C}^L$ ab. Wir werden $c \in \mathbb{C}^L$ so wählen, dass g die Orthogonalität erfüllt und (8.32) eine Lösung $v \in H_0^1(\Omega)$ besitzt.

Die Formulierung der Ausstrahlungsbedingung in Definition 8.10 liefert folgende Implikationen. Existenz: Finden wir ein $c \in \mathbb{C}^L$, so dass (8.32) eine Lösung $v \in H_0^1(\Omega)$ besitzt, dann ist $u = w + v \in H_{loc}^1(\bar{\Omega})$ eine Lösung von (8.29) mit Ausstrahlungsbedingung. Eindeutigkeit: Ist $u \in H_{loc}^1(\bar{\Omega})$ eine nichttriviale Lösung von (8.29) mit Ausstrahlungsbedingung, dann existieren $c \in \mathbb{C}^L$ und eine Lösung $v \in H_0^1(\Omega)$ von (8.32), so dass entweder c oder v nichttrivial sind.

Satz 8.11 (Existenz ausstrahlender Lösungen). *Seien Σ , a , b , λ und f wie oben, wir nehmen hier zur Vereinfachung $a \in C^1(\bar{\Omega})$ an. Es seien zwei Abschneidefunktionen $\tilde{\rho}_\pm$ wie in Definition 8.9 fest gewählt, für eine Zuordnung $\sigma : \{1, \dots, L\} \rightarrow \{\pm 1\}$ setzen wir $\rho_\ell = \tilde{\rho}_{\sigma(\ell)}$. Wir fordern, dass Annahme 8.4 erfüllt ist. Dann besitzt (8.29) eine eindeutige Lösung $u \in H_{loc}^1(\bar{\Omega})$, die die Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Mit w , v und c aus der Ausstrahlungsbedingung gilt*

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|w\|_{H^1(W)} \leq C \|f\|_{L_*^2(\Omega)} \quad (8.33)$$

mit $C = C(\Sigma, a, b, \lambda, \rho_\pm)$. Die Koeffizienten c_ℓ für $\ell \in \{1, \dots, L\}$ sind gegeben durch

$$c_\ell = \frac{i}{\sigma(\ell) E(\phi_\ell, \phi_\ell)} \langle f, \phi_\ell \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (8.34)$$

Beweis. Existenz. Wir wollen $c \in \mathbb{C}^L$ in der Definition von w so bestimmen, dass g aus (8.32) die Orthogonalitätsbedingung (8.28) erfüllt. Wir verwenden eine Basisfunktion $\phi_{\ell'} \in Y_j$, die wir als α_j -quasiperiodische Funktion auf Ω auffassen. Wir

wollen, dass (8.28) durch g erfüllt wird und fordern daher die erste Gleichheit. Die zweite Gleichung ist die Definition von w aus (8.30).

$$\begin{aligned} -\langle f, \phi_{\ell'} \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle (\nabla \cdot a \nabla + \lambda b)w, \phi_{\ell'} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \sum_{\ell=1}^L c_{\ell} \langle (\nabla \cdot a \nabla + \lambda b)(\rho_{\ell} \phi_{\ell}), \phi_{\ell'} \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Wir berechnen mit Produktregeln

$$(\nabla \cdot a \nabla + \lambda b)(\rho_{\ell} \phi_{\ell}) = \rho_{\ell}(\nabla \cdot a \nabla + \lambda b)\phi_{\ell} + \nabla \rho_{\ell} \cdot a \nabla \phi_{\ell} + \nabla \cdot (\phi_{\ell} a \nabla \rho_{\ell}) \quad (8.36)$$

$$= \rho'_{\ell} a \partial_1 \phi_{\ell} + \partial_1(\phi_{\ell} a \rho'_{\ell}). \quad (8.37)$$

Das Ergebnis der Rechnung ist im Distributionssinn zu verstehen, wobei man aber auch Testfunktionen aus dem Raum $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$ verwenden kann.

