

# **Evolutionsgleichungen**

Lineare und Semilineare Halbgruppentheorie

**Ben Schweizer**

Vorlesung im Sommer 2023

an der TU Dortmund

Version vom 12.7.2023

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Beispiele</b>	<b>5</b>
1.1	Grundbegriffe . . . . .	5
1.2	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	12
<b>I</b>	<b>Lineare Halbgruppentheorie</b>	<b>16</b>
<b>2</b>	<b>Operatoren und Halbgruppen</b>	<b>17</b>
2.1	Spektrum, Resolvente, Halbgruppen . . . . .	17
2.2	Erzeuger der Halbgruppe . . . . .	22
2.3	Resolventen und Halbgruppen . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Stetige und kontraktive Halbgruppen</b>	<b>30</b>
3.1	Hille-Yosida Theorem . . . . .	30
3.2	Kontraktive Halbgruppen in Anwendungen . . . . .	33
3.3	Erzeuger von stark stetigen Halbgruppen . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Analytische Halbgruppen</b>	<b>44</b>
4.1	Sektorielle Operatoren und analytische Halbgruppen . . . . .	44
4.2	Invariante Unterräume, Normale Operatoren . . . . .	51
4.3	Gebrochene Potenzen von sektoriellen Operatoren . . . . .	55
4.4	Regularisierung und Interpolation . . . . .	60
<b>II</b>	<b>Nichtlineare Halbgruppentheorie</b>	<b>63</b>
<b>5</b>	<b>Semilineare Gleichungen</b>	<b>64</b>
5.1	Die inhomogene Gleichung . . . . .	64
5.2	Existenzsatz für semilineare Gleichungen . . . . .	68
5.3	Verhalten für große Zeiten . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Regularitätstheorie</b>	<b>75</b>
6.1	Stetige und differenzierbare Abhängigkeit . . . . .	75
6.2	Verbesserte Regularität . . . . .	79

<b>7</b>	<b>Anwendungen und Ausblick</b>	<b>82</b>
7.1	Semilineare Gleichungen in Anwendungen . . . . .	82
7.2	Die Umgebung einer stationären Lösung . . . . .	88
7.3	Quasilineare Gleichungen . . . . .	93



# Kapitel 1

## Einleitung und Beispiele

### 1.1 Grundbegriffe

**Ziel der Vorlesung:** Für gegebenes  $X$  und gegebenes  $A$  wollen wir Gleichungen der folgenden Form lösen:

$$\partial_t u = Au, \quad u(0) = u_0. \quad (1.1)$$

Dabei ist hier  $X$  immer ein Banachraum. Gesucht wird eine Abbildung  $u : [0, \infty) \rightarrow X$ , die wir als Zeitevolution einer Größe  $u$  interpretieren,  $[0, \infty) \ni t \mapsto u(t) \in X$ . Die erste Gleichung ist dann zu verstehen als  $\partial_t u(t) = Au(t)$  für jedes  $t \in (0, \infty)$ . Was für ein Objekt  $A$  ist, dafür gibt es verschiedene Alternativen; es ist ein wesentliches Ziel dieser Vorlesung, dafür ein gutes Verständnis zu entwickeln.

Hier sind die interessantesten Möglichkeiten für  $X$  und  $A$ :

1.  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , also  $A : X \rightarrow X$  linear
2.  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $A : X \rightarrow X$  Lipschitz, nichtlinear
3.  $X$  ein Banachraum,  $A \in \mathcal{L}(X, X)$
4.  $X$  ein Banachraum,  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  linear  
(Name:  $A : X \rightarrow X$  ist ein unbeschränkter linearer Operator)
5.  $X$  ein Banachraum,  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  nichtlinear
6.  $X$  ein Banachraum,  $A \subset X \times X$  nichtlinear und mehrwertig

Dabei sind Fälle 1 und 2 aus der Analysis 2 bekannt. Im Fall 2 liefert der Satz von Picard-Lindelöf eine Lösung  $u$ . Der erste Fall ist ein Spezialfall davon, Lösungen können gut charakterisiert werden, man schreibt Lösungen gerne als  $u(t) = e^{At}u_0$ .

Wir werden Fall 3 hier betrachten, wir sehen dies als Vorbereitung für die allgemeinen Ergebnisse. Mit Fall 4 wird die Sache spannend, dies ist der Kern dieser Vorlesung. Zu 5 und 6 werden wir hier nur Spezialfälle behandeln.

**Fundamentales Beispiel:** Auf  $\mathbb{R}^n$  soll die *Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t u = \Delta u := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2 u, \quad u(t=0, \cdot) = u_0 \quad (1.2)$$

gelöst werden. Dies ist ein Beispiel für einen Operator wie in 4. Man wählt  $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ , man wählt weiterhin  $A = \Delta : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ , womit der unbeschränkte Operator mit  $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$  gemeint ist. Wir werden Lösungsmethoden für (1.2) in Abschnitt 1.2 kennenlernen. Nach dem ersten Teil dieser Vorlesung werden wir zur Lösbarkeit nur sagen:

$\Delta$  ist selbstadjungiert und hat insbesondere ein reelles Spektrum.  
 $\Delta$  ist dissipativ und erfüllt insbesondere die Resolventenabschätzung.  
 Daher ist  $\Delta$  sektoriell und (1.2) erzeugt eine analytische Halbgruppe.

Die Methoden werden so allgemein sein, dass neben (1.2) auch viele andere Gleichungen aus Anwendungen behandelt sind (siehe Abschnitt 1.1.1).

**Halbgruppe:** In Anwendungen beschreibt  $u(t)$  den *Zustand* des Systems im *Zustandsraum*  $X$  zur *Zeit*  $t$ . Die Differentialgleichung (1.1) beschreibt die *Evolution* des Systems: Zu einem *Anfangswert*  $u_0$  können wir den Zustand zur Zeit  $t$  angeben. Falls (1.1) eine eindeutige Lösung hat, so definiert uns diese eine *Zeit- $t$ -Abbildung*  $S(t)$ ,

$$S(t) : X \ni u_0 \mapsto u(t) \in X. \quad (1.3)$$

Die Familie von Abbildungen  $S(t)$  hat die Eigenschaften  $S(t) \circ S(s) = S(t+s)$  und  $S(0) = \text{id}$ . Wir abstrahieren dies zum Konzept der *Halbgruppe*.

**Definition der Halbgruppe.** Eine Halbgruppe auf einem Banachraum  $X$  ist eine Familie  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$  für alle  $t \in [0, \infty)$  mit der Halbgruppeneigenschaft

$$\begin{aligned} S(t) \circ S(s) &= S(t+s) \quad \forall t, s \geq 0, \\ S(0) &= \text{id}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Mit diesen Begriffen lauten unsere **zentralen Fragen**:

**Q1** Definiert Gleichung (1.1) eine Halbgruppe auf  $X$ ?

**Q2** Wird eine gegebene Halbgruppe  $S$  durch eine geeignete Gleichung (1.1) erzeugt?

Kandidat für den Operator  $A$  ist der *Erzeuger* der Halbgruppe, den wir wie folgt definieren.

**Der Erzeuger.** *Der Erzeuger einer Halbgruppe  $S$  auf  $X$  ist*

$$A : u_0 \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h}, \quad (1.5)$$

definiert auf  $D(A) \subset X$ ,

$$D(A) := \left\{ u_0 \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} \text{ existiert} \right\}. \quad (1.6)$$

Wir sehen auch an dieser Definition, dass wir uns nicht auf *Abbildungen*  $A : X \rightarrow X$  beschränken sollten. Vielmehr sollten wir zulassen, dass  $A$  nicht auf dem ganzen Raum  $X$  definiert ist, sondern nur auf einer Teilmenge  $D(A) \subset X$ . Wenn wir für einen solchen Operator Gleichung (1.1) lösen wollen, dann fordern wir für die Lösung  $u(t) \in D(A)$  für alle  $t > 0$ .

### 1.1.1 Beispiele

**Beispiel 1.1** (Exponentialfunktion). *Für  $X = \mathbb{R}^n$  und eine Matrix  $A$  betrachten wir die Gleichung*

$$\partial_t u = A \cdot u, \quad u(0) = u_0. \quad (1.7)$$

Im Falle  $n = 1$  und  $A = a$  ist die Lösung  $u(t) = u_0 e^{at}$ . Die Halbgruppe  $S(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch  $S(t) = e^{at}$ , also die Multiplikation  $S(t) : u_0 \mapsto e^{at} u_0$ .

Für allgemeines  $n$  ist (1.7) auch lösbar (sh. Analysis II). Der Lösungsoperator ist  $S(t) = e^{At}$ . Man kann diesen Operator definieren als  $S(t) : u_0 \mapsto u(t)$ , wobei  $u$  eine Lösung der Gleichung ist. Eine andere Möglichkeit besteht darin,  $e^{At}$  durch die Reihe der Exponentialfunktion zu definieren. Man kann elementar nachweisen, dass die Reihe auch die Lösung der Gleichung liefert.

Wir fragen nach dem Erzeuger der Halbgruppe. Die Abbildung  $t \mapsto e^{At}$  ist differenzierbar und wir finden wegen  $\partial_t e^{At} = A e^{At}$  in  $t = 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} = (\partial_t e^{At} u_0)_{t=0} = (A e^{At} u_0)_{t=0} = A u_0.$$

Also ist die Matrix  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Erzeuger der Halbgruppe  $e^{At}$ .

**Beispiel 1.2** (Nichtlinear endlichdimensional). *Eine gewöhnliche Differentialgleichung mit global Lipschitz-stetigem  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert eine Halbgruppe  $S(t)$  auf  $X = \mathbb{R}^n$ . Wir definieren  $S(t)u_0 = u(t)$ , wobei  $u$  die Lösung ist von*

$$\partial_t u = f(u), \quad u(0) = u_0. \quad (1.8)$$

Die Halbgruppe ist nichtlinear, denn im Allgemeinen gilt  $S(t)(u_0 + u_1) \neq S(t)u_0 + S(t)u_1$ . Der nichtlineare Erzeuger ist  $f : X \rightarrow X$ .

**Beispiel 1.3** (Verschiebungs-Dynamik). *Wir betrachten  $X = L^p(\mathbb{R})$ , also messbare Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  von der Klasse  $L^p(\mathbb{R})$ . Auf diesem Raum definieren wir den Rechtsshift  $S(t)$  durch*

$$(S(t)u_0)(x) = u_0(x - t).$$

Für  $p \in (1, \infty)$  ist der Erzeuger der Halbgruppe der unbeschränkte Operator  $A = -\partial_x : L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow L^p(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $D(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Dies folgt aus der Tatsache, dass für  $u \in W^{1,p}$  gilt:

$$L^p - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)u - u}{h} = L^p - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\cdot - h) - u(\cdot)}{h} = -\partial_x u(\cdot).$$

Wir zeigen diese Aussage über Sobolevräume hier nicht. Dennoch wollen wir den distributionellen Limes berechnen. Mit einer Testfunktion  $\varphi$  gilt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u(\cdot - h) - u(\cdot)}{h}, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x - h) - u(x)}{h} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x) \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{h} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}} u(x) \partial_x \varphi(x) dx = \langle -\partial_x u, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

der distributionelle Limes ist also tatsächlich  $-\partial_x u$ .

Umgekehrt gilt  $-\partial_x u \in L^p$  nur für Funktionen  $u \in W^{1,p}$ . Daher existiert der Limes höchstens in diesem Fall.

**Zwei Stetigkeitsbegriffe.** Die Halbgruppe  $S(\cdot)$  heißt *stark stetig*, falls

$$[0, \infty) \ni t \mapsto S(t)u_0 \in X \quad \text{stetig ist für alle } u_0 \in X. \quad (1.9)$$

Die Halbgruppe  $S(\cdot)$  heißt *gleichförmig stetig*, falls für ein stetiges  $\rho : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit  $\rho(0) = 0$  gilt:

$$\|S(t)u - u\|_X \leq \rho(t)\|u\|_X \quad \forall u \in X. \quad (1.10)$$

**Übung 1.1.** Ein weiterer Stetigkeitsbegriff wäre dieser (in dieser Übung sagen wir dazu "gesamtstetig"): Die Abbildung  $[0, \infty) \times X \ni (t, u_0) \mapsto S(t)u_0 \in X$  ist stetig. Zeigen Sie, dass gilt: gleichförmig stetig  $\Rightarrow$  gesamtstetig  $\Rightarrow$  stark stetig. Zeigen Sie mit dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, dass die erste Implikation sogar eine Äquivalenz ist. Übung 1.2 zeigt, dass die zweite Implikation keine Äquivalenz ist.

**Übung 1.2.** Man überlege sich für die Verschiebungsdynamik aus Beispiel 1.3, dass

1. für  $p = \infty$  die Halbgruppe nicht stark stetig ist,
2. für alle  $p$  die Halbgruppe stark stetig, aber nicht gleichförmig stetig ist.

**Beispiel 1.4** (Verschiebungs-Dynamik auf Halbraum). Auf dem Raum  $X = L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ ,  $p > 1$ , definieren wir  $S(t)$  durch

$$(S(t)u_0)(x) = \begin{cases} u_0(x - t) & \text{für } x - t > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Erzeuger der Halbgruppe ist zwar formal wieder  $A = -\partial_x$ , aber diesmal mit anderem Definitionsbereich,

$$A = -\partial_x : X \supset D(A) = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \mid u(0) = 0\} \rightarrow L^p(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}).$$

Beweis: Wir betrachten  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$  mit  $u(0) \neq 0$ . Dann ist  $(S(h)u - u)/h$  auf dem Intervall  $(0, h)$  von der Größenordnung  $1/h$ . Eine solche Funktionenfolge ist unbeschränkt in  $L^p$  für  $p > 1$ . Der Limes existiert also nicht.

Umgekehrt ist für  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+)$  mit  $u(0) = 0$  die triviale Fortsetzung in  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ . Also existiert für solche  $u$  der Limes.

Wir sehen an Beispiel 1.4, dass man mit der Interpretation des Definitionsbereiches  $D(A)$  sehr vorsichtig sein muss:

- $D(A)$  ist nicht unbedingt die Menge  $\{x \in X \mid Ax \text{ kann definiert werden}\}$ . Vielmehr kann  $D(A)$  weitere zentrale Information kodieren, etwa Randwerte
- Die Anfangswerte der Dynamik müssen nicht notwendigerweise aus  $D(A)$  sein. Sogar  $S(t)u_0$  muss nicht in  $D(A)$  sein.

Als nächstes betrachten wir eine Variante der Verschiebungs-Dynamik.

**Beispiel 1.5** (Transport zu variabler Geschwindigkeit). Sei  $b \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  mit  $b(x) \in [b_{\min}, b_{\max}] \subset (0, \infty)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ . Wir betrachten die Gleichung

$$\partial_t u(x, t) = -b(x)\partial_x u(x, t).$$

Die Halbgruppe zu dieser Gleichung kann wie folgt explizit angegeben werden. Wir lösen für jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^n$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\partial_t \xi(x, t) = b(\xi(x, t)), \quad \xi(x, 0) = x.$$

Die Abbildung  $\xi_t : x \mapsto \xi(x, t)$  ist strikt monoton und daher invertierbar. Die Halbgruppe ist dann implizit gegeben durch

$$(S(t)u_0)(\xi(x, t)) = u_0(x),$$

beziehungsweise durch die explizite Formel

$$(S(t)u_0)(y) = u_0(\xi_t^{-1}(y)).$$

Der Nachweis erfolgt durch Differenzieren der impliziten Formel mit der Abkürzung  $u(x, t) = (S(t)u_0)(x)$ .

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t u_0(x) = \partial_t [(S(t)u_0)(\xi(x, t))] = (\partial_t S(t)u_0)(\xi(x, t)) \\ &\quad + \partial_x (S(t)u_0)(\xi(x, t)) \cdot \partial_t \xi(x, t) \\ &= \partial_t u(\xi, t) + b(\xi) \cdot \partial_x u(\xi, t). \end{aligned}$$

**Übung 1.3** (Methode der Charakteristiken). Man überlege sich dasselbe Verfahren für Transport im  $\mathbb{R}^n$ , um für  $b \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  die Gleichung

$$\partial_t u(x, t) = -b(x) \cdot \nabla_x u(x, t).$$

zu lösen.

**Übung 1.4** (Delay-Differentialgleichung). Für  $g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten wir Gleichungen vom Typ

$$\partial_t u(t) = g(u(t)) + h(u(t-1)).$$

Schreiben Sie dieses Problem als Evolutionsgleichung. Anfangswerte sind für  $u$  auf dem Intervall  $[-1, 0]$  vorgegeben.

Lösungsidee. Wir können wie folgt vorgehen: Wir setzen  $X := C([-1, 0])$  und betrachten den Operator

$$\begin{aligned} A : X &\rightarrow X, \quad f \mapsto f', \\ D(A) &:= \{f \in C^1([-1, 0]) \mid f'(0) = g(f(0)) + h(f(-1))\}. \end{aligned}$$

In diesen Räumen ist obige Gleichung äquivalent zu

$$\partial_t U = AU, \quad U(0) = u|_{[-1, 0]} \in X. \quad (1.11)$$

**Beispiel 1.6** (Unendlichdimensionale Exponentialfunktion). Für  $X = l^2(\mathbb{N})$  und  $u_0 = (u_{0,k})_k$  definieren wir  $S(t)u_0 = u(t) = (u_k(t))_k$  als Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t u_k(t) &= -k^2 u_k(t), \\ u_k(0) &= u_{0,k} \end{aligned} \quad (1.12)$$

In diesem Beispiel können wir durch die Entkopplung der Komponenten (Problem ist in Diagonalgestalt) explizit lösen.

$$u_k(t) = e^{-k^2 t} u_{0,k}.$$

Wir werden sehen, dass wir mit diesem Beispiel eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung gefunden haben.

Eine Verallgemeinerung kann wie folgt definiert werden.

**Beispiel 1.7** (Multiplikations-Halbgruppe). Wir betrachten einen Raum  $X = L^2(\Sigma; \mu)$  komplexwertiger Funktionen. Hierbei sei  $(\Sigma, \mu)$  ein Maßraum, ein Beispiel wäre  $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$  und  $\mu$  ein Borel-Maß auf  $\Sigma$ . Weiterhin sei eine messbare Funktion  $q : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$  gegeben, für die  $\operatorname{Re}(q)$  beschränkt ist. Dann können wir den Multiplikationsoperator

$$M_q : X \ni u \mapsto q \cdot u$$

mit Definitionsbereich  $D(M_q) = \{u \in X \mid q \cdot u \in X\}$  betrachten. Ausgeschrieben lautet die Definition: Eine Funktion  $\Sigma \ni \sigma \mapsto u(\sigma) \in \mathbb{C}$  wird abgebildet auf die Funktion  $\Sigma \ni \sigma \mapsto q(\sigma) \cdot u(\sigma) \in \mathbb{C}$ . Die von  $M_q$  erzeugte Halbgruppe ist

$$S(t) : X \ni u_0 \mapsto e^{tq} u_0 \in X.$$

Auf der rechten Seite steht die Funktion  $\Sigma \ni \sigma \mapsto e^{tq(\sigma)} u_0(\sigma) \in \mathbb{C}$ .

Wir erkennen Beispiel 1.6 wieder, wenn wir  $\Sigma = \mathbb{R}$  setzen und  $q(k) = -k^2$ . Mit  $\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k$  gilt  $X = L^2(\Sigma, \mu) = l^2(\mathbb{N})$ .

Ein allgemeiner Spektralsatz für unbeschränkte Operatoren betrachtet die Situation (Reed and Simon, Functional Analysis, Theorem VIII.4):

$X$  Hilbertraum,  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  selbstadjungiert mit  $D(A)$  dicht.

Der Spektralsatz besagt: Es gibt es einen Maßraum  $(\Sigma, \mu)$  und einen isometrischen (sogar unitären) Isomorphismus  $X \cong L^2(\Sigma; \mu)$  und eine Funktion  $q : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass für die Darstellung im Raum  $L^2(\Sigma; \mu)$  gilt: Der Operator  $A$  ist ein Multiplikationsoperator,  $A \cong M_q$ .

### 1.1.2 Partielle Differentialgleichungen

Einige wichtige lineare partielle Differentialgleichungen der mathematischen Physik sind die folgenden (wir geben hier Anfangs- und Randbedingungen nicht mit an).

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{Wärmeleitungsgleichung} \quad (1.13)$$

$$\partial_t u + b \cdot \partial_x u = 0 \quad \text{einfache Transportgleichung} \quad (1.14)$$

$$\partial_t u + b \cdot \nabla u - \Delta u = 0 \quad \text{Wärmeleitung mit Transport} \quad (1.15)$$

$$\partial_t^2 u - \Delta u = 0 \quad \text{Wellengleichung} \quad (1.16)$$

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u = 0 \quad \text{Stabgleichung} \quad (1.17)$$

$$i\partial_t u + \Delta u - V(\cdot)u = 0 \quad \text{Schrödingergleichung} \quad (1.18)$$

Wir geben nun zwei wichtige nichtlineare Beispiele an. Gemeinsam ist ihnen, dass die Nichtlinearität *nicht von der höchsten Ordnung* ist.

$$\partial_t u - \Delta u - f(t, u) = 0 \quad \text{Reaktions-Diffusions-Gl.} \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v - \Delta v + \nabla p &= 0 \\ \operatorname{div}(v) &= 0 \end{aligned} \quad \text{Navier-Stokes-Gleichung} \quad (1.20)$$

In der nächsten Gleichung kommen die höchsten Ableitungen nichtlinear vor.

$$\partial_t u - \sum_{ij} a_{ij}(u) \partial_{ij} u = 0 \quad \text{Nichtlineare Wärmeleitung} \quad (1.21)$$

Die Vielfalt der Gleichungen ist schier grenzenlos. Unser Ziel muss es daher sein, eine möglichst allgemeine Theorie zu entwickeln und geeignete Kategorien für Gleichungen zu finden.

*Unser ehrgeiziges Ziel ist es, Methoden zu entwickeln, die eine große Klasse von Gleichungen abdecken und insbesondere lokale Lösungen für alle oben genannten Gleichungen liefern.*

## 1.2 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen an drei elementare Methoden erinnern, mit denen sich die Wärmeleitungsgleichung lösen lässt. Jede der Methoden wird in einer verallgemeinerten Form in der Halbgruppentheorie verwendet werden.

### 1.2.1 Entwicklung in Eigenfunktionen

Zunächst lösen wir die eindimensionale Gleichung

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t), \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0, \quad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot)$$

für  $u_0 \in L^2((0, \pi), \mathbb{R})$ . Wir entwickeln  $u_0$  in eine Fourier-Reihe,

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_{0,k} \sin(kx).$$

(Formal wird die ungerade Fortsetzung von  $u_0$  in sin und cos entwickelt, und wegen der Symmetrie tauchen keine cos-Terme auf.) Wir entwickeln nun auch die Lösung  $u(\cdot, t)$  in eine Fourierreihe,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin(kx). \tag{1.22}$$

Die Funktion  $u$  ist Lösung der Gleichung, falls für alle  $k$

$$\begin{aligned} \partial_t u_k(t) \sin(kx) &= u_k(t) \Delta \sin(kx) = -u_k(t) k^2 \sin(kx), \\ u_k(0) &= u_{0,k}. \end{aligned}$$

Die Lösungen  $u_k(t)$  von  $\partial_t u_k = -k^2 u_k$  sind insbesondere exponentiell fallend für  $t > 0$  und  $k \rightarrow \infty$ . Dies sichert die Konvergenz der Reihen.

Die Randbedingung  $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$  wird ebenfalls eingehalten: Die Reihe (1.22) konvergiert gleichmäßig. Insbesondere stimmen die Randwerte von  $u$  mit den formalen Randwerten  $\sum 0 = 0$  überein.

Wir haben also in Beispiel 1.6 die Wärmeleitungsgleichung auf einem Intervall gelöst.

**Übung 1.5.** *Man überlege sich, was passiert, wenn wir*

- a) *im Ansatz  $u_0$  und  $u(\cdot, t)$  in cos entwickeln; welche Gleichung lösen wir?*
- b) *die Dirichlet-Lösung in cos entwickeln. Kommentar hierzu: Die symmetrische Fortsetzung der Dirichlet-Lösung lässt sich in Sinus und Cosinus entwickeln, wegen der (geraden) Symmetrie wird in der Entwicklung nur cos verwendet. Eine Entwicklung ist also möglich, sie passt aber schlecht zu den Randbedingungen ...*

Dieselbe Methode kann auch auf einem beliebigen Gebiet angewendet werden. Für ein glattes beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  werden wir die Gleichung

$$\partial_t u(x, t) = \Delta u(x, t), \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

für  $u_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R})$  lösen. Mit der Familie der Eigenfunktionen  $v_k \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R})$  des Laplace-Operators

$$\Delta v_k = -\lambda_k v_k$$

können wir wieder entwickeln,

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) v_k(x). \quad (1.23)$$

Als  $u_k$  wählen wir die Lösungen von  $\partial_t u_k = -\lambda_k u_k$ ,  $u_k(0) = u_{0,k}$  und finden eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. Wieder haben wir den Erzeuger  $\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  diagonalisiert.

Wir werden diesem Verfahren (Zerlegung in Eigenfunktionen) in der Definition einer analytischen Halbgruppe (Definition 4.5 und Satz 4.6) wieder begegnen.

## 1.2.2 Galerkin-Methode

In Abschnitt 1.2.1 haben wir für spezielle Ansatzfunktionen  $v_k$  folgende Idee realisiert: Im Hilbertraum  $X = L^2(\Omega)$  wählen wir eine Basis  $(v_k)_k$  von  $X$  mit  $v_k \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$  und betrachten die endlichdimensionalen Unterräume  $X_n$  aufgespannt durch  $(v_1, \dots, v_n)$ . Die  $L^2$ -orthogonale Projektion auf  $X_n$  bezeichnen wir mit  $P_n$ . Wir setzen folgendes für die Basis voraus:

$$P_n \varphi \rightarrow \varphi \quad \text{in } H^1 \text{ für } n \rightarrow \infty, \text{ für alle } \varphi \in H_0^1(\Omega). \quad (1.24)$$

Wir lösen die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\partial_t u(t) = P_n \Delta u(t), \quad u(0) = P_n u_0.$$

*Warnung:* Dies ist nicht die übliche Diskretisierung, normalerweise bildet man nicht die Verkettung  $P_n \circ \Delta$ .

Für diese gewöhnlichen DGL's mit Lipschitz-stetiger rechter Seite finden wir Lösungen  $u = u_n \in C^1(\mathbb{R}_+, X_n)$ .

*A priori Abschätzungen.* Multiplikation der Gleichung mit  $u_n$  und Integration über  $\Omega$  liefert

$$\partial_t \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_n(x, t)|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla u_n(x, t)|^2 dx = 0.$$

Hierbei haben wir die Orthogonalität von  $P_n$  ausgenutzt. Eine Integration über das Zeitintervall  $[0, T]$  ergibt

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_n(x, T)|^2 dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_n(x, T)|^2 dx dt = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |P_n u_0(x)|^2 dx.$$

Die rechte Seite ist für alle  $n$  beschränkt durch  $\frac{1}{2} \|u_0\|_{L^2}^2$ . Dies bedeutet, dass die Funktionen  $u_n$  gleichmäßig beschränkt sind in  $L^2((0, T), H^1(\Omega))$ . Wir können dann eine Teilfolge auswählen, die gegen ein  $u$  in demselben Raum konvergiert.

*Gleichungen für  $u$ .* Wenn wir die  $u_n$ -Gleichung mit einer Testfunktion  $\varphi$  testen, so finden wir die schwache Form der Gleichung

$$-\int_0^T \int_{\Omega} u_n \cdot \partial_t \varphi + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla (P_n \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega \times (0, T), \mathbb{R}).$$

Wegen  $P_n \varphi \rightarrow \varphi$  in  $C^0((0, T), H_0^1(\Omega))$  (nach Voraussetzung (1.24)) und  $u_n \rightharpoonup u$  in  $L^2((0, T), H^1(\Omega))$  können wir in beiden Integralen zum Limes übergehen. Wir finden

$$-\int_0^T \int_{\Omega} u \cdot \partial_t \varphi + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega \times (0, T), \mathbb{R}),$$

also ist die schwache Form der Gleichung erfüllt.

Mit etwas zusätzlichem Aufwand kann gezeigt werden, dass  $u \in C^0([0, T], L^2(\Omega))$  und dass auch die Anfangswerte angenommen werden.

Ein sehr ähnliches Verfahren wird zum Beispiel in Finite-Elemente-Verfahren verwendet. Dort werden als Ansatzfunktionen die  $u_n$  stückweise Polynome über einer Triangulierung von  $\Omega$  gewählt. Man spricht daher bei dem Verfahren auch von einer *Diskretisierung im Raum*. Allerdings gibt es einen technischen Unterschied: In unserem Beispiel haben wir  $P_n \Delta u$  gebildet, was nur geht, wenn zweite Ableitungen von  $u$  in  $L^2$  existieren. Das will man in numerischen Verfahren nicht und arbeitet daher immer in der schwachen Formulierung (und *nicht* mit  $P_n \Delta u$ ).

In der Halbgruppentheorie werden wir im Hille-Yosida Theorem 3.1 etwas Ähnliches tun: Wir approximieren den Operator  $A$  durch beschränkte Operatoren  $A_n$ . Der Limes der zugehörigen Halbgruppen  $S_n$  ist dann die Halbgruppe  $S$  zu  $A$ .

### 1.2.3 Rothe-Methode

Im Gegensatz zum vorigen Verfahren ist die Rothe-Methode eine Diskretisierung der Zeit. Das einfachste Verfahren ist folgendes. Wir wollen  $\partial_t u = \Delta u$  mit  $u(0) = u_0$  auf  $\Omega$  und für ein Zeitintervall  $[0, T]$  lösen. Wir wählen ein kleines  $\Delta t$  und unterteilen  $[0, T]$  in Intervalle  $[t_k, t_{k+1}]$  mit  $t_k = k \cdot \Delta t$  und  $t_N = T$ . Die Lösung  $u$  soll in den Zeitpunkten  $t_k$  approximiert werden durch  $u(t_k) \approx u_k \in X = L^2(\Omega)$ . Dafür definieren wir die Familie  $u_k$  durch die Vorschrift

$$\frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t} = \Delta u_{k+1}.$$

*A priori Abschätzungen.* Wir testen die Vorschrift mit  $u_{k+1}$  und erhalten

$$\frac{1}{\Delta t} (\|u_{k+1}\|^2 - \langle u_k, u_{k+1} \rangle) = -\|\nabla u_{k+1}\|^2.$$

Wir summieren über alle  $k$  mit Gewicht  $\Delta t$ , und verwenden  $\langle u_k, u_{k+1} \rangle \leq (\|u_{k+1}\|^2 + \|u_k\|^2)/2$ .

$$\begin{aligned} -\Delta t \sum_{k=1}^N \|\nabla u_k\|^2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \|u_{k+1}\|^2 - \langle u_k, u_{k+1} \rangle \\ &\geq \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2} (\|u_{k+1}\|^2 - \|u_k\|^2) = \frac{1}{2} \|u_N\|^2 - \frac{1}{2} \|u_0\|^2. \end{aligned}$$

Zu den Werten  $(u_k)_{k=1,\dots,n}$  kann man die lineare Interpolation definieren. Man erhält so eine Funktion  $u^N : [0, T] \rightarrow X$ ,

$$u^N(t) = \mu u_k + (1 - \mu)u_{k+1} \quad \text{für } t = \mu t_k + (1 - \mu)t_{k+1}, \mu \in [0, 1].$$

Für die Funktionen  $u^N$  haben wir Abschätzungen in den Räumen  $L^2((\Delta t, T), H^1(\Omega))$  gefunden. Ein schwacher Limes der Folge ist wieder eine Lösung der Gleichung.

**Zusammenhang mit der Halbgruppentheorie.** Wir setzen  $\lambda = \frac{1}{\Delta t}$  und schreiben die  $u_{k+1}$ -Gleichung als

$$(\lambda - \Delta)u_{k+1} = \lambda u_k.$$

Falls wir nachweisen können, dass

$$\|(\lambda - \Delta)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X, X)} \leq \frac{1}{\lambda} \tag{1.25}$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  gilt, so folgt  $\|u_k\|_X \leq \|u_0\|_X$  für alle  $k$ , unabhängig von  $\Delta t$  (also von  $N$ ). Die linearen Interpolationen  $u^N$  sind dann eine beschränkte Familie in  $C^0([0, T], X)$  und wir können einen schwach-\* Limes finden.

Tatsächlich gilt Relation (1.25) für den Laplace-Operator. Wir müssen dafür lediglich mit  $u_{k+1}$  testen, wie schon zuvor für die a priori Abschätzung. Das Ergebnis war

$$\|u_{k+1}\|^2 \leq \langle u_k, u_{k+1} \rangle \leq \|u_{k+1}\| \|u_k\|,$$

also  $\|u_{k+1}\| \leq \|u_k\|$ . Dies ist aber genau (1.25).

In der Halbgruppentheorie werden wir sehen, dass unter ganz allgemeinen Umständen gilt: Ein Operator  $A$  (bei uns  $A = \Delta$ ), der (1.25) erfüllt, ist der Erzeuger einer stetigen (sogar einer kontraktiven) Halbgruppe auf  $X$ .

# Teil I

## Lineare Halbgruppentheorie

# Kapitel 2

## Operatoren und Halbgruppen

### 2.1 Spektrum, Resolvente, Halbgruppen

#### 2.1.1 Grundbegriffe für Operatoren

**Definition 2.1** (Linearer Operator). *Ein (unbeschränkter) linearer Operator auf einem Banachraum  $X$  ist gegeben durch einen linearen Unterraum  $D(A) \subset X$  und eine lineare Abbildung  $A : D(A) \rightarrow X$ . Wir schreiben dafür  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ .*

*Meist fordern wir, dass  $A$  abgeschlossen ist, d.h. für alle  $u_k \in D(A)$  mit  $u_k \rightarrow u \in X$  und  $Au_k \rightarrow v \in X$  gilt*

$$u \in D(A) \quad \text{und} \quad Au = v.$$

**Definition 2.2** (Spektrum und Resolvente). *Zu einem abgeschlossenen linearen Operator definieren wir*

- *Spektrum von  $A$  als*

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A : D(A) \rightarrow X \text{ ist nicht bijektiv}\}$$

- *Resolventenmenge  $\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$*
- *Resolvente  $R(\lambda, A) := (\lambda - A)^{-1}$  für  $\lambda \in \rho(A)$ .*

Hinweis: Für nicht abgeschlossene Operatoren definiert man Spektrum und Resolventenmenge anders. Man setzt  $\lambda \in \rho(A)$ , falls  $\lambda - A : D(A) \rightarrow \text{Bild}(\lambda - A)$  eine stetige Inverse hat und  $\text{Bild}(\lambda - A)$  dicht in  $X$  ist. Das Spektrum ist wieder das Komplement der Resolventenmenge. Für abgeschlossene Operatoren stimmen die Definitionen überein. Die nachfolgende Bemerkung zeigt eine der beiden Richtungen.

*Komplexifizierung.* Falls  $X$  ein Banachraum über  $\mathbb{R}$  ist, so muss man schon für die Definition von  $(\mathbb{C}, X) \ni (\lambda, x) \mapsto \lambda u$  den Banachraum komplexifizieren: Sei  $X = X_{\mathbb{R}}$  ein Banachraum über  $\mathbb{R}$ . Wir definieren  $X_{\mathbb{C}} := X_{\mathbb{R}} \times X_{\mathbb{R}}$  mit der zugehörigen Addition und der zugehörigen Norm. Multiplikation mit Skalaren wird definiert durch:  $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}$ ,  $x_{\mathbb{C}} = (x_1, x_2) \in X_{\mathbb{C}}$ ,  $\lambda x_{\mathbb{C}} := (\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2, \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1) \in X_{\mathbb{C}}$ . Operatoren der Form  $\lambda - A$  müssen immer auf der Komplexifizierung des Banachraumes betrachtet werden.