Das Ergebnis erlaubt es uns, das Skalarprodukt auf der rechten Seite von (8.35) auszuwerten:

$$\begin{aligned} \langle (\nabla \cdot a \nabla + \lambda b)(\rho_{\ell} \phi_{\ell}), \phi_{\ell'} \rangle_{L^2(\Omega)} &= \langle \rho'_{\ell} a \partial_1 \phi_{\ell} + \partial_1(\phi_{\ell} a \rho'_{\ell}), \phi_{\ell'} \rangle_{L^2(\Omega)} \\ &= \int_{\Omega} \bar{\phi}_{\ell'} \rho'_{\ell} a \partial_1 \phi_{\ell} - \partial_1 \bar{\phi}_{\ell'} a \rho'_{\ell} \phi_{\ell} = i \int_{\mathbb{R}} \rho'_{\ell}(t) F_{\phi_{\ell}, \phi_{\ell'}, t} dt \end{aligned}$$

mit der Flussgröße $F_{\phi_{\ell}, \phi_{\ell'}, t}$ aus (8.19). Der Fluss ist unabhängig von t und stimmt überein mit $E(\phi_{\ell}, \phi_{\ell'}) = E(\phi_{\ell}, \phi_{\ell}) \delta_{\ell, \ell'}$. Mit Blick auf (8.35) multiplizieren wir das Ergebnis mit c_{ℓ} und summieren über ℓ und erhalten

$$\sum_{\ell=1}^L c_{\ell} i \int_{\mathbb{R}} \rho'_{\ell}(t) F_{\phi_{\ell}, \phi_{\ell'}, t} dt = c_{\ell'} E(\phi_{\ell'}, \phi_{\ell'}) \sigma(\ell').$$

Wegen (8.35) ist also die Orthogonalitätsbedingung (8.35) äquivalent zu

$$-\langle f, \phi_{\ell} \rangle_{L^2(\Omega)} = c_{\ell} i E(\phi_{\ell}, \phi_{\ell}) \sigma(\ell).$$

Dies ist die Bedingung, die wir in (8.34) angegeben haben.

Die obige Rechnung zeigt: Bei Wahl von $(c_{\ell})_{\ell}$ gemäß (8.34) ist die Orthogonalitätsbedingung (8.26) für g erfüllt. Daher können wir v mit Satz 8.7 bestimmen. Die Existenzaussage ist damit gezeigt. Mit einem von $\rho_{\pm}$ abhängigen C gilt die Abschätzung $\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|g\|_{L_*^2(\Omega)} \leq C(\|f\|_{L_*^2(\Omega)} + \|(\nabla \cdot a \nabla + \lambda b)w\|_{L^2(\Omega)}) \leq C(\|f\|_{L_*^2(\Omega)} + |c|_{\mathbb{C}^L}) \leq C\|f\|_{L_*^2(\Omega)}$. Dies impliziert die Abschätzung (8.33) für Lösungen.

Eindeutigkeit. Sei u eine Lösung des Ausstrahlungsproblems mit $f = 0$. Wir wollen zeigen, dass u verschwindet. Die Gleichung für $v \in H^1(\Omega)$ hat die rechte Seite $g = (\nabla \cdot a \nabla + \lambda b)w$. Theorem 8.7 impliziert, dass g die Orthogonalitätsbedingung (8.28) erfüllt. Die obige Rechnung zeigt, dass die Orthogonalitätsbedingung für g die Koeffizienten $c \in \mathbb{C}^L$ mit einer Formel liefert, für $f = 0$ sind die Koeffizienten $c = 0$. Dies zeigt $w = 0$. Aus der Eindeutigkeitsaussage von Satz 8.7 folgt dann auch $v = 0$ und somit $u = 0$. Damit ist auch die Eindeutigkeitsaussage gezeigt. $\square$

Bemerkung zur Wohldefiniertheit. Wir haben für gegebene Abschneidefunktionen $\rho_{\pm}$ Lösungen $u = v + w$ konstruiert. Um die Wohldefiniertheit der Ausstrahlungsbedingung zu untersuchen, betrachten wir die Folgen einer Wahl anderer zulässiger Abschneidefunktionen, die wir mit $\tilde{\rho}_{\pm}$ bezeichnen.