**Bemerkung 2.3.** Für abgeschlossene Operatoren  $A$  ist die Resolvente (für festes  $\lambda \in \mathbb{C}$ ) ein beschränkter Operator.

Dies folgt aus dem Satz über den abgeschlossenen Graphen. Der lineare Operator  $R(\lambda, A) : X \rightarrow X$  hat einen abgeschlossenen Graphen in  $X \times X$ . Dann ist der Operator beschränkt (siehe z.B. [1]).

**Beispiel 2.4** (Spektrum des Laplace-Operators). **Beschränkte Gebiete.** Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und beschränkt kann man betrachten:  $D(A) := H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$  und  $A = \Delta : D(A) \rightarrow X := L^2(\Omega)$ . Der Operator  $A^{-1} : X \rightarrow X$  ist wohldefiniert und sogar kompakt. Der Spektralsatz für kompakte Operatoren liefert eine Familie positiver reeller Zahlen  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ , so dass gilt

$$\sigma(A) = \{-\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}\} .$$

**Ein unbeschränktes Gebiet.** Auf  $\Omega = \mathbb{R}$  betrachten wir  $D(A) := H^2(\Omega)$  und  $A = \Delta : D(A) \rightarrow X := L^2(\Omega)$ . Für positives  $\lambda \in \mathbb{R}$  kann man  $\lambda - A$  invertieren; tatsächlich liefert testen von  $\lambda u - \Delta u = f$  mit  $u$  eine a priori Abschätzung für  $u \in H^1(\mathbb{R})$ , dies ist ein klares Indiz für Invertierbarkeit von  $\lambda - A$ .

Interessant sind negative  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Die Gleichung  $\lambda u - \Delta u = 0$  besitzt eine Lösung, nämlich zum Beispiel  $u(x) = \sin(\sqrt{|\lambda|x})$ . Allerdings ist diese Lösung nicht in  $X = L^2(\Omega)$  (deswegen ist  $\lambda$  auch kein Eigenwert). Man kann abgeschnittene Versionen von  $\sin(\sqrt{|\lambda|x})$  benutzen, um eine Folge  $(u_l)_l$  zu konstruieren, die beweist, dass  $\lambda - A$  nicht invertierbar ist. Damit erhalten wir, dass alle negativen reellen Zahlen im Spektrum  $\sigma(A)$  liegen, es gilt tatsächlich

$$\sigma(A) = \{\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \leq 0\} .$$

Es handelt sich um ein "kontinuierliches" Spektrum.

### Elementare Eigenschaften von Resolventen.

**Lemma 2.5** (Resolventenidentität). Für  $\lambda, \mu \in \rho(A)$

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\lambda, A)R(\mu, A) . \quad (2.1)$$

Insbesondere vertauschen Resolventen,

$$R(\lambda, A)R(\mu, A) = R(\mu, A)R(\lambda, A) . \quad (2.2)$$

*Beweis.* Wir starten mit der Beobachtung, dass

$$\text{id} - (\lambda - A)R(\mu, A) = (\mu - \lambda)R(\mu, A) ,$$

was durch Einfügen von  $0 = A - A$  in der Klammer auf der rechten Seite folgt. Anwendung von  $(\lambda - A)^{-1} = R(\lambda, A)$  liefert (2.1).  $\square$

**Lemma 2.6** (Resolventenmenge ist offen). *Sei  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ein abgeschlossener Operator. Dann ist  $\rho(A)$  offen und  $\sigma(A)$  abgeschlossen.*

*Genauer gilt für  $\mu \in \rho(A)$ : Für  $r = \|R(\mu, A)\|^{-1}$  ist die offene Kugel  $B_r(\mu) \subset \mathbb{C}$  in  $\rho(A)$  enthalten. In der Kugel hängt  $R(\lambda, A)$  analytisch von  $\lambda$  ab und es gilt die Darstellung*

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}. \quad (2.3)$$

*Beweis.* Für  $\lambda \in \mathbb{C}$  schreiben wir

$$\lambda - A = \mu - A + \lambda - \mu = [\text{id} - (\mu - \lambda)R(\mu, A)](\mu - A).$$

Dies zeigt: Falls der Operator  $[\text{id} - (\mu - \lambda)R(\mu, A)] \in \mathcal{L}(X)$  invertierbar ist, so ist auch  $\lambda - A$  invertierbar. Dies ist der Fall für  $|\lambda - \mu| < r$ , wie man mit einer kontraktiven Fixpunktiteration einsehen kann. Eine genauere Information liefert die Taylor-Reihe, nach der man die Inverse

$$(\lambda - A)^{-1} = R(\mu, A)[\text{id} - (\mu - \lambda)R(\mu, A)]^{-1}$$

über die konvergente<sup>(1)</sup> Reihe darstellen kann. Dies ist genau (2.3). Insbesondere schließen wir auch, dass  $R(\lambda, A)$  in einer Kugel um  $\mu$  analytisch von  $\lambda$  abhängt.  $\square$

**Bemerkung 2.7** (Abschätzung impliziert Invertierbarkeit). *Wir nehmen an, dass auf einer zusammenhängenden Menge  $U \subset \mathbb{C}$  mit  $U \cap \rho(A) \neq \emptyset$  die Abschätzung*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq C(\lambda) \quad \forall \lambda \in U \cap \rho(A)$$

*gilt mit  $C(\cdot)$  stetig auf  $U$ . Dann ist  $U$  enthalten in der Resolventenmenge.*

*Beweis.* Dies folgt sofort mit einem Widerspruchsargument. Angenommen,  $U \cap \sigma(A) \neq \emptyset$ . Dann existiert auch ein Randpunkt  $\lambda \in U \cap \partial\sigma(A)$ . Wegen der Abgeschlossenheit des Spektrums gilt  $\lambda \in \sigma(A)$ . Wegen  $C(\lambda) < \infty$  und der Stetigkeit von  $C$  gilt  $\|R(\mu, A)\| \leq 2C(\lambda)$  für alle  $\mu \in \rho(A)$  mit  $|\mu - \lambda|$  klein. Ein Widerspruch zu Lemma 2.6.  $\square$

**Übung 2.1** (Spektrum beschränkter Operatoren). *Sei  $X \neq \{0\}$  ein Banachraum und  $A \in \mathcal{L}(X)$ . Zeigen Sie für das Spektrum  $\sigma(A)$  die Eigenschaften: (i)  $\sigma(A) \neq \emptyset$ . (ii)  $\lambda \in \sigma(A)$  impliziert  $|\lambda| \leq \|A\|$ .*

**Übung 2.2** (Spektrum von diskreten Verschiebungsoperatoren). *Wir betrachten  $X = \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  und darauf die Rechtsverschiebung*

$$R : (a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$$

*und die Linksverschiebung*

$$L : (a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_2, a_3, \dots).$$

*Zeigen Sie, dass ganz  $B_1(0) \subset \mathbb{C}$  aus Eigenwerten von  $L$  besteht. Folgern Sie  $\sigma(L) = \overline{B_1(0)} \subset \mathbb{C}$ . Zeigen Sie, dass auch  $\sigma(R) = \overline{B_1(0)}$  gilt, es aber keinen Eigenwert von  $R$  gibt.*

## 2.1.2 Halbgruppen

**Definition 2.8** (Lineare Halbgruppe).  $X$  sei ein Banachraum,  $S$  eine Familie von Abbildungen  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ , indiziert mit  $t \in [0, \infty)$ .  $S$  heißt Halbgruppe, falls die nachfolgende Halbgruppeneigenschaft erfüllt ist.

$$\begin{aligned} S(t) \circ S(s) &= S(t+s) \quad \forall t, s \geq 0, \\ S(0) &= id. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Wir fordern immer, dass die Halbgruppe stark stetig ist, dass also

$$[0, \infty) \ni t \mapsto S(t)x \in X \quad \text{stetig ist für alle } x \in X. \tag{2.5}$$

**Lemma 2.9** (Stetigkeit kann in  $t = 0$  getestet werden). Eine lineare Halbgruppe  $S(t)$  wie in Definition 2.10 ist stark stetig genau dann, wenn Anfangswerte angenommen werden, wenn also

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x \quad \text{für alle } x \in X. \tag{2.6}$$

*Beweis.* Die starke Stetigkeit impliziert direkt die Limeseigenschaft. Die eine Implikation ist damit klar.

*Schritt 1.* Wir zeigen zunächst, dass für eine lineare Halbgruppe  $S(t)$  mit Eigenschaft (2.6) folgende Beschränktheit gilt: Es gibt ein  $\delta > 0$ , so dass

$$\sup_{t \in [0, \delta]} \|S(t)\| < \infty. \tag{2.7}$$

Für einen Widerspruchsbeweis nehmen wir das Gegenteil an, dass also für  $t_k \rightarrow 0$  gilt  $\|S(t_k)\| \rightarrow \infty$ . Nun wenden wir das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit an (siehe z.B. [1]). Danach gibt es zur Familie von Operatoren  $S(t_k)_k \in \mathbb{N}$  auch ein festes  $x \in X$  mit  $\|S(t_k)x\| \rightarrow \infty$ . Dies widerspricht aber der Stetigkeit in 0.

*Schritt 2.* Sei wieder  $S(t)$  mit (2.6). Wir zeigen zunächst, dass dann  $S(t)x$  rechtsstetig ist. Tatsächlich gilt

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| \leq \|S(t)\| \|S(h)x - x\| \rightarrow 0$$

für  $h \rightarrow 0^+$  wegen der Limeseigenschaft, also ist  $S(t)$  rechtsstetig.

Für die Links-Stetigkeit bemerken wir zunächst, dass sich wegen der Halbgruppeneigenschaft die Abschätzung (2.7) verbessert zu  $\sup_{t \in [0, t_1]} \|S(t)\| < \infty$  für jedes feste  $t_1 > 0$ . Nun schreiben wir

$$\|S(t-h)x - S(t)x\| \leq \|S(t-h)\| \|x - S(h)x\|.$$

Da die Familie  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ ,  $t \in [0, t_1]$  gleichmäßig beschränkt ist, folgt die Linksstetigkeit wieder aus der Limeseigenschaft.  $\square$

**Definition 2.10** (Stetigkeitseigenschaften). Eine Familie von Abbildungen  $S(t) \in \mathcal{L}(X, X)$ ,  $t \in [0, \infty)$  mit der Halbgruppeneigenschaft (2.4) heißt

- gleichförmig stetig, falls  $t \mapsto S(t) \in \mathcal{L}(X, X)$  stetig ist

- *kontraktiv*, falls  $\|S(t)\| \leq 1$
- $\omega$ -*kontraktiv*, falls  $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$
- *analytisch*, falls die Familie  $t \mapsto S(t)$  in die komplexe Ebene analytisch fortgesetzt werden kann (siehe Definition 4.5).

**Übung 2.3.** Zeigen Sie, dass wir den Begriff der gleichförmigen Stetigkeit im Vergleich zu (1.10) nicht verändert haben.

Halbgruppen können höchstens exponentiell wachsen. In der gesamten Vorlesung werden wir oft Konstanten  $M$  und  $\omega$  aus folgender Aussage verwenden.

**Bemerkung 2.11.** Jede stark stetige Halbgruppe  $S(t)$  erfüllt für Konstanten  $M \geq 1$  und  $\omega \in \mathbb{R}$  eine Abschätzung

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

*Beweis.* Für festes  $x \in X$  ist  $t \mapsto S(t)x$  stetig und daher  $\sup_{t \in [0,1]} \|S(t)x\| < \infty$ . Das Prinzip der gleichförmigen Beschränktheit liefert daraus die Beschränktheit der Familie  $(S(t))_{t \in [0,1]}$ , also eine Schranke  $M$  mit

$$\|S(t)\| \leq M \quad \forall t \in [0, 1].$$

Nach der Halbgruppeneigenschaft gilt für beliebiges  $t = n + \tau$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\tau \in [0, 1]$

$$\|S(t)\| \leq \|S(1)\|^n \|S(\tau)\| \leq M^{n+1} \leq M e^{n \log M} \leq M e^{\omega t}$$

für  $\omega = \log M$ . □

In der Theorie kann man  $\omega$ -kontraktive und kontraktive Halbgruppen ineinander umwandeln. Dies geschieht mit folgendem Lemma.

**Bemerkung 2.12** (Reskalierte Halbgruppe). Sei  $S(t)$  eine  $\omega$ -kontraktive Halbgruppe auf  $X$ . Dann definiert

$$T(t)u := e^{-\omega t} S(t)u$$

eine kontraktive Halbgruppe auf  $X$ .

Insbesondere sehen wir, dass in Ungleichung (2.8) die Zahl  $\omega$  für die Theorie keine Rolle spielt; wir können durch Skalierung immer  $\omega = 0$  annehmen. Der Vorfaktor  $M$  macht den wichtigen Unterschied zwischen einer nur stark stetigen ( $M > 1$ ) und einer kontraktiven ( $M = 1$ ) Halbgruppe.

**Bemerkung 2.13** (Halbgruppe stark stetig, aber nicht kontraktiv). Der Übergang zu einer äquivalenten Norm auf  $X$  kann aus kontraktiven Halbgruppen solche machen, die lediglich stark stetig sind.

Insbesondere gilt: Das Spektrum von  $A$  alleine kann nicht über die Kontraktivität der Halbgruppe entscheiden.

Wir wollen ein solches Beispiel konstruieren. Wir betrachten  $X = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}^2) \equiv l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$  als Banachraum über  $\mathbb{R}$  und zu  $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  definieren wir

$$Au = v = (v_k)_k, \quad v_k = iku_k.$$

Dies ist ein Multiplikationsoperator und wie in Beispiel 1.7 lässt sich die erzeugte Halbgruppe explizit angeben,

$$S(t)u = u(t) = (u(t)_k)_k, \quad u(t)_k = e^{ikt}u_k.$$

In jeder Komponente ist die Halbgruppe eine Drehung, in Komponenten mit großen Indizes wird beliebig schnell gedreht.

Wir können auf  $X$  eine Norm durch

$$\|u\|_1^2 := \sum_k |\operatorname{Re} u_k|^2 + 2|\operatorname{Im} u_k|^2$$

definieren. Diese Norm ist zur natürlichen Norm äquivalent. Aber: Bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_1$  ist die Halbgruppe nicht kontraktiv. Man muss das  $M$  in (2.8) mindestens auf 2 setzen.

## 2.2 Erzeuger der Halbgruppe

**Definition 2.14** (Erzeuger einer Halbgruppe). *Der Erzeuger einer linearen Halbgruppe  $S$  auf  $X$  ist der Operator*

$$A : x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h}. \quad (2.9)$$

Er ist definiert auf  $D(A) \subset X$ ,

$$D(A) := \left\{ x \in X \mid \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existiert} \right\}. \quad (2.10)$$

Wir bestimmen zur Einstimmung den Erzeuger der reskalierten Halbgruppe

$$T(t)u := e^{-\omega t}S(t)u,$$

wobei  $S$  den Erzeuger  $A$  hat. Wir finden

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{T(h)u - u}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( e^{-\omega h} \frac{S(h)u - u}{h} + \frac{e^{-\omega h} - 1}{h} u \right) = Au - \omega u.$$

Also hat  $T$  den Erzeuger  $B = A - \omega$ .

**Proposition 2.15** (Lösungseigenschaften). *Sei  $S(t)$  eine stark stetige lineare Halbgruppe und  $(A, D(A))$  ihr Erzeuger. Dann gilt für  $u \in D(A)$ :*

1.  $S(t)u \in D(A)$  für alle  $t \geq 0$

2.  $AS(t)u = S(t)Au$  für alle  $t \geq 0$
3. Die Abbildung  $t \mapsto S(t)u$  ist differenzierbar auf  $(0, \infty)$
4. Auf  $(0, \infty)$  gilt die Gleichung

$$\partial_t[S(t)u] = A[S(t)u]. \quad (2.11)$$

*Beweis.* Wir fragen uns: Was wäre  $AS(t)u$ ? Dazu rechnen wir mit der Halbgruppeneigenschaft

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)S(t)u - S(t)u}{h} = S(t) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(h)u - u}{h} = S(t)Au.$$

Also gilt  $S(t)u \in D(A)$  und die Vertauschbarkeit  $AS(t)u = S(t)Au$ . Gleichzeitig sehen wir, dass die rechtsseitige Ableitung von  $S(t)u$  durch  $AS(t)u$  gegeben ist.

Es bleibt, Differenzenquotienten nach links zu berechnen.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ S(t-h) \frac{S(h)u - u}{h} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \left\{ S(t-h) \left( \frac{S(h)u - u}{h} - Au \right) + S(t-h)Au \right\} = S(t)Au. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass die Familie  $S(t-h) \in \mathcal{L}(X)$  beschränkt ist für  $h \in [0, h_0]$  (siehe Beweis von Bemerkung 2.9) und die starke Stetigkeit von  $S(t)$ . Rechter und linker Limes existieren und stimmen beide mit  $AS(t)u$  überein. Daher ist die Halbgruppe für  $u \in D(A)$  differenzierbar und es gilt (2.11).  $\square$

**Satz 2.16** (Eigenschaften des Erzeugers). *Der Erzeuger einer stark stetigen linearen Halbgruppe ist ein abgeschlossener und dicht definierter linearer Operator. Die Halbgruppe ist durch den Erzeuger eindeutig bestimmt.*

*Beweis.* Für stetige lineare  $S(t)$  ist  $A$  per Definition ein linearer Operator.