Wir bezeichnen die entsprechenden Lösungen mit $u = v + w$ und $\tilde{u} = \tilde{v} + \tilde{w}$. Dann schreiben wir

$$u - \tilde{u} = v - \tilde{v} + \sum_{\ell} \tilde{c}_{\ell} (\rho_{\ell} - \tilde{\rho}_{\ell}) \phi_{\ell} + \sum_{\ell} (c_{\ell} - \tilde{c}_{\ell}) \rho_{\ell} \phi_{\ell}.$$

Wir beobachten, dass $v - \tilde{v} + \sum_{\ell} \tilde{c}_{\ell} (\rho_{\ell} - \tilde{\rho}_{\ell}) \phi_{\ell}$ in $H^1(\Omega)$ liegt. Daher erfüllt $u - \tilde{u}$ nicht nur die homogene Helmholtzgleichung, sondern auch eine Ausstrahlungsbedingung mit Koeffizienten $(c_{\ell} - \tilde{c}_{\ell})_{\ell}$. Das Eindeutigkeitsresultat aus Satz 8.11 impliziert $u = \tilde{u}$ und $c_{\ell} = \tilde{c}_{\ell}$ für alle ℓ . In diesem Sinne hat die Wahl der Abschneidefunktionen keinen Einfluss auf die Lösung.

Bemerkung zur Regularität von a . Die Voraussetzung $a \in C^1(\bar{\Omega})$ ist nicht notwendig, um die Aussage des Satzes zu erhalten, $a \in L^{\infty}(\Omega)$ reicht. Um den Beweis unter dieser schwächeren Voraussetzung zu führen, muss man feststellen, dass die Produktregel (8.37) im Distributionssinn auch für $a \in L^{\infty}(\Omega)$ gilt.

Etwas aufwendiger ist eine spätere Stelle im Beweis: Die neue rechte Seite ist $g = f + (\nabla \cdot a \nabla + \lambda b)w$ und damit nur von der Klasse $L^2_*(\Omega) + H^{-1}(\Omega)$, wobei der zweite Anteil einen kompakten Träger hat. Für solche rechte Seiten lässt sich Satz 8.7 ebenfalls beweisen; eine Anwendung des entsprechend verallgemeinerten Satzes 8.7 liefert dann den obigen Existenzsatz 8.11 für $a \in L^{\infty}(\Omega)$.

Übungen

Übung 8.1 (Familien von Operatorgleichungen). *Satz 8.2 liefert für eine Operatorfamilie L_{α} und für rechte Seiten y_{α} eine Lösungsfamilie u_{α} . Zudem wird eine Abschätzung für Lösungen gezeigt, siehe (8.4). Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass im Allgemeinen (in der Situation von Satz 8.2) keine Abschätzung der Form*

$$\sup_{\alpha \in I} \|u_{\alpha}\|_X \leq C \sup_{\alpha \in I} \|y_{\alpha}\|_X \quad (8.38)$$

gelten kann.

Übung 8.2 (Eindimensionale Gleichung mit konstanten Koeffizienten). *Wir betrachten die Helmholtzgleichung auf $\Omega = \mathbb{R}$ mit $\lambda \in (0, \infty)$ für $a \equiv 1$ und $b \equiv 1$. Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{A}$ der kritischen Werte von α und die zugehörigen Räume Y^{α} . Überprüfen Sie die Orthogonalität bezüglich der Sesquilinearform E , die Nichtdegeneriertheit von E , und die Vorzeichen der Energieflüsse.*

Übung 8.3 (Zweidimensionaler Kern). *Wir betrachten den zweidimensionalen Fall $d = 2$, den Querschnitt $\Sigma = (0, \pi)$ und den Koeffizienten $b \equiv 1$. Wir wählen hier ein spezielles $\alpha \in I = [-\pi, \pi]$, um einen Eigenraum mit Dimension größer als 1 zu finden. Zwei α -quasiperiodische Lösungen sind*

$$\phi_1(x) := e^{i\alpha x_1} \sin(2x_2) \quad \text{und} \quad \phi_2(x) := e^{i(\alpha-2\pi)x_1} \sin x_2.$$

Die beiden Funktionen erfüllen $-\Delta\phi_1 = (\alpha^2 + 4)\phi_1$ und $-\Delta\phi_2 = ((\alpha - 2\pi)^2 + 1)\phi_2$. Zeigen Sie, dass man α so wählen kann, dass die beiden Faktoren übereinstimmen. Wenn man λ entsprechend wählt, hat man also einen (mindestens) zweidimensionalen Raum Y_j .