*Schritt 1. Dichtheit von  $D(A)$ .* Für  $t > 0$  definieren wir einen Operator  $V(t)$  durch

$$V(t) := \int_0^t S(\tau) d\tau.$$

Die Abbildung  $\tau \mapsto S(\tau)u$  ist stetig für  $u \in X$ . Daher gilt

$$\frac{1}{t}V(t)u \rightarrow S(0)u = u$$

in  $X$  für  $t \rightarrow 0$ . Wir behaupten, dass für beliebiges  $u \in X$  gilt:  $V(t)u \in D(A)$  für alle  $t > 0$ . Damit ist dann die Dichtheit von  $D(A)$  bewiesen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{S(h)V(t)u - V(t)u}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^t S(h+\tau)u - S(\tau)u d\tau \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)u - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)u d\tau \rightarrow S(t)u - u \end{aligned}$$

für  $h \rightarrow 0$ . Unser Ergebnis lautet:  $V(t)u \in D(A)$  mit

$$AV(t)u = S(t)u - u. \quad (2.12)$$

*Schritt 2. Abgeschlossenheit.* Seien  $D(A) \ni u_k \rightarrow u$  und  $Au_k \rightarrow v$  in  $X$ . Wegen (2.12) und Proposition 2.15 gilt

$$S(t)u_k - u_k = \int_0^t AS(\tau)u_k \, d\tau = \int_0^t S(\tau)Au_k \, d\tau.$$

Wir bilden den Limes  $k \rightarrow \infty$  und finden

$$S(t)u - u = \int_0^t S(\tau)v \, d\tau.$$

Der Differenzenquotient erfüllt, für  $t \rightarrow 0$ ,

$$\frac{S(t)u - u}{t} = \frac{1}{t} \int_0^t S(\tau)v \, d\tau \rightarrow v.$$

Dies beweist  $u \in D(A)$  und  $Au = v$ .

*Schritt 3. Eindeutigkeit.* Sei  $T(t)$  eine weitere Halbgruppe mit Erzeuger  $A$ . Für  $u \in D(A)$  betrachten wir

$$[0, t] \ni s \mapsto v(s) := T(t-s)S(s)u \in X.$$

Unser Ziel ist es, zu zeigen, dass  $v$  konstant ist. Für  $h > 0$  bilden wir den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{v(s+h) - v(s)}{h} &= T(t-s-h) \frac{1}{h} (S(s+h)u - T(h)S(s)u) \\ &= T(t-s) \frac{1}{h} (S(s+h)u - S(s)u) \\ &\quad + (T(t-s-h) - T(t-s)) \frac{1}{h} (S(s+h)u - S(s)u) \\ &\quad + \frac{1}{h} (T(t-s-h) - T(t-s)) S(s)u. \end{aligned}$$

Wir bilden den Limes  $h \rightarrow 0^+$ . Erster und dritter Term konvergieren nach Proposition 2.15 gegen

$$T(t-s)AS(s)u \quad \text{bzw.} \quad -AT(t-s)S(s)u.$$

Sie stimmen bis auf das Vorzeichen überein und löschen sich aus. Den zweiten Term schreiben wir als

$$B(h)x_h := (T(t-s-h) - T(t-s))x_h$$

mit

$$x_h = \frac{1}{h} (S(s+h)u - S(s)u) \rightarrow x_0 = AS(s)u.$$

Wir schätzen ab und bilden den Limes  $h \rightarrow 0$ ,

$$\|B(h)x_h\|_X \leq \|B(h)x_0\|_X + \|B(h)\|_{\mathcal{L}(X)} \cdot \|x_h - x_0\|_X \rightarrow 0.$$

Dabei haben wir die Konvergenzen  $B(h)x_0 \rightarrow 0$  (starke Stetigkeit) und die gleichmäßige Beschränktheit der Operatoren  $B(h)$  ausgenutzt.

Obige Rechnung kann auch für negatives  $h$  durchgeführt werden. Wir schließen, dass die Funktion  $s \mapsto v(s)$  differenzierbar ist und dass die Ableitung verschwindet. Also ist  $v$  konstant. Wir vergleichen die Endwerte und finden

$$T(t)u = v(0) = v(t) = S(t)u.$$

Damit stimmen die Halbgruppen auf  $D(A)$  überein. Da  $D(A)$  dicht ist und die Abbildungen  $u \mapsto T(t)u$  und  $u \mapsto S(t)u$  stetig sind, folgt Gleichheit auf ganz  $X$ .  $\square$

## Gleichförmig stetige Halbgruppen

Mit dem nächsten Theorem charakterisieren wir die Erzeuger von gleichförmig stetigen Halbgruppen.

**Satz 2.17** (Gleichförmig stetige Halbgruppen und beschränkte Erzeuger). *Im Banachraum  $X$  gilt:*

1. Jedes  $A \in \mathcal{L}(X)$  erzeugt eine gleichförmig stetige Halbgruppe.
2. Für jede gleichförmig stetige Halbgruppe ist der Erzeuger ein Operator  $A \in \mathcal{L}(X)$ .
3. Erzeugt  $A : D(A) = X \rightarrow X$  eine gleichförmig stetige Halbgruppe, so gilt  $A \in \mathcal{L}(X)$ .

*Beweis.* 1. Zu  $A \in \mathcal{L}(X)$  definieren wir

$$S(t) := e^{At} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}. \quad (2.13)$$

Der Operator  $S(t)$  ist wohldefiniert, denn die Partialsummen

$$S_N(t) := \sum_{k=0}^N \frac{t^k A^k}{k!}$$

sind eine Cauchy-Folge im Banachraum  $\mathcal{L}(X)$ .

Für die Differenzierbarkeit argumentieren wir wie folgt: Die Partialsummen  $S_N : t \mapsto S_N(t)$  sind Cauchy-Folgen in  $C^1([0, 1], \mathcal{L}(X))$ . Tatsächlich gilt für  $m < M$

$$\begin{aligned} & \|S_M - S_{m-1}\|_{C^1([0,1], \mathcal{L}(X))} \\ &= \sup_{t \in [0,1]} \left\| \sum_{k=m}^M \frac{t^k A^k}{k!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} + \sup_{t \in [0,1]} \left\| \partial_t \sum_{k=m}^M \frac{t^k A^k}{k!} \right\|_{\mathcal{L}(X)} \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=m}^M \frac{\|A\|^k}{k!} + \sum_{k=m}^M \frac{k\|A\|^k}{k!} \rightarrow 0$$

für  $m \rightarrow \infty$ . Also hat  $S_N$  einen Limes in  $C^1([0, 1], \mathcal{L}(X))$ , und insbesondere gilt  $\partial_t S_N \rightarrow \partial_t S$  in  $C^0([0, 1], \mathcal{L}(X))$ .

Wir können nun zeigen, dass  $S(t)u$  auf  $[0, 1]$  die Gleichung  $\partial_t u = Au$  löst (in Randpunkten werden einseitige Ableitungen ausgeführt). Insbesondere ist dann  $A$  der Erzeuger von  $S(t)$ .

$$\begin{aligned} AS(t) &\stackrel{(*)}{=} AS_N(t) = \sum_{k=0}^N \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{kt^{k-1} A^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} \partial_t \frac{t^k A^k}{k!} = \partial_t S_{N+1} \rightarrow \partial_t S(t). \end{aligned}$$

In  $(*)$  verwenden wir die Beschränktheit von  $A$ .

Zeitpunkte  $t \in (T - \varepsilon, T + \varepsilon)$  mit  $T > 1/2$  schreiben wir als  $t = T_0 + \tau$  für  $T_0 := T - \varepsilon$  und  $\tau \in (0, 1)$ . Dann

$$S(t) = S(\tau) \circ S(T_0) \Rightarrow \partial_t S(t) = \partial_t S(\tau) S(T_0) = AS(t),$$

wobei insbesondere die entsprechenden Funktionen differenzierbar sind. Die Gleichung  $\partial_t S(t)u = AS(t)u$  gilt also auf ganz  $\mathbb{R}_+$ . Die gleichförmige Stetigkeit auf  $\mathbb{R}_+$  folgt ebenso aus  $S \in C^0([0, 1], \mathcal{L}(X))$ .

2. Zur Halbgruppe  $S(t)$  und für  $t > 0$  definieren wir

$$V(t) := \int_0^t S(\tau) d\tau.$$

Die gleichförmige Stetigkeit von  $S$  impliziert

$$\frac{1}{t}V(t) \rightarrow S(0) = \text{id} \in \mathcal{L}(X)$$

für  $t \rightarrow 0$ . Daher ist für kleines  $t_0 > 0$  der Operator  $V(t_0)$  invertierbar.

Die Halbgruppeneigenschaft impliziert

$$\begin{aligned} S(t) &= V(t_0)^{-1}V(t_0)S(t) = V(t_0)^{-1} \int_0^{t_0} S(t + \tau) d\tau \\ &= V(t_0)^{-1} \int_t^{t_0+t} S(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

und daher ist die Halbgruppe  $S(t)$  sogar differenzierbar auf  $(0, \infty)$  und rechtsseitig differenzierbar in 0. Die Ableitung in 0 ist

$$A = \partial_t S(0) = V(t_0)^{-1}(S(t_0) - S(0)).$$

Insbesondere ist  $A$  ein beschränkter Operator.

3. Als Erzeuger einer gleichförmig stetigen Halbgruppe ist  $A$  nach 2. ein linearer beschränkter Operator.  $\square$

Satz 2.17 sagt vor allem: Gleichförmig stetige Halbgruppen gehören zu beschränkten Operatoren. Sie werden in unseren Anwendungen nicht vorkommen.

Andererseits werden wir nun wie folgt vorgehen können. Wir werden unbeschränkte Operatoren  $A$  durch beschränkte Operatoren  $A_n$  approximieren. Jedes  $A_n$  erzeugt eine Halbgruppe  $S_n$  nach Satz 2.17. Ein Limes der  $S_n$  definiert eine Halbgruppe  $S$ .

Als Illustration der Ergebnisse dieses Abschnittes betrachten wir die Verschiebungs-Halbgruppe  $S(t)$  aus Beispiel 1.3,

$$(S(t)u_0)(x) = u_0(x - t).$$

Dies definiert eine stark stetige Halbgruppe auf  $X = L^2(\mathbb{R}) \ni u_0$ .

Nach Satz 2.16 ist der Erzeuger  $A = -\partial_x$  auf einem dichten Teilraum von  $X$  definiert (nämlich  $H^1(\mathbb{R})$ ). Weiterhin ist  $-\partial_x : H^1 \subset L^2 \rightarrow L^2$  ein abgeschlossener Operator (tatsächlich impliziert  $u_k \rightarrow u$  in  $L^2(\mathbb{R})$  und  $-\partial_x u_k \rightarrow v$  in  $L^2(\mathbb{R})$ , dass  $u_k \rightarrow u$  in  $H^1$  und  $-\partial_x u = v$ ). Die Halbgruppe zu  $\partial_t u = -\partial_x u$  ist eindeutig bestimmt.

Der Erzeuger ist nicht beschränkt, also kann, nach Satz 2.17, die Halbgruppe nicht gleichförmig stetig sein (vergleiche Übung 1.2).

## 2.3 Resolventen und Halbgruppen

Der Zusammenhang zwischen Halbgruppe  $S(t)$  und Erzeuger  $A$  liegt in den Spektraleigenschaften von  $A$ . Wir haben schon gesehen, dass ein beschränktes Spektrum von  $A$  zu einer gleichförmig stetigen Halbgruppe gehört. Wir werden dies zu folgendem Bild komplettieren.

Spektrum von $A$		Halbgruppe $S(t)$
$\sigma(A)$ beschränkt	$\leftrightarrow$	$S(t)$ gleichförmig stetig
$\sigma(A)$ in Halbebene	$\leftrightarrow$	$S(t)$ stark stetig / kontraktiv
$\sigma(A)$ in Sektor	$\leftrightarrow$	$S(t)$ analytisch

Es ist allerdings nicht nur die Lage des Spektrums wichtig, sondern auch die Resolventenabbildung, oder kurz, die *Resolvente*.

**Satz 2.18** (Resolventenabschätzung für Erzeuger stark stetiger Halbgruppen). *Sei  $S(t)$  eine stark stetige Halbgruppe mit  $M$  und  $\omega$  aus Gleichung (2.8), und sei  $(A, D(A))$  der Erzeuger. Dann gilt:*

1. Sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Falls das uneigentliche Integral

$$R(\lambda)u := \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, d\tau \tag{2.14}$$

für alle  $u \in X$  existiert, so gilt  $\lambda \in \rho(A)$  und  $R(\lambda, A) = R(\lambda)$ .

2. Für alle  $\lambda$  in der Halbebene  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$  gilt  $R(\lambda, A) = R(\lambda)$  (und insbesondere sind beide Objekte wohldefiniert). Außerdem gilt die Resolventenabschätzung

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}. \quad (2.15)$$

*Beweis.* Zu 1. Es genügt, den Fall  $\lambda = 0$  zu betrachten. Ansonsten reskalieren wir die Halbgruppe wie in Bemerkung 2.12 und betrachten  $\tilde{A} = A - \lambda$  mit  $\tilde{S}(t) = e^{-\lambda t} S(t)$ .

Wir wollen zeigen, dass die Existenz des uneigentlichen Integrals die Invertierbarkeit von  $-A : D(A) \rightarrow X$  impliziert (mit der zugehörigen Formel). Dazu wenden wir eine Approximation von  $-A$  auf die behauptete Inverse an:

$$\begin{aligned} -\frac{S(h) - \operatorname{id}}{h} R(0)u &= -\frac{S(h) - \operatorname{id}}{h} \int_0^\infty S(\tau)u \, d\tau \\ &= \frac{1}{h} \left( -\int_h^\infty S(\tau)u \, d\tau + \int_0^\infty S(\tau)u \, d\tau \right) \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)u \, d\tau \rightarrow u. \end{aligned}$$

Wir erhalten, dass  $R(0)u \in D(A)$  und  $-AR(0)u = u$  für alle  $u \in X$ .

Um schließlich zu zeigen, dass  $-A$  auch Rechtsinverse ist, fixieren wir  $u \in D(A)$  und verwenden nacheinander:  $R(0)$  Rechtsinverse, Definition von  $R(0)$ , Abgeschlossenheit von  $A$ , Vertauschbarkeit von  $A$  und  $S(t)$ , Definition:

$$\begin{aligned} u &= -AR(0)u = -A \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S(\tau)u \, d\tau = -\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t AS(\tau)u \, d\tau \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t S(\tau)Au \, d\tau = -R(0)Au. \end{aligned}$$

Wir haben eine Inverse zu  $-A$  gefunden und damit gezeigt, dass  $\lambda = 0 \in \rho(A)$ . Die Formel ist ebenfalls nachgewiesen.

Zu 2. Die Konvergenz des uneigentlichen Integrals ist klar für  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ . Daher folgen aus 1. alle Aussagen bis auf die Resolventenabschätzung. Für diese berechnen wir

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)\| &= \|R(\lambda)\| = \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau) \, d\tau \right\| \\ &\leq \int_0^\infty |e^{-\lambda\tau}| \|S(\tau)\| \, d\tau \leq \int_0^\infty e^{-\tau \operatorname{Re} \lambda} M e^{\omega\tau} \, d\tau \\ &= M \int_0^\infty e^{\tau(\omega - \operatorname{Re} \lambda)} \, d\tau \leq \frac{M}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}, \end{aligned}$$

und haben damit die Abschätzung für die Resolvente.  $\square$

Satz 2.18 impliziert insbesondere: Informationen über die Lage des Spektrums reichen nicht aus, um zu einem Operator eine zugehörige stark stetige Halbgruppe zu finden.

**Übung 2.4** (Verschiebungs-Operatoren). *Wir betrachten die drei (abgeschlossenen) Rechts-Verschiebungs-Operatoren  $A_i = -\partial_x$ ,  $A_i : D(A_i) \subset X_i \rightarrow X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , mit den Räumen*

$$\begin{aligned} X_1 &= L^2(\mathbb{R}), & D(A_1) &= H^1(\mathbb{R}), \\ X_2 &= L^2((0, 1), \mathbb{R}), & D(A_2) &= \{u \in H^1((0, 1), \mathbb{R}) \mid u(0) = 0\}, \\ X_3 &= L^2((0, 1), \mathbb{R}), & D(A_3) &= H^1((0, 1), \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Man überlege sich:

$$\sigma(A_1) = i\mathbb{R}, \quad \sigma(A_2) = \emptyset, \quad \sigma(A_3) = \mathbb{C}.$$

*Hinweis:  $(\lambda - A_i)u = f$  ist eine gewöhnliche Differentialgleichung.*

*Die Operatoren  $A_1$  und  $A_2$  erzeugen eine Halbgruppe (Rechtsshift). Die Operatoren  $-A_2$  und  $A_3$  nicht.*

Satz 2.18 impliziert: Die Spektren von  $A_1$  und  $A_2$  liegen in einer linken Halbebene, in einer rechten Halbebene ist die Resolventenabschätzung erfüllt.

Die Operatoren  $-A_2$  und  $A_3$  erfüllen die Resolventenabschätzung in keiner rechten Halbebene.

Der Operator  $A_2$  zeigt: Aus der Beschränktheit des Spektrums folgt nicht die Beschränktheit des Operators. Der Operator  $-A_2$  zeigt: Aus der Beschränktheit des Spektrums folgt nicht, dass der Operator eine Halbgruppe erzeugt.

Ein weiteres Beispiel ist das Folgende. Es ist ähnlich zu  $-A_2$  der Übung, aber hier liegt das Problem nicht in einer nicht-stellbaren Randbedingung.

**Beispiel 2.19** (Resolventenabschätzung nicht erfüllt). *Wir betrachten den Raum*

$$X := \{u \in L^2(\mathbb{R}_+) \mid u|_{(0,1)} \in H^1((0,1))\}$$

*mit der natürlichen zugehörigen Norm. Darauf betrachten wir  $A = \partial_x$  mit*

$$D(A) := \{u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid \partial_x u \in X\}.$$

*Formal sollte der Operator  $A$  Links-Verschiebungs-Operatoren  $S(t)$  erzeugen (vergleiche Beispiel 1.4).*

Es gilt:  $A$  ist dicht definiert, abgeschlossen, und  $\lambda - A$  ist invertierbar für alle  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ : Die Lösung von

$$(\lambda - \partial_x)u = f$$

ist eindeutig und gegeben durch

$$u(x) = \int_x^\infty e^{-\lambda(\tau-x)} f(\tau) d\tau.$$

Obwohl  $A$  all diese Eigenschaften hat, sind die Links-Verschiebungen  $S(t)$  trotzdem keine Halbgruppe, denn  $S(t)$  bildet gar nicht nach  $X$  ab. Dies zeigt, dass die verifizierten Eigenschaften von  $A$  nicht ausreichend sind, um zu implizieren, dass  $A$  eine Halbgruppe erzeugt.

**Übung 2.5.** *Man zeige direkt, dass der unbeschränkte Operator  $\partial_x : X \rightarrow X$  aus Beispiel 2.19 die Resolventenabschätzung nicht erfüllt.*

# Kapitel 3

## Stetige und kontraktive Halbgruppen

### 3.1 Hille-Yosida Theorem

Wir haben in Abschnitt 2.2 notwendige Eigenschaften von Erzeugern  $A : D(A) \rightarrow X$  von stark stetigen Halbgruppen gesammelt. Wir verwenden  $\omega$  und  $M$  aus Gleichung (2.8). Die Resolventenabschätzung des letzten Punktes schreiben wir hier für  $M = 1$  aus. Bisher bewiesen ist die Aussage: Jede  $\omega$ -kontraktive (also mit  $M = 1$ ), stark stetige Halbgruppe erfüllt

- $A$  ist abgeschlossen
- $D(A)$  ist dicht
- $\sigma(A) \subset \{\lambda \mid \operatorname{Re} \lambda \leq \omega\}$
- $\|R(\lambda, A)\| \leq \|\operatorname{Re} \lambda - \omega\|^{-1} \quad \forall \lambda, \operatorname{Re} \lambda > \omega.$

Unser Ziel ist es nun, zu zeigen, dass diese Eigenschaften auch hinreichend sind. Wir wollen also zeigen: Erfüllt  $A$  die obigen vier Eigenschaften so erzeugt  $A$  eine  $\omega$ -kontraktive Halbgruppe. Insbesondere ist damit eine Lösung für die Gleichung

$$\partial_t u = Au$$

gefunden.

Der Fall stark stetiger Lösungen (“ $M > 1$ ”) ist ein wenig komplizierter, wir werden in Abschnitt 3.3 die entsprechenden Resultate besprechen.

Bemerkung: Ist  $S(t) = e^{At}$  die Halbgruppe zu einem beschränkten Operator  $A$  und  $B$  ein Operator, der mit  $A$  vertauscht, so gilt auch  $BS(t) = S(t)B$ . Dies kann zum Beispiel über die Reihendarstellung gezeigt werden.

**Satz 3.1** (Hille-Yosida 1948, kontraktiver Fall). *Sei  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $X$  ein Banachraum. Für einen linearen Operator  $(A, D(A))$  auf  $X$  sind äquivalent:*

1.  $(A, D(A))$  erzeugt eine stark stetige  $\omega$ -kontraktive Halbgruppe.

2.  $(A, D(A))$  ist abgeschlossen, dicht definiert, und für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  gilt  $\lambda \in \rho(A)$  und

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}.$$

Für die Implikation “2.  $\Rightarrow$  1.” muss nicht die ganze Halbebene  $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \omega\}$  betrachtet werden. Es ist ausreichend, wenn eine Zahl  $\lambda_0 \in (\omega, \infty)$  in der Resolventenmenge liegt (so dass  $(\omega, \infty) \cap \rho(A) \neq \emptyset$ ), und die Resolventenabschätzung für alle  $\lambda \in (\omega, \infty) \cap \rho(A)$  gilt.

*Beweis.* Mit den Sätzen 2.16 und 2.18 ist die Richtung 1.  $\Rightarrow$  2. schon gezeigt. Wir zeigen nun 2.  $\Rightarrow$  1. Wegen Bemerkung 2.12 können wir ohne Einschränkung  $\omega = 0$  annehmen.

Angenommen, es gilt  $(\omega, \infty) \cap \rho(A) \neq \emptyset$ , und die Resolventenabschätzung gilt für alle  $\lambda \in (\omega, \infty) \cap \rho(A)$ . Dann gilt auch  $(\omega, \infty) \subset \rho(A)$  nach dem Prinzip aus Bemerkung 2.7.

Um die Halbgruppe zu konstruieren, verwenden wir folgende Idee: Wir approximieren den Operator  $A$  durch beschränkte Operatoren  $A_n$ . Nach Satz 2.17 erzeugen die Operatoren  $A_n$  Halbgruppen  $S_n(t)$  auf  $X$ . Wenn wir den Limes  $n \rightarrow \infty$  durchführen können, so haben wir die gesuchte Halbgruppe mit  $S(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)$  gefunden.

Die geeignete Wahl von  $A_n$  sind die Yosida-Approximationen. Eine grafisch eingängige Formel für diese Approximationen ist

$$A_n = \frac{A}{1 - \frac{1}{n}A}.$$

Die formal korrekte Definition erfolgt mit der Resolvente, die ja nach Voraussetzung für positive  $\lambda$  existiert. Wir setzen

$$A_n := AR \left( 1, \frac{1}{n}A \right) = nAR(n, A) = n^2R(n, A) - n \operatorname{id}.$$

Die letzte Gleichheit gilt wegen  $AR(n, A) = -(n - A)R(n, A) + nR(n, A)$ . Wir werden nacheinander für die Halbgruppen  $S_n(t) = e^{A_n t}$  nachweisen:

- a)  $A_n u \rightarrow Au$  für  $u \in D(A)$
- b)  $S(t)u = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)u$  existiert für alle  $u \in X$
- c)  $S(t)$  ist eine stark stetige kontraktive Halbgruppe auf  $X$
- d)  $A$  ist der Erzeuger von  $S(t)$

Mit den Aussagen c) und d) ist der Satz bewiesen.

a) Wir zeigen zunächst  $nR(n, A) \rightarrow \operatorname{id}$  für  $n \rightarrow \infty$ . Für  $u \in D(A)$  gilt wegen  $AR(n, A) = -\operatorname{id} + nR(n, A)$

$$\|nR(n, A)u - u\| \leq \|R(n, A)\| \|Au\| \leq \frac{1}{n} \|Au\| \rightarrow 0.$$

Die Operatoren  $nR(n, A)$  sind wegen der Resolventenabschätzung gleichmäßig beschränkt (nämlich durch 1) und  $D(A)$  ist dicht; daher gilt  $nR(n, A)u \rightarrow u$  sogar für alle  $u \in X$ .

Indem wir diese Konvergenz für  $u \in D(A)$  auf  $Au$  anwenden, erhalten wir

$$A_n u = nR(n, A)Au \rightarrow Au$$

für  $n \rightarrow \infty$ , wie behauptet.

b) Mit der Darstellung  $A_n = -n + n^2 R(n, A)$ , der Abschätzungen für die Exponentialformel und der Resolventenabschätzung rechnen wir

$$\|S_n(t)\| \leq e^{-nt} e^{n^2 \|R(n, A)\| t} \leq e^{-nt} e^{nt} = 1.$$

Die Halbgruppe  $S_n$  ist also eine kontraktive Halbgruppe für jedes  $n$ .

Die Resolventen  $R(n, A)$  und  $R(m, A)$  kommutieren wegen der Resolventenidentität. Nach unseren Vorbemerkungen kommutieren daher auch die Operatoren  $A_n$  und  $A_m$ , und dann diese mit beiden Halbgruppen  $S_n(t)$  und  $S_m(t)$ . Wir können daher berechnen

$$\begin{aligned} S_n(t)u - S_m(t)u &= \int_0^t \frac{d}{ds} (S_m(t-s)S_n(s)u) ds \\ &= \int_0^t (-A_m S_m(t-s)S_n(s)u + S_m(t-s)A_n S_n(s)u) ds \\ &= \int_0^t S_m(t-s)S_n(s) (A_n - A_m) u ds. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Wegen der Konvergenz  $A_n \rightarrow A$  und Beschränktheit von  $S_k(\tau)$  folgt, dass  $S_n(t)u$  eine Cauchy-Folge ist, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(t)u =: S(t)u \quad \text{existiert für } u \in D(A).$$

Der Limes gilt wegen Beschränktheit von  $S_n(t)$  und Dichtheit von  $D(A)$  sogar für alle  $u \in X$ .

c) Die Normabschätzung für  $S_n(t)$  überträgt sich auf den Limes, daher ist  $S(t)$  kontraktiv. Die Konvergenz  $S_n(t)u \rightarrow S(t)u$  ist gleichmäßig in  $t$  auf kompakten Intervallen, was aus der Rechnung (3.1) folgt. Daher folgt aus der Stetigkeit von  $S_n(t)u$  die Stetigkeit von  $t \mapsto S(t)u$ .

d) Wir zeigen nun, dass  $A$  der Erzeuger von  $S(t)$  ist. Sei  $(B, D(B))$  der Erzeuger von  $S(t)$ . Wir müssen mit der definierenden Eigenschaft von Erzeugern arbeiten. Wegen der Lösungseigenschaft der approximativen Halbgruppe gilt

$$S_n(t)u - u = \int_0^t S_n(\tau)A_n u d\tau. \quad (3.2)$$

Außerdem gilt für  $u \in D(A)$  für den Integranden mit einer Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|S_n(\tau)A_n u - S(\tau)Au\| \\ \leq \|S_n(\tau)\| \|A_n u - Au\| + \|(S_n(\tau) - S(\tau))Au\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ , gleichmäßig in  $\tau \in [0, t]$ . Wir können also in (3.2) zum Limes übergehen und finden

$$S(t)u - u = \int_0^t S(\tau)Au \, d\tau.$$

Für  $u \in D(A)$  können wir bilden

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} = Au.$$

Dies impliziert  $D(A) \subset D(B)$  und  $Bu = Au$  für  $u \in D(A)$ .

Wir müssen nur noch  $D(B) \subset D(A)$  zeigen. Sei dazu  $b \in D(B)$  ein beliebiges Element. Für  $\lambda > 0$  gilt  $(\lambda - B)(D(A)) = (\lambda - A)(D(A)) = X$ , denn  $A = B$  auf  $D(A)$  und  $\lambda - A$  ist invertierbar als Operator  $D(A) \rightarrow X$ . Der Operator  $\lambda - B : D(A) \rightarrow X$  ist also ebenfalls surjektiv. Wir können daher das Element  $a \in D(A) \subset D(B)$  betrachten, welches  $(\lambda - B)(a) = (\lambda - B)(b)$  erfüllt.

Der Operator  $B$  erzeugt eine kontraktive Halbgruppe, daher gilt  $(0, \infty) \subset \rho(B)$ , insbesondere ist  $\lambda - B$  auf  $D(B)$  injektiv. Dies impliziert  $b = a$  und damit  $b \in D(A)$ . Wir haben damit  $D(B) \subset D(A)$  erhalten.  $\square$

## 3.2 Kontraktive Halbgruppen in Anwendungen

In diesem Abschnitt wollen wir für verschiedene Operatoren das Hille-Yosida Theorem anwenden. Wir werden aus abstrakten Eigenschaften von Operatoren  $A$  schließen, dass  $A$  eine kontraktive Halbgruppe erzeugt. Wir erhalten dies für: (1)  $A$  dissipativ, (2)  $A$  elliptisch, (3)  $A$  selbstadjungiert, (4)  $A$  schiefadjungiert, (5) Schrödingergleichung, (6) Wellengleichung.

In diesem Abschnitt ist  $X$  immer ein Hilbertraum.

### 3.2.1 Dissipative Operatoren

**Definition 3.2** (Dissipativer Operator). *Auf einem Hilbertraum  $X$  heißt ein linearer Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  dissipativ, falls*

$$\operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \leq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

**Bemerkung 3.3.** *Dissipative Operatoren  $A$  erfüllen die Resolventenabschätzung*

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}(\lambda)} \quad \forall \lambda \in \rho(A), \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (3.3)$$

*Beweis.* Testen von  $(\lambda - A)u = f$  mit  $u$  liefert

$$\lambda \|u\|^2 - \langle Au, u \rangle = \langle f, u \rangle.$$

Wir nehmen den Realteil und finden mit Cauchy-Schwarz

$$\operatorname{Re} \lambda \|u\|^2 \leq |\langle f, u \rangle| \leq \|f\| \|u\|.$$

Kürzen von  $\|u\|$  liefert

$$\operatorname{Re} \lambda \|u\| \leq \|f\|,$$

also die Resolventenabschätzung.  $\square$

**Satz 3.4** (Lumer-Phillips 1961, vereinfacht). *Ist  $A$  dicht definiert und dissipativ mit  $(1 - A)(D(A)) = X$ , so erzeugt  $A$  eine kontraktive Halbgruppe.*

*Beweis.* Die Resolventenabschätzung wurde in (3.3) bereits nachgerechnet. Es bleibt zu zeigen, dass  $A$  abgeschlossen ist. Dann kann das Theorem von Hille-Yosida angewendet werden.

Die Abbildung  $1 - A$  ist nach Voraussetzung surjektiv, wegen der Resolventenabschätzung aus Bemerkung 3.3 aber auch injektiv. Also ist  $1 - A$  invertierbar. Die Inverse ist beschränkt aufgrund der Resolventenabschätzung. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist der Graph von  $(1 - A)^{-1}$  abgeschlossen; damit ist auch  $A$  abgeschlossen.  $\square$

### 3.2.2 Parabolische Gleichung

**Beispiel 3.5** (Parabolische Gleichung). *Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  beschränkt mit Lipschitz-Rand und  $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ . Wir betrachten den unbeschränkten Operator  $A$  auf  $X$ ,*

$$A : D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset X \rightarrow X = L^2(\Omega),$$

definiert mit  $C^2(\bar{\Omega})$ -Koeffizienten durch

$$Au(x) = \sum_{i,j} \partial_{x_i}(a_{i,j}(x)\partial_{x_j}u(x)) + \sum_i b_i(x)\partial_{x_i}u(x) + c(x)u(x). \quad (3.4)$$

$A$  sei elliptisch, d.h. für ein  $\eta > 0$  gelte

$$\sum_{i,j} a_{i,j}\xi_i\xi_j \geq \eta|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Dann existiert  $\omega > 0$ , so dass  $A$  eine  $\omega$ -kontraktive Halbgruppe erzeugt.

Um mit der Halbgruppentheorie besser vertraut zu werden, wenden wir hier nicht den Satz von Lumer-Phillips an, sondern Hille-Yosida, Theorem 3.1.

Der Operator  $A$  ist dicht definiert, was aus der Dichtheit glatter Funktionen in Lipschitz-Gebieten folgt. Für großes  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist die Bilinearform zu  $\lambda - A$  koerziv, was aus der Rechnung weiter unten folgt. Diese Koerzivität impliziert, dass  $(\lambda - A)u = f$  eindeutig lösbar für alle  $f \in X$  mit Lösung  $u \in H_0^1(\Omega)$  (Lax-Milgram). Die Regularitätstheorie liefert für  $H^1$ -Lösungen  $u$  von  $(\lambda - A)u = f$  die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2} \leq C\|f\|_X.$$

Insbesondere ist die Lösung  $u$  in  $D(A)$  und daher  $\lambda$  in der Resolventenmenge.

Wir schließen weiterhin, dass  $A$  abgeschlossen ist. Begründung: Es reicht zu zeigen, dass  $(\lambda - A)$  abgeschlossen ist. Seien also  $u_n \rightarrow u$  Lösungen zu  $f_n \rightarrow f$ . Es

gilt  $\|u_n - u_m\|_{H^2} \leq C\|f_n - f_m\|_X \rightarrow 0$ . Also gilt  $u_n \rightarrow u$  in  $H^2$ , insbesondere ist  $u$  im Definitionsbereich und die Gleichung gilt.

Es bleibt, die Resolventenabschätzung zu zeigen. Wir berechnen wie üblich

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j} a_{i,j}(x) \partial_{x_j} u(x) \partial_{x_i} \bar{u}(x) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_i b_i(x) \partial_{x_i} u(x) \bar{u}(x) dx + \int_{\Omega} c(x) u(x) \bar{u}(x) dx \\ &\leq -\frac{\eta}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

für ein  $C \geq 0$ . Wir setzen  $\omega = C + 1$  und erhalten für  $\lambda$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  und Lösungen von  $(\lambda - A)u = f$  die Ungleichung

$$\operatorname{Re} \lambda \|u\|^2 - \operatorname{Re} \langle Au, u \rangle \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Einsetzen und Kürzen von  $\|u\|$  liefert die Resolventenabschätzung für  $\lambda - A$ , nämlich  $\|u\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega} \|f\|$ .

Der Operator  $A$  erzeugt daher nach dem Satz von Hille-Yosida eine  $\omega$ -kontraktive Halbgruppe.

**Übung 3.1** ( $H^{-1}(\Omega)$  als Grundraum). *Ein Nachteil in der obigen Behandlung des parabolischen Problems liegt darin, dass man Abschätzungen für Lösungen elliptischer Gleichungen in  $H^2(\Omega)$  benötigt. Das erfordert Annahmen an die Glattheit des Gebietes und der Koeffizienten.*

*Verifizieren Sie, dass man die Halbgruppentheorie auch mit dem Grundraum  $X = H^{-1}(\Omega)$  und  $D(A) = H_0^1(\Omega)$  verwenden kann. Mit dieser Wahl ist keine elliptische Regularitätstheorie erforderlich (sondern nur Lax-Milgram).*

### 3.2.3 Selbstadjungierte Operatoren

Wieder sei  $X$  ein Hilbertraum. Zu jedem Operator  $A : D(A) \rightarrow X$  wird der adjungierte Operator auf Dualräumen "rückwärts" definiert:  $A' : X' \rightarrow D(A)'$  erfüllt, für alle  $\mu \in X'$  und  $u \in D(A)$ ,

$$(A'\mu)(u) := \mu(Au). \quad (3.5)$$

Im Hilbertraum wird  $X$  mit  $X'$  mit Hilfe des Skalarproduktes identifiziert. Wir identifizieren  $\mu$  mit  $x$  durch die Darstellung  $\mu(\cdot) = \langle x, \cdot \rangle$ . Formel (3.5) hat dann die gewohnte Form:

$$\langle u, A'x \rangle = \langle Au, x \rangle.$$

**Definition 3.6** (Selbstadjungierter Operator). *Ein Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  heißt selbstadjungiert, falls*

$$D(A') := \{\mu \in X' \mid A'\mu \text{ beschränkt in } X'\} = D(A) \quad \text{und es gilt } A' = A.$$

*Wir fordern hier, dass  $A'\mu$  beschränkt ist in  $X'$ . Etwas genauer wäre es, zu fordern:  $A'\mu : D(A) \rightarrow X$  besitzt eine stetige Fortsetzung zu einem Element in  $X'$ .*

Eine unmittelbare Konsequenz ist für  $u \in D(A)$

$$\langle Au, u \rangle = \langle u, A'u \rangle = \langle u, Au \rangle = \overline{\langle Au, u \rangle}.$$

Wir schließen  $\langle Au, u \rangle \in \mathbb{R}$ .