Übung 8.4 (Orthogonalität und Flüsse). Wir setzen Übung 8.3 fort: Weisen Sie für ϕ_1 und ϕ_2 die Orthogonalität in $L^2(W)$ und bezüglich E nach. Berechnen Sie die Flüsse; welche Welle ist rechtslaufend und welche ist linkslaufend?

Literaturverzeichnis

- [1] H. W. Alt. *Linear functional analysis*. Universitext. Springer-Verlag London, Ltd., London, german edition, 2016. An application-oriented introduction.
- [2] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, volume 93 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1998.
- [3] S. Fliss and P. Joly. Solutions of the time-harmonic wave equation in periodic waveguides: asymptotic behaviour and radiation condition. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 219(1):349–386, 2016.
- [4] A. Fărăgău, J. Barbosa, A. Metrikine, and K. van Dalen. Dynamic amplification in a periodic structure with a transition zone subject to a moving load: Three different phenomena. *Mathematics and Mechanics of Solids*, 05 2022.
- [5] A. Kirsch and A. Lechleiter. The limiting absorption principle and a radiation condition for the scattering by a periodic layer. *SIAM J. Math. Anal.*, 50(3):2536–2565, 2018.
- [6] A. Kirsch and A. Lechleiter. A radiation condition arising from the limiting absorption principle for a closed full- or half-waveguide problem. *Math. Methods Appl. Sci.*, 41(10):3955–3975, 2018.
- [7] A. Kirsch and B. Schweizer. Periodic waveguides revisited: Radiation conditions, limiting absorption principles, and the space of bounded solutions. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 48(2):2267–2293, 2025.
- [8] A. Lamacz and B. Schweizer. Effective acoustic properties of a meta-material consisting of small Helmholtz resonators. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 10(4):815–835, 2017.
- [9] F. Rellich. Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 53:57–65, 1943.
- [10] B. Schweizer. *Partielle Differentialgleichungen*. Springer-Verlag, Berlin, 2013. Eine anwendungsorientierte Einführung. [An application-oriented introduction].
- [11] B. Schweizer. The low-frequency spectrum of small Helmholtz resonators. *Proc. A.*, 471(2174):20140339, 18, 2015.
- [12] B. Schweizer. Resonance meets homogenization: Construction of meta-materials with astonishing properties. *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.*, 119(1):31–51, 2017.
- [13] B. Schweizer. Inhomogeneous Helmholtz equations in wave guides—existence and uniqueness results with energy methods. *European J. Appl. Math.*, 34(2):211–237, 2023.

Index

- Bessel'sche Differentialgleichung, 21
- Eigenwert, 12
- Eindeutige Fortsetzbarkeit, 32
- Energiefluss Helmholtz, 33
- Fernfeld, 38
- Floquet-Bloch Rücktransformation, 43
- Floquet-Bloch Transformation, 42, 46
- Fredholm-Alternative, 11
- Fredholm-Operator, 9
- Helmholtz-Gleichung, 5
- Inverses Problem, 38
- Kato, 10
- Kugelfunktionen, 20
- Kugelkoordinaten, 19
- Laplace-Beltrami-Operator, 19
- Laplaceoperator
 - Kugelkoordinaten, 19
- Lipschitz-Abhängigkeit von Eigenwerten,
51
- Operator
 - Fredholm-Operator, 9
 - selbstadjungierter Operator, 12
- Projektion
 - orthogonale, 18
- Quasiperiodische Funktionen, 45
- Rellich, 27
- Satz
 - Kato, 10
 - Rellich, 27
 - Spektralsatz, 13
- Schrödinger-Operator, 21
- Sommerfeld-Strahlungsbedingung, 31
- Spektralsatz, 13
- Spektrum, 12, 54, 55
- Superkritischer Abfall bei Helmholtz, 26
- Unique continuation, 32
- Wellenleiter, 48