**Corollar 3.7** (Selbstadjungierte dissipative Operatoren und Halbgruppen). *Sei  $A$  dicht definiert, selbstadjungiert und dissipativ. Dann erzeugt  $A$  eine kontraktive Halbgruppe.*

*Beweis.* Adjungierte Operatoren sind immer abgeschlossen, wir belassen dies als Übungsaufgabe. Daher ist  $A$  abgeschlossen. Um das Theorem von Lumer-Phillips anwenden zu können, müssen wir lediglich noch zeigen, dass  $(1 - A)(D(A)) = X$ .

*Schritt 1: Behauptung 1.* Es gilt

$$C := \overline{(1 - A)(D(A))} = X. \quad (3.6)$$

Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass  $C$  nicht ganz  $X$  ist. Dann gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein Element  $0 \neq \mu \in X'$  mit  $\mu|_C = 0$ , also

$$\langle (1 - A)u, \mu \rangle = 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Wir erhalten also, dass  $(1 - A')\mu$  auf der Menge  $D(A)$  verschwindet. Insbesondere ist dieses Funktional auf  $X$  fortsetzbar, daher gilt  $\mu \in D(A')$ .

Wegen  $D(A') = D(A)$  und  $A' = A$  gilt  $(1 - A)\mu = 0$ . Die Abschätzung für Lösungen dieser Gleichung (Resolventenabschätzung aus der Dissipativität) liefert  $\mu = 0$ , den gesuchten Widerspruch.

*Schritt 2: Behauptung 2.* Es gilt  $(1 - A)(D(A)) = X$ .

Ein beliebiges Element  $x \in X$  kann wegen Behauptung 1 als Limes von Bild-elementen  $x_k \in X$  geschrieben werden,  $x_k = (1 - A)(z_k)$  mit  $z_k \in D(A)$ . Da  $x_k$  eine Cauchy-Folge ist, ist auch  $z_k$  eine Cauchy-Folge. Wegen Abgeschlossenheit von  $1 - A$  erfüllen die Grenzpunkte wieder dieselbe Relation und der Grenzpunkt  $z$  ist im Definitionsbereich von  $A$ . Also ist  $x = (1 - A)(z)$  in  $(1 - A)(D(A))$ .  $\square$

### 3.2.4 Schiefadjungierte Operatoren

**Definition 3.8** (Schiefadjungierter Operator). *Ein Operator  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  heißt schiefadjungiert, falls*

$$D(A') := \{\mu \in X' \mid A'\mu \text{ beschränkt in } X'\} = D(A) \quad \text{und es gilt } A' = -A.$$

*Wir fordern hier, dass  $A'\mu$  beschränkt ist in  $X'$ . Etwas genauer wäre es, zu fordern:  $A'\mu : D(A) \rightarrow X$  besitzt eine stetige Fortsetzung zu einem Element in  $X'$ .*

Bemerkung: Für  $u \in D(A)$  folgt

$$\langle Au, u \rangle = \langle u, A'u \rangle = -\langle u, Au \rangle = -\overline{\langle Au, u \rangle},$$

also  $\langle Au, u \rangle \in i\mathbb{R}$ . Wir sehen: Schiefadjungierte Operatoren sind automatisch dissipativ.

**Corollar 3.9** (Schiefadjungierte Operatoren und Halbgruppen). *Sei  $X$  Hilbertraum über  $\mathbb{C}$ ,  $A$  dicht definiert und schiefadjungiert. Dann erzeugt  $A$  eine kontraktive Halbgruppe.*

*Beweis.* Der Beweis ist genau wie für dissipative selbstadjungierte Operatoren. Diesmal folgt die Dissipativität schon aus der Schiefadjungiertheit, wie zuvor folgt die Abgeschlossenheit aus der Tatsache, dass adjungierte Operatoren immer abgeschlossen sind. Aus der Dissipativität folgt die Abschätzung für Lösungen,

$$\|u\| \leq |\operatorname{Re} \lambda|^{-1} \|f\|, \text{ falls } (\lambda - A)u = f. \quad (3.7)$$

Wir wollen nun  $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R} \subset \rho(A)$  zeigen. Dazu sei  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$  beliebig. Es gilt  $\ker(\lambda - A) = \{0\}$ , denn Lösungen  $u$  von  $(\lambda - A)u = 0$  erfüllen nach (3.7)  $\|u\| = 0$ . Wie bei den selbstadjungierten Operatoren zeigt man

$$C := \overline{(\lambda - A)(D(A))} = X.$$

Damit ist  $\lambda \in \rho(A)$  gezeigt. □

### 3.2.5 Schrödingergleichung

**Beispiel 3.10** (Schrödingergleichung). *Für  $V \in C_c^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  definieren wir*

$$A = i(\Delta + V(\cdot)) : D(A) := H^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) =: X. \quad (3.8)$$

*Der Operator  $A$  ist ein dicht definierter, schiefadjungierter Operator auf dem Hilbertraum  $X$ . Insbesondere gilt:  $A$  erzeugt eine kontraktive Halbgruppe auf  $X$ .*

Wir sehen sofort, dass  $X$  ein Hilbertraum ist und  $A$  dicht definiert. Es genügt also, zu zeigen, dass  $A$  schiefadjungiert ist. Die formale Gleichheit  $A = -A'$  folgt sofort durch partielle Integration,

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_{L^2} &= \int_{\mathbb{R}^n} i(\Delta u(x) + V(x)u(x))\bar{v}(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)i(\Delta \bar{v}(x) + V(x)\bar{v}(x)) \, dx = \langle u, -Av \rangle_{L^2}, \end{aligned}$$

weil  $\bar{\bar{i}} = -i$ .

Dass für  $\mu \in X'$  die Form  $A'\mu$  beschränkt ist, heißt, dass

$$X = L^2(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \langle \mu, Au \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} i(\Delta \bar{u} + V(\cdot)\bar{u}) \mu$$

beschränkt ist (für alle  $u \in D(A)$ ). Dies bedeutet, dass die Distribution  $\Delta\mu$  als Form auf  $L^2(\mathbb{R}^n)$  beschränkt ist, also dass  $\Delta\mu \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Zusammen mit  $\mu \in X' = L^2(\mathbb{R}^n)$  impliziert dies  $\mu \in H^2(\mathbb{R}^n)$  (einfache elliptische Theorie). Damit ist gezeigt, dass  $D(A) = D(A')$ . Die formale Gleichheit  $A' = -A$  gilt also rigoros auf  $D(A)$ .

Wir schließen mit Corollar 3.9, dass die Schrödingergleichung eine kontraktive Halbgruppe erzeugt.

### 3.2.6 Wellengleichung

Wir betrachten wieder einen elliptischen Differentialoperator wie in (3.4), allerdings symmetrisch und mit Vorzeichen,

$$A_0 u(x) = \sum_{i,j} \partial_{x_i} (a_{i,j}(x) \partial_{x_j} u(x)) - c(x) u(x).$$

Dabei sei  $A_0 = (a_{ij})_{ij}$  symmetrisch und positiv definit und es gelte  $c \geq 0$ .

**Beispiel 3.11** (Wellengleichung, symmetrisch). Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Lipschitzgebiet mit  $C^2$ -Rand. Wir untersuchen die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u - A_0 u &= 0, & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega \times [0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= g(\cdot), \quad \partial_t u(\cdot, 0) = h(\cdot), & \text{auf } \Omega. \end{aligned}$$

Um diese Gleichung in die Form  $\partial_t w = Bw$  zu bringen, definieren wir

$$\begin{aligned} v &:= \partial_t u, \quad w := (u, v), & X &:= H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ B(u, v) &:= (v, A_0 u), & D(B) &:= (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Dann erzeugt  $(B, D(B))$  eine kontraktive Halbgruppe.

*Beweis.* Wir wollen das Lumer-Phillips Theorem anwenden. Wir setzen  $X_0 = L^2(\Omega)$ . Auf  $H_0^1(\Omega)$  wählen wir eine äquivalente Norm durch

$$\|u\|_1 := \langle -A_0 u, u \rangle_{L^2},$$

und bezeichnen den zugehörigen Hilbertraum mit  $X_1$ . Wir behaupten, dass  $B$  dissipativ ist. Tatsächlich gilt für  $w = (u, v)$

$$\langle Bw, w \rangle_{X_1 \times X_0} = \langle v, u \rangle_{X_1} + \langle A_0 u, v \rangle_{L^2} = 0.$$

Der Operator  $B$  ist dicht definiert. Es bleibt zu zeigen, dass  $\lambda - B$  für  $\lambda = 1$  invertierbar ist. Für  $w = (u, v)$  ist die Gleichung

$$(\lambda - B)w = \lambda(u, v) - (v, A_0 u) = (f, g)$$

äquivalent zu  $v = \lambda u - f$  und

$$\lambda^2 u - A_0 u = \lambda f + g.$$

Dies ist lösbar, weil  $\lambda^2 - A_0$  invertierbar ist (siehe parabolische Gleichung). Damit ist das Lumer-Phillips Theorem anwendbar.  $\square$

**Bemerkung 3.12.** Zwei Bemerkungen zur Wellengleichung.

1.) Man kann die Wellengleichung auch rückwärts lösen. Wenn wir  $s = -t$  setzen und  $\partial_s^2 u - A_0 u = 0$  lösen, so finden wir eine Lösung auch für negative  $t$ . Die Gleichung erzeugt nicht nur eine Halbgruppe, sondern sogar eine Gruppe.

2.) Für die zeitabhängige Lösung gilt die Energieerhaltung (Testen der Gleichung mit  $\partial_t u$ ):

$$\partial_t \left( \frac{1}{2} \|\partial_t u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \langle -A_0 u, u \rangle \right) = 0.$$

Diese Energieerhaltung ist eine Konsequenz der Dissipativitätsgleichung  $\langle Bw, w \rangle_{X_1 \times X_0} = 0$ .

Wir wollen nun allgemeine elliptische Operatoren wie in (3.4) betrachten, also nicht notwendig symmetrisch und nicht notwendig negativ:

$$A : D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset X \rightarrow X = L^2(\Omega),$$

definiert mit elliptischen  $C^\infty$ -Koeffizienten durch

$$Au(x) = \sum_{i,j} \partial_{x_i} (a_{i,j}(x) \partial_{x_j} u(x)) + \sum_i b_i(x) \partial_{x_i} u(x) + c(x)u(x).$$

**Beispiel 3.13** (Wellengleichung, nicht-symmetrisch). Wir untersuchen die Gleichung aus Beispiel 3.11,

$$\partial_t^2 \bar{u} - A\bar{u} = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty).$$

mit dem Operator  $A$  nicht notwendig symmetrisch, allerdings mit  $a_{i,j} = a_{j,i}$ . Diese Gleichung erzeugt eine  $\omega$ -kontraktive Halbgruppe.

Wir wollen die Gleichung umschreiben und setzen

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t)e^{\alpha t}.$$

Dann lautet die Gleichung für  $u$

$$\partial_t^2 u + 2\alpha \partial_t u + \alpha^2 u - Au = 0.$$

Um diese Gleichung in die Form  $\partial_t w = Bw$  zu bringen, definieren wir

$$v := \partial_t u + \frac{\alpha}{2} u, \quad w := (u, v),$$

mit  $X$  und  $D(B)$  wie zuvor. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \partial_t v &= \partial_t^2 u + \frac{\alpha}{2} \partial_t u = -\frac{3}{2} \alpha \partial_t u + Au - \alpha^2 u \\ &= -\frac{3}{2} \alpha v - \frac{\alpha^2}{4} u + Au. \end{aligned}$$

Also setzen wir

$$B \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} u + v \\ (-\frac{\alpha^2}{4} + A)u - \frac{3}{2} \alpha v \end{pmatrix}.$$

Der Hauptteil

$$A_0 u(x) = \sum_{i,j} \partial_{x_i} (a_{i,j}(x) \partial_{x_j} u(x))$$

ist nach Voraussetzung symmetrisch. Wir wählen  $X_0 := L^2(\Omega)$  und auf  $X_1 := H_0^1(\Omega)$  das Skalarprodukt

$$\langle u, v \rangle_1 := \left\langle \left( \frac{\alpha^2}{4} - A_0 \right) u, v \right\rangle_{L^2}.$$

Wir behaupten, dass auf  $X_1 \times X_0$  der Operator  $B$  dissipativ ist (für  $\alpha > 0$  groß).

$$\begin{aligned} \langle Bw, w \rangle_{X_1 \times X_0} &= -\frac{\alpha}{2} \|u\|_1^2 + \langle v, u \rangle_1 + \left\langle \left( -\frac{\alpha^2}{4} + A \right) u, v \right\rangle_{L^2} - \frac{3}{2} \alpha \|v\|_{L^2}^2 \\ &\leq -\frac{\alpha}{2} \|u\|_1^2 + C \|u\|_{H^1} \|v\|_{L^2} - \frac{3}{2} \alpha \|v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Für  $\alpha > 0$  groß ist dies negativ, also  $B$  dissipativ. Weiterhin ist  $B$  dicht definiert und  $(1-B)(u, v) = (f_1, f_2)$  ist lösbar für alle  $(f_1, f_2) \in X$ , weil  $(\lambda - A)u = f$  lösbar ist für alle  $f \in L^2(\Omega)$ , mit Lösung  $u \in H^2$ . Wegen der Regularitätsabschätzung  $\|u\|_{H^2} \leq C \|f\|_{L^2}$  ist  $(1-B)^{-1}$  beschränkt, also erzeugt  $B$  eine kontraktive Halbgruppe. Die Ausgangsgleichung erzeugt dann eine  $\alpha$ -kontraktive Halbgruppe.

**Beispiel 3.14** (Plattengleichung). Für  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  glatt und beschränkt erzeugt die Gleichung

$$\partial_t^2 u + \Delta^2 u = 0$$

auf dem Raum  $H_0^2(\Omega)$  eine Halbgruppe.

Der Beweis kann wie in Beispiel 3.11 geführt werden, diesmal mit  $A = -\Delta^2$ . Wir definieren

$$\begin{aligned} v &:= \partial_t u, & w &:= (u, v), & X &:= H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega), \\ B(u, v) &:= (v, Au), & D(B) &:= (H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)) \times H_0^2(\Omega). \end{aligned}$$

Auf  $H_0^2(\Omega)$  wählen wir die äquivalente Norm  $\|u\|_{X_1} := \|\Delta u\|_{L^2}$ . Mit dieser Norm und dem zugehörigen Skalarprodukt ist  $B$  wieder dissipativ, denn

$$\langle Bw, w \rangle_{X_1 \times X_0} = \langle v, u \rangle_{X_1} + \langle Au, v \rangle_{L^2} = 0.$$

Wieder ist  $B$  dicht definiert und 1 ist in der Resolvente, weil  $\lambda^2 - A$  invertierbar ist (die Inverse kann als Minimierer der Bilinearform gefunden werden).

### 3.3 Erzeuger von stark stetigen Halbgruppen

**Proposition 3.15** (Iterierte von Resolventen). Sei  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ein abgeschlossener Operator. Für alle  $\lambda \in \rho(A)$  und alle  $n \geq 1$  lässt sich die iterierte Resolventenabbildung als eine Ableitung schreiben:

$$R(\lambda, A)^n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{(n-1)}} R(\lambda, A). \quad (3.9)$$

Falls  $A$  eine Halbgruppe mit Parametern  $M$  und  $\omega$  erzeugt, so gilt für  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ , und  $n \geq 1$

$$R(\lambda, A)^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty \tau^{n-1} e^{-\lambda\tau} S(\tau) d\tau. \quad (3.10)$$

In dieser Situation gilt die Abschätzung

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n} \quad \forall n \geq 1. \quad (3.11)$$

*Beweis.* Unser Ausgangspunkt ist die Darstellung aus (2.3),

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $|\lambda - \mu| < \|R(\mu, A)\|^{-1}$ . Durch  $(n-1)$ -fache Differentiation dieser Gleichung nach  $\lambda$  und Einsetzen von  $\lambda = \mu$  erhält man (3.9).

Wir benutzen die Integraldarstellung von  $R(\lambda, A)$  in (2.14). Wir berechnen die  $(n-1)$ -fache Ableitung von beiden Seiten. Dies liefert Gleichung (3.10).

Für die Abschätzung benutzen wir (3.10):

$$\begin{aligned} \|R(\lambda, A)^n u\| &= \frac{1}{(n-1)!} \left\| \int_0^{\infty} \tau^{n-1} e^{-\lambda\tau} S(\tau) u \, d\tau \right\| \\ &\leq \frac{M}{(n-1)!} \int_0^{\infty} \tau^{n-1} e^{(\omega - \operatorname{Re} \lambda)\tau} \|u\| \, d\tau = \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n} \|u\|. \end{aligned}$$

Damit ist die Abschätzung (3.11) für die iterierte Resolvente gezeigt.  $\square$

Mit Hilfe der iterierten Resolventen können wir nun das allgemeine Hille-Yosida Resultat angeben. Es besagt, dass die notwendige Bedingung (3.11) aus Proposition 3.15 auch hinreichend ist. Der Beweis des Satzes geht auf Feller, Miyadera und Phillips (1952) zurück.

**Satz 3.16** (Hille-Yosida, stark stetige Halbgruppen). *Für einen linearen Operator  $(A, D(A))$  auf einem Banachraum  $X$  sind äquivalent:*

1.  $(A, D(A))$  erzeugt eine stark stetige Halbgruppe.
2.  $(A, D(A))$  ist abgeschlossen und dicht definiert. Es gibt  $\omega, M > 0$ , so dass für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} \lambda > \omega$  gilt:  $\lambda \in \rho(A)$  und

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^n} \quad \forall n \geq 1. \quad (3.12)$$

*Beweisskizze.* Zur Implikation 1.  $\Rightarrow$  2.:  $A$  ist abgeschlossen und dicht definiert nach Satz 2.16. Die Aussage  $\operatorname{Re} \lambda > \omega \Rightarrow \lambda \in \rho(A)$  folgt aus Satz 2.18. Der wichtigste Punkt ist die iterierte Resolventenabschätzung, diese wurde in Proposition 3.15 nachgewiesen.

Zur Implikation 2.  $\Rightarrow$  1.: Die Idee ist, auf  $X$  eine äquivalente Norm einzuführen, bezüglich der  $A$  eine kontraktive Halbgruppe erzeugt. Die Stetigkeit der Halbgruppe überträgt sich dann auch auf die Ausgangsnorm.

Ohne Einschränkung können wir  $\omega = 0$  annehmen (siehe die Reskalierungsbemerkung 2.12). Wir führen zunächst für  $0 < \mu \in \mathbb{R}$  eine Norm ein durch ( $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ )

$$\|u\|_\mu := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu^n R(\mu, A)^n u\|_X.$$

Einerseits wird  $n = 0$  im Supremum mit betrachtet, daher gilt  $\|u\|_\mu \geq \|u\|_X$ . Andererseits erfüllt  $R(\mu, A)$  die Ungleichung (3.12), weswegen  $\|\mu^n R(\mu, A)^n u\|_X \leq M \|u\|_X$  gilt. Also ist die Norm  $\|\cdot\|_\mu$  äquivalent zur  $X$ -Norm.

Wir behaupten, dass die Resolvente bezüglich dieser Norm auf  $X$  eine einfache Abschätzung hat, nämlich

$$\|R(\lambda, A)\|_\mu \leq \frac{1}{\lambda} \quad \forall \lambda \in (0, \mu]. \quad (3.13)$$

Wir zeigen (3.13) zunächst für  $\lambda = \mu$ : Für eine Lösung  $u$  von  $(\mu - A)u = f$  gilt

$$\begin{aligned} \|f\|_\mu &= \|(\mu - A)u\|_\mu = \sup_{n \geq 0} \|\mu^n (\mu - A)R(\mu, A)^n u\|_X \\ &\geq \sup_{n \geq 1} \mu \|\mu^{n-1} R(\mu, A)^{n-1} u\|_X = \mu \|u\|_\mu. \end{aligned}$$

Dies zeigt (3.13) für  $\lambda = \mu$ .

Wir betrachten nun ein allgemeines  $\lambda \in [0, \mu]$ . Für die Lösung  $u$  von  $(\lambda - A)u = g$  können wir wegen  $(\mu - A)u = g + (\mu - \lambda)u =: f$  wie folgt rechnen (im ersten Schritt verwenden wir das obige Resultat  $\|u\|_\mu \leq \mu^{-1} \|f\|_\mu$ )

$$\|u\|_\mu \leq \frac{1}{\mu} \|f\|_\mu \leq \frac{1}{\mu} \|g + (\mu - \lambda)u\|_\mu \leq \frac{1}{\mu} \|g\|_\mu + \frac{\mu - \lambda}{\mu} \|u\|_\mu.$$

Multiplikation mit  $\mu$  und Umsortieren liefert die Behauptung (3.13).

Das Problem in (3.13) ist, dass die Abschätzung nur für  $\lambda \leq \mu$  gilt. Wir führen daher noch die Norm

$$\|u\|_{sup} := \sup_{\mu \in \mathbb{N}} \|u\|_\mu$$

ein. Diese Norm ist wieder äquivalent zur  $X$ -Norm, dies folgt wieder aus (3.12). Bezüglich dieser Norm gilt (3.13) für alle  $\lambda > 0$ . Der Operator  $A$  erzeugt eine kontraktive Halbgruppe bezüglich der  $\|\cdot\|_{sup}$ -Norm und damit insbesondere eine stark stetige Halbgruppe.  $\square$

## Unser Stand in der Halbgruppentheorie

Wir wollen die Ergebnisse der Abschnitte 2.3 bis 3.3 hier kompakt darstellen.

**Charakterisierung.** Wir wissen jetzt, wann für einen unbeschränkten linearen Operator  $A : X \rightarrow X$  die Gleichung

$$\partial_t u = Au, \quad u(0) = u_0 \quad (3.14)$$

lösbar ist: Genau dann, wenn für ein  $\omega > 0$

1.  $D(A)$  dicht
2.  $A$  abgeschlossen
3.  $\omega \in \rho(A)$
4. Resolventenabschätzung gilt

Die Resolventenabschätzung lautet  $\|R(\lambda, A)\| \leq |\operatorname{Re}(\lambda) - \omega|^{-1}$  für kontraktive Halbgruppen und  $\|R(\lambda, A)^n\| \leq M |\operatorname{Re}(\lambda) - \omega|^{-n}$  für alle  $n \geq 1$  für stark stetige Halbgruppen.

Wir wissen, dass diese Bedingungen auch notwendig sind. Falls wir also zeigen können, dass eine Bedingung nicht erfüllt ist, so wissen wir umgekehrt, dass  $A$  keine stark stetige Halbgruppe erzeugt.

**Anwendungen.** In Anwendungen auf Partielle Differentialgleichungen haben wir die Bedingungen wie folgt verifiziert:

1.  $\longleftrightarrow$  als Differentialoperator wegen Dichtheit glatter Funktionen
2.  $\longleftrightarrow$  Regularitätstheorie für die stationäre Gleichung
3.  $\longleftrightarrow$  Lösbarkeit einer stabilisierten stationären Gleichung
4.  $\longleftrightarrow$  aus Dissipativität

Der zweite Punkt ist mit Blick auf Partielle Differentialgleichungen etwas unbefriedigend. So muss etwa für die Konstruktion von Lösungen der Wärmeleitungsgleichung (mit Methoden der Partiiellen Differentialgleichungen) keine Regularitätstheorie für den elliptischen Operator verwendet werden, sondern nur Lax-Milgram.

**Lösungsbegriff.** In welchem Sinne liefert  $S(t)$  tatsächlich Lösungen? Proposition 2.15 liefert: Für alle Punkte  $u_0$  in der dichten Menge  $D(A)$  ist  $S(t)u_0$  eine Lösung der Gleichung im klassischen Sinn. Nach Satz 2.16 ist  $S(t)$  die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung eines solchen Lösungsoperators.

Außerdem ist  $u(t) := S(t)u$  für alle  $u \in X$  eine schwache Lösung in dem Sinne, dass

$$A \int_{t_1}^{t_2} u(t) dt = u(t_2) - u(t_1),$$

wobei insbesondere die linke Seite definiert ist, siehe (2.12).

# Kapitel 4

## Analytische Halbgruppen

### 4.1 Sektorielle Operatoren und analytische Halbgruppen

Als Motivation für die nachfolgenden Definitionen und Sätze betrachten wir ein endlichdimensionales Beispiel.

**Beispiel 4.1** (Matrix-Halbgruppe via Cauchy-Integralformel). *Wir betrachten auf  $X = \mathbb{C}^n$  eine Diagonalmatrix  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) : X \rightarrow X$  mit Einträgen  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  für  $j \leq n$ . Dann gilt für alle  $R > \|A\| = \max_k |\lambda_k|$  die Darstellung*

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad (4.1)$$

wobei  $\partial B_R(0) \subset \mathbb{C}$  eine Kreislinie in der komplexen Ebene beschreibt und das Liniennintegral im komplexen Sinn gemeint ist, also, für  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$  injektiv und  $C^1$ , und  $f : \Gamma := \gamma([0, T]) \rightarrow \mathbb{C}$  als  $\int_\gamma f(\lambda) d\lambda = \int_0^T f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$  mit der komplexen Multiplikation im Integranden.

Wir werten alle Ausdrücke explizit aus. Die Matrix  $(\lambda - A)$  ist auf  $\partial B_R(0)$  invertierbar. Dort gilt

$$(\lambda - A)^{-1} = \text{diag} \left( \frac{1}{\lambda - \lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \right).$$

Für  $x = (x_1, \dots, x_n)$  gilt in Komponente  $k$

$$\frac{1}{2\pi i} \left( \int_{\partial B_R(0)} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} x d\lambda \right)_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(0)} \frac{e^{t\lambda} x_k}{\lambda - \lambda_k} = e^{t\lambda_k} x_k$$

nach dem Residuensatz. Dies entspricht aber genau der  $k$ -ten Komponente von  $e^{At}x$ , wie man sie durch Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichung erhält.

Wir wollen nun zeigen, dass die obige Formel ganz allgemein für beschränkte Operatoren gilt.

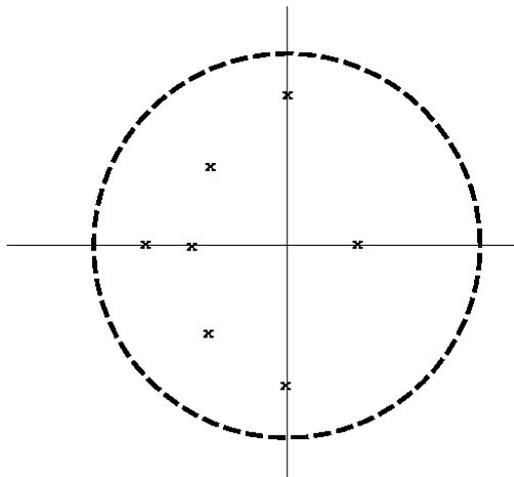


Abbildung 4.1: Berechnung einer Halbgruppe mit einem komplexem Integral, hier für einen beschränkten Operator.

**Lemma 4.2** (Beschränkte Operatoren). *Für einen Banachraum  $X$  und  $A \in \mathcal{L}(X)$  gilt die Darstellung*

$$e^{At} = S(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad (4.2)$$

wobei  $\gamma \subset \mathbb{C}$  eine positiv orientierte geschlossene Kurve in  $\mathbb{C}$  ist, die das Spektrum von  $A$  umschließt.

*Beweis.* Im Integral ist  $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$  stetig in  $\lambda$  (siehe Lemma 2.6) und das Bild von  $\gamma$  ist kompakt. Also ist  $(\lambda - A)^{-1}$  beschränkt auf  $\gamma$  und das Integral existiert (ebenso alle Integrale im Folgenden).

Das Integral in (4.2) hängt differenzierbar von  $t$  ab, wir berechnen für die Ableitung

$$\partial_t S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} \lambda (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Andererseits können wir den Operator  $A$  auf  $S(t)$  anwenden und finden

$$AS(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} A (\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Wegen  $(\lambda - A) \circ (\lambda - A)^{-1} = \text{id}$  folgt

$$\partial_t S(t) - AS(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} d\lambda = 0,$$

wobei die letzte Identität eine einfache Anwendung des Residuensatzes ist (die Funktion  $\lambda \mapsto e^{t\lambda}$  hat keine Singularität). Wir haben gezeigt, dass  $e^{At}$  die Differentialgleichung erfüllt.

Wir überprüfen noch die Anfangsbedingung, also  $S(0) = \text{id}$ . Dazu stellen wir zunächst fest, dass das Integral in (4.2) unabhängig ist vom Weg  $\gamma$ , genauer: Für zwei Wege  $\gamma$  und  $\gamma'$ , die beide das Spektrum von  $A$  umschließen, sind die Wegintegrale identisch. Auch dies folgt aus dem Residuensatz, denn zwischen den beiden Wegen hat der Integrand keine Singularitäten.

Wir benutzen nun die Unabhängigkeit des Integrals vom Weg, um das Integral mit Kreislinien zu berechnen, wobei wir große Radien  $R$  betrachten:

$$\begin{aligned} S(0)u &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R} (\lambda - A)^{-1} u \, d\lambda \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1} \left( \lambda - \frac{A}{R} \right)^{-1} u \, d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_1} \frac{1}{\lambda} u \, d\lambda = u. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma gezeigt.  $\square$

**Idee im Folgenden:** Analytische Halbgruppen sind solche Halbgruppen, die mit Formel (4.2) dargestellt werden können.

Wir werden leicht einsehen, dass für die folgenden Operatoren dieses Programm durchgeführt werden kann. Als Notationen führen wir für einen Winkel  $\Theta \in (0, \pi)$  den  $\Theta$ -Sektor  $\Sigma_\Theta$  ein.

$$\Sigma_\Theta := \{ \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid |\arg(\lambda)| < \Theta \}. \quad (4.3)$$

**Definition 4.3** (Sektorieller Operator). *Ein abgeschlossener Operator  $(A, D(A))$  mit  $D(A)$  dicht in einem Banachraum  $X$  heißt negativ sektoriell, falls es  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $\delta, M > 0$  gibt, so dass für  $\tilde{A} = A - \omega$  gilt:*

1. Der Sektor  $\Sigma_{\pi/2+\delta}$  ist in der Resolventenmenge von  $\tilde{A}$  enthalten,

$$\Sigma_{\pi/2+\delta} \subset \rho(\tilde{A}). \quad (4.4)$$

2. Die Resolvente erfüllt die Abschätzung

$$\|R(\lambda, \tilde{A})\| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall \lambda \in \Sigma_{\pi/2+\delta}. \quad (4.5)$$

Ein Operator  $B$  heißt sektorieller Operator, falls  $-B$  ein negativ sektorieller Operator ist.

Unserer Idee folgend definieren wir nun ein Familie  $S(t)$  mit der Cauchy-Integralformel. Dazu wählen wir eine stückweise glatte Kurve  $\gamma \subset \Sigma_{\pi/2+\delta}$ , die für  $\delta' \in (0, \delta)$  von  $\infty e^{-i(\pi/2+\delta')}$  nach  $\infty e^{+i(\pi/2+\delta')}$  läuft;  $\gamma$  liege ganz innerhalb von  $\Sigma_{\pi/2+\delta}$ . Außerhalb einer kompakten Menge gelte  $|\arg \gamma| > \pi/2 + \delta'$ , vergleiche Abbildung 4.2.

Wir werden in den nachfolgenden Beweisen meist annehmen, dass  $\omega = 0$  gewählt werden kann. Dies stellt nach dem Reskalierungsprinzip aus Bemerkung 2.12 keine Einschränkung dar.

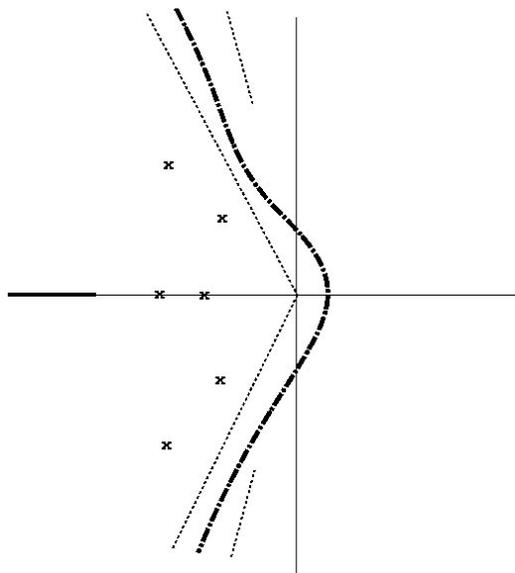


Abbildung 4.2: Berechnung einer Halbgruppe mit einem komplexem Integral, hier für einen sektoriellen Operator.

**Definition 4.4** (Definition von  $S(t)$  für einen sektoriellen Operator). *Zu einem negativ sektoriellen Operator  $A$  mit  $\omega = 0$  definieren wir eine Familie  $S(t) \in \mathcal{L}(X)$  durch*

$$S(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} d\lambda, \quad (4.6)$$

wobei  $\gamma$  wie oben gewählt ist. Wir ergänzen mit  $S(0) := id$ . Das Integral ist wohldefiniert und unabhängig von der Wahl von  $\gamma$  für alle  $t \in \Sigma_{\delta''} \cup \{0\}$  und  $\delta'' \in (0, \delta')$ .

Wir berechnen für das Argument des Integrals

$$\|e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1}\| \leq |e^{t\lambda}| \|(\lambda - A)^{-1}\| \leq e^{\operatorname{Re}(t\lambda)} \frac{M}{|\lambda|}.$$

Für  $\lambda \in \gamma$  gilt  $|\arg(\lambda) \mp \pi/2| > \delta'$ . Also für  $t$  mit  $|\arg(t)| < \delta''$

$$\operatorname{Re}(t\lambda) \leq -|t| \sin(\delta' - \delta'') \cdot |\lambda|.$$

Das Argument des Integrals ist also exponentiell abfallend entlang der Kurve  $\gamma$ . Daher ist das Integral definiert.

Für einen zweiten Weg  $\gamma'$  behaupten wir, dass die Differenz der Integrale über  $\gamma$  und über  $\gamma'$  verschwindet. Wir verbinden die Wege weit außen mit Verbindungsstücken. Wegen des exponentiellen Abfall des Integranden liefern die Integrale über von der 0 entfernte Wege kleine Beiträge. Das verbleibende Ringintegral verschwindet nach dem Residuensatz. Wir finden die Unabhängigkeit der Definition vom Weg.

In der Entwicklung der Theorie ist nun der nächste Schritt der Nachweis, dass  $S(t)$  eine analytische Halbgruppe ist. Dabei verwenden wir folgende Definition.

**Definition 4.5** (Analytische Halbgruppe). *Eine Familie  $S(t)$  für  $t \in \Sigma_\delta \cup \{0\}$  heißt analytische Halbgruppe, falls*

1.  $S(0) = id$  und  $S(t) \circ S(s) = S(t+s)$  für alle  $t, s \in \Sigma_\delta$ .
2.  $t \mapsto S(t) \in \mathcal{L}(X)$  ist analytisch auf  $\Sigma_\delta$ .
3. Es gilt  $\lim_{\Sigma_\delta \ni t \rightarrow 0} S(t)u = u$  für alle  $u \in X$ .

**Satz 4.6** (Halbgruppe zum sektoriellen Operator). *Ein negativ sektorieller Operator  $A$  erzeugt eine analytische Halbgruppe  $S(t)$ . Mit der Zahl  $\omega$  aus der Definition 4.3 gilt für ein  $C > 0$*

$$\|S(t)\| \leq C e^{\omega|t|}. \quad (4.7)$$

*Beweis.* Im Fall  $\omega \neq 0$  gehen wir zum Operator  $\tilde{A} = A - \omega$  über. Für  $\tilde{A}$  gibt es die Familie  $\tilde{S}(t)$  gemäß Definition 4.4. Falls wir zeigen, dass  $\tilde{S}$  eine analytische Halbgruppe ist mit Erzeuger  $\tilde{A}$  und der Abschätzung  $\|\tilde{S}(t)\| \leq C$ , so sind wir fertig, denn  $A$  erzeugt dann die Halbgruppe

$$S(t) = \tilde{S}(t) e^{\omega t}.$$

Wir nehmen also im Folgenden immer  $\omega = 0$  an.

Die analytische Abhängigkeit von  $S(t)$  von  $t$  folgt aus der Definition mit Gleichung (4.6), denn der Integrand hängt analytisch von  $t$  ab. Die Identität  $S(0) = id$  gilt nach Definition.

*Schritt 1: Funktionalgleichung.* Die Funktionalgleichung kann direkt nachgerechnet werden mit der Resolventenidentität (2.1):

$$\begin{aligned} S(t) \circ S(s) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} \int_{\gamma'} e^{s\lambda'} (\lambda' - A)^{-1} d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} \int_{\gamma'} e^{t\lambda} e^{s\lambda'} ((\lambda - A)^{-1} - (\lambda' - A)^{-1}) \frac{1}{\lambda' - \lambda} d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} \int_{\gamma'} e^{s\lambda'} \frac{1}{\lambda' - \lambda} d\lambda' d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma'} e^{s\lambda'} (\lambda' - A)^{-1} \int_{\gamma} e^{t\lambda} \frac{1}{\lambda' - \lambda} d\lambda d\lambda' \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} (\lambda - A)^{-1} e^{s\lambda} d\lambda = S(t+s). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in (\*) den Residuensatz verwendet: Wir können annehmen, dass die Kurve  $\gamma'$  rechts von  $\gamma$  liegt. Dann umschließt  $\gamma'$  alle  $\lambda \in \gamma$ , daher ist das Residuum im ersten Integral  $e^{s\lambda}$ . Im zweiten Integral umschließt  $\gamma$  kein  $\lambda' \in \gamma'$ , daher verschwindet das Residuum.

Um das Argument zu präzisieren, muss der Residuensatz für die nicht-geschlossenen Kurven  $\gamma$  gezeigt werden. Dies geschieht ohne Probleme, weil die Integrale konvergieren und mit beliebig kleinem Fehler die Kurven geschlossen werden können.

*Schritt 2: Beschränktheit.* Um die Norm zu berechnen, wählen wir für gegebenes  $t$  einen Weg  $\gamma$ , der im Kreissegment mit Radius  $|t|^{-1}$  um die Null läuft (Wegstück  $\gamma_1$ ), und sonst aus zwei Halbgeraden besteht (unzusammenhängendes Wegstück  $\gamma_2$ ).

$$\begin{aligned} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |e^{t\lambda}| \|(\lambda - A)^{-1}\| d|\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} e^1 \frac{M}{|\lambda|} d|\lambda| + \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_2} e^{-|t|\sin(\delta' - \delta'')\cdot|\lambda|} \frac{M}{|\lambda|} d|\lambda| \\ &\leq eM + C(\delta', \delta'') \cdot M, \end{aligned}$$

denn das zweite Integral erfüllt nach einer Substitution  $x = |\lambda||t|$  mit  $dx = |t| d|\lambda| = \frac{x}{|\lambda|} d|\lambda|$  und für  $\mu := -\sin(\delta' - \delta'')$

$$I_2(t) := \int_{\gamma_2} e^{\mu|t|\lambda} \frac{M}{|\lambda|} d|\lambda| \leq M \int_1^{\infty} e^{\mu x} \frac{1}{x} dx \leq CM.$$

Die Familie  $S(t)$  ist also gleichmäßig beschränkt und (4.7) ist gezeigt.

*Schritt 3: Stetigkeit in  $t = 0$ .* Wir wollen die Stetigkeit in der 0 zeigen, also Eigenschaft 3 aus Definition 4.5. Wegen der Beschränktheit von  $S(t)$  reicht es,

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)u - u = 0$$

für  $u \in D(A)$  zu zeigen. Nach dem Residuensatz gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} \frac{1}{\lambda} d\lambda = 1.$$

Damit schreiben wir

$$\begin{aligned} S(t)u - u &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} \left( (\lambda - A)^{-1} - \frac{1}{\lambda} \right) u d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{t\lambda} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Au d\lambda. \end{aligned}$$

Im zweiten Schritt haben wir die Identität  $R(\lambda, A)Au = \lambda R(\lambda, A)u - u$  benutzt, die durch Anwendung von  $\lambda - A$  sofort folgt. Die Integranden sind beschränkt (gleichmäßig in  $t$  für  $|t| \leq 1$ ) durch die über  $\gamma$  integrierbare Funktion

$$g(\lambda) := \frac{M}{|\lambda|^2} \|Au\| \exp(\sup_{\tau} \operatorname{Re} \gamma(\tau)).$$

Nach dem Satz über dominierte Konvergenz konvergiert das Integral gegen das Integral über die Limesfunktion, also, für  $t \rightarrow 0$ ,

$$S(t)u - u \rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\lambda} (\lambda - A)^{-1} Au.$$

Dieses Integral verschwindet; hier verwenden wir wieder den Residuensatz für offene Wege, aber wir müssen diesmal die Kurve  $\gamma$  nach rechts schließen, denn nicht der

exponentielle Faktor, sondern der quadratische Abfall (der auch rechts gilt) sichert die Konvergenz des Integrals.

*Schritt 4: Erzeuger.* Wir müssen noch beweisen, dass der Erzeuger der Halbgruppe  $S(t)$  aus Gleichung (4.6) der Operator  $(A, D(A))$  ist.

Die Halbgruppe  $S(t)$  ist eine stark stetige Halbgruppe, hat also nach Satz 2.16 einen abgeschlossenen, dicht definierten Erzeuger  $(B, D(B))$ . Nach Satz 2.18 gilt für die Resolvente in  $\lambda > \omega = 0$  die Darstellung

$$R(\lambda, B)u = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, d\tau.$$

Wir setzen in ein endliches Integral die Definition der Halbgruppe ein und finden mit einer Integration

$$\begin{aligned} \int_0^{t_0} e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, d\tau &= \int_0^{t_0} e^{-\lambda\tau} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\tau\lambda'} (\lambda' - A)^{-1}u \, d\lambda' \, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{\lambda' - \lambda} \left( e^{t_0(\lambda' - \lambda)} - 1 \right) (\lambda' - A)^{-1}u \, d\lambda'. \end{aligned}$$

Wir verwenden wieder einen verallgemeinerten Residuensatz für offene Wege (die rechts geschlossen werden), um für  $\lambda$  rechts von  $\gamma$  zu erhalten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{R(\lambda', A)u}{\lambda' - \lambda} \, d\lambda' = -R(\lambda, A)u.$$

Wir setzen dies oben ein und erhalten

$$\begin{aligned} R(\lambda, B)u &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_0^{t_0} e^{-\lambda\tau} S(\tau)u \, d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_\gamma \frac{1}{\lambda' - \lambda} e^{t_0(\lambda' - \lambda)} (\lambda' - A)^{-1}u \, d\lambda' + R(\lambda, A)u. \end{aligned}$$

Der Integrand des ersten Integrals ist gleichmäßig beschränkt durch eine integrierbare Funktion (quadratischer Abfall). Daher konvergiert nach dem Satz von Lebesgue für  $t_0 \rightarrow \infty$  das Integral gegen das Integral des Limes. Für  $\lambda > 0$  und  $\gamma$  mit  $\operatorname{Re} \gamma < \lambda$  also gegen 0. Wir haben damit gezeigt, dass die Resolventen übereinstimmen,

$$R(\lambda, B) = R(\lambda, A).$$

Eine Anwendung von  $(\lambda - A)$  von links und von  $(\lambda - B)$  von rechts zeigt, dass  $Au = Bu$  für  $u \in D(A) \cap D(B)$ . Weiterhin ist  $\lambda$  in der Resolventenmenge sowohl von  $A$  (Definition von sektoriell), als auch von  $B$  (Erzeuger einer kontraktiven Halbgruppe), also gilt  $D(A) = R(\lambda, A)X = R(\lambda, B)X = D(B)$ . Der Satz ist bewiesen.  $\square$

Tatsächlich gilt auch die Umkehrung in Satz 4.6.

**Satz 4.7** (Erzeuger einer analytischen Halbgruppe). *Der Erzeuger  $A$  einer analytischen Halbgruppe  $S(t)$  auf einem Banachraum  $X$  ist ein negativ sektorieller Operator.*

*Beweisskizze.* Sei  $S(t)$ ,  $t \in \Sigma_\delta$ , eine analytische Halbgruppe mit  $\|S(t)\| \leq C$ . Wir wollen zeigen, dass  $A$  negativ sektoriell ist mit  $\omega = 0$ .

Wir fixieren einen kleinen Winkel  $\vartheta \in \mathbb{R}$ ,  $0 \neq |\vartheta| < \delta$ . Für diesen Winkel betrachten wir die Abbildung  $[0, \infty) \ni t \mapsto S(e^{i\vartheta}t)$ . Diese Abbildung ist eine beschränkte Halbgruppe mit Erzeuger  $e^{i\vartheta}A$ . Nach Satz 2.18 erfüllt also  $e^{i\vartheta}A$  die Resolventenabschätzung

$$\|R(\lambda, e^{i\vartheta}A)\| \leq \frac{C}{\operatorname{Re} \lambda}$$

für  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Dann gilt für Winkel  $\varphi > 0$  und Radien  $r > 0$  im Falle  $\vartheta < 0$  und  $|\varphi| \leq |\vartheta|/2$

$$\|R(e^{i\varphi}ir, A)\| = \|R(e^{i\varphi}e^{i\vartheta}ir, e^{i\vartheta}A)\| \leq \frac{C}{\operatorname{Re} e^{i(\vartheta+\varphi)}ir} = \frac{C'(\vartheta)}{r}.$$

Die negative imaginäre Halbachse wird analog behandelt. Wir erhalten damit die Resolventenabschätzung auf einem Sektor um die imaginäre Achse. Auf  $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \delta |\operatorname{Im} \lambda|\}$  folgt die Abschätzung sofort aus der Hille-Yosida Abschätzung.  $\square$

## 4.2 Invariante Unterräume, Normale Operatoren

Wir haben im letzten Abschnitt für negativ sektorielles  $A$  und die Funktion  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi(\lambda) = e^{t\lambda}$  (wir betrachten hier  $t$  als fixiert) die Funktion  $\varphi(A)$  gebildet. Dieses Konzept wird im *Funktionalkalkül* verallgemeinert: Man bildet für holomorphe Funktionen  $\varphi : \Sigma_\Theta \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\Theta > \pi/2$  den Operator

$$\varphi(A) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \varphi(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda.$$

Wir wollen hier keinen Funktionalkalkül entwickeln, für uns sind hier vor allem zwei Funktionen interessant: Die Exponentialfunktion  $\varphi(\lambda) = e^{t\lambda}$  und die gebrochene Potenz  $\varphi(\lambda) = (-\lambda)^\alpha$ . Zunächst jedoch betrachten wir Projektionen; sie gehören formal zu charakteristischen Funktionen  $\varphi(\lambda) = \chi_B(\lambda)$  mit  $B \subset \mathbb{C}$ .

### 4.2.1 Projektionen

Wir nehmen hier an, dass sich das Spektrum von  $A$  in zwei disjunkte abgeschlossene Teilmengen zerlegen lässt,  $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2$ . Dazu wählen wir eine Menge  $\Sigma_1 \subset \mathbb{C}$  die glatt berandet ist und beschränkt, so dass  $\sigma_1 \subset \Sigma_1$  und  $\Sigma_1 \cap \sigma_2 = \emptyset$ . Der Projektionsoperator  $P_1$  zu  $\varphi(\lambda) = \chi_{\Sigma_1}$  wird definiert durch

$$P_1 := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Sigma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \quad (4.8)$$

Wir setzen  $\gamma_1 = \partial\Sigma_1$  für den Weg (oder die Vereinigung von Wegen) der  $\sigma_1$  umschließt, aber keinen Punkt von  $\sigma_2$ .

**Proposition 4.8** (Projektionen und invariante Zerlegung des Raumes). *Sei  $A$  negativ sektoriell, das Spektrum von  $A$  bestehe aus zwei nicht-zusammenhängenden Mengen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$ . Mit einer beschränkten und glatt berandeten offenen Menge  $\Sigma_1$  gelte  $\sigma_1 \subset \Sigma_1$ . Wir definieren  $P_1$  durch (4.8) und setzen  $P_2 := \text{id} - P_1$ .*

*Dann gilt: Die  $P_j : X \rightarrow X$  sind Projektionen. Der Raum  $X$  kann zerlegt werden in*

$$X = X_1 \oplus X_2, \quad X_j = P_j(X).$$

*Die Zerlegung ist invariant für  $A$  und wir können  $A_j : D(A) \cap X_j \rightarrow X_j$  definieren. Es gilt*

$$\sigma(A_j) = \sigma_j.$$

*Der Operator  $A_1$  ist ein beschränkter Operator und der Operator  $A_2$  ist sektoriell.*

*Beweis.* Zunächst stellen wir fest, dass  $P_1$  wohldefiniert ist als Operator  $X \rightarrow X$ , denn wir integrieren eine stetige Funktion über einen glatten Weg von endlicher Länge. Der Operator  $P_1$  ist stetig und linear. Da die Resolvente in den Definitionsbereich von  $A$  abbildet, gilt sogar  $P_1 : X \rightarrow D(A)$ .

*Schritt 1: Projektionseigenschaft.* Der Wert des Integrals in der Definition von  $P_1$  ist unabhängig vom gewählten Weg. Wir konstruieren  $\gamma'_1$ , indem wir von  $\gamma_1$  ausgehend die umschlossene Menge etwas vergrößern. Dann gilt

$$\begin{aligned} P_1 \circ P_1 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma'_1} (\lambda - A)^{-1} (\lambda' - A)^{-1} d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma'_1} \frac{1}{\lambda - \lambda'} [(\lambda - A)^{-1} - (\lambda' - A)^{-1}] d\lambda' d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} d\lambda = P_1. \end{aligned}$$

In der vorletzten Gleichung haben wir für beide Terme den Residuensatz verwendet. Das erste Integral liefert den gewünschten Term, weil  $\lambda$  innerhalb der Kurve  $\gamma'_1$  liegt. Im zweiten Integral führen wir zuerst die  $\lambda$ -Integration aus; der Term verschwindet, weil  $\lambda'$  außerhalb der Kurve  $\gamma_1$  liegt.

Die Relation  $P_1 + P_2 = \text{id}$  gilt nach Definition. Insbesondere ist auch  $P_2$  eine Projektion, denn  $P_2 \circ P_2 = \text{id} - 2P_1 + P_1 \circ P_1 = \text{id} - P_1 = P_2$ . Jedes  $x$  kann geschrieben werden als  $x = P_1x + P_2x$ , und die Zerlegung ist eindeutig, denn  $0 = x_1 + x_2$  impliziert  $0 = P_1x_1 + P_1 \circ P_2x_2 = x_1$ , und ebenso für  $x_2$ . Dabei nutzen wir  $P_1 \circ P_2 = P_1 \circ (\text{id} - P_1) = 0$ .

*Schritt 2: Invarianz der Unterräume.* Für  $X_j := P_j(X)$  folgt aus der Definition, dass  $AP_1 = P_1A$  gilt:

$$AP_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} A(\lambda - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda - A)^{-1} A d\lambda = P_1A.$$

Dies impliziert auch  $AP_2 = P_2A$ . Wir schließen, dass  $A$  den Unterraum  $X_j$  in sich abbildet.

*Schritt 3: Spektren.* Wir behaupten  $\sigma_1 \subset \sigma(A_1)$ . Dies folgt, wenn wir zeigen:

$$\lambda \in \rho(A_1) \quad \Rightarrow \quad \lambda \notin \sigma_1. \quad (4.9)$$

Sei dafür  $\lambda \in \rho(A_1)$  beliebig. Falls  $\lambda$  von  $\gamma_1$  nicht umschlossen wird, so gilt  $\lambda \notin \sigma_1$ , weil  $\gamma_1$  ja  $\sigma_1$  umschließt. Wir nehmen also an, dass  $\lambda$  von  $\gamma_1$  umschlossen wird. Unser Ziel ist es, einen inversen Operator für  $\lambda - A$  finden. Da  $(\lambda - A_1)^{-1} : X_1 \rightarrow X_1 \cap D(A)$  existiert, müssen wir nur eine Inverse auf  $X_2$  finden. Diese erraten wir als die eckige Klammer des nachfolgenden Ausdrucks. In der Rechnung verwenden wir in der ersten Zeile  $\lambda - A = (\lambda - \lambda') + (\lambda' - A)$ .

$$\begin{aligned} (\lambda - A) & \left[ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{-1}{\lambda - \lambda'} (\lambda' - A)^{-1} d\lambda' \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{-1}{\lambda - \lambda'} d\lambda' - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} (\lambda' - A)^{-1} d\lambda' \\ &= \text{id} - P_1 = P_2. \end{aligned}$$

Wenn wir die Abbildungen auf beiden Seiten auf  $X_2$  einschränken, so steht rechts  $\text{id}|_{X_2}$ , wir haben mit der Klammer  $[\cdot]$  also eine Rechtsinverse zu  $(\lambda - A) : D(A) \cap X_2 \rightarrow X_2$  gefunden. Da die Klammer mit  $A$  vertauscht, haben wir eine Inverse  $(\lambda - A_2)^{-1} : X_2 \rightarrow X_2 \cap D(A)$  gefunden. Die Abbildung

$$(\lambda - A_1)^{-1} \circ P_1 + (\lambda - A_2)^{-1} \circ P_2$$

ist eine Inverse für  $\lambda - A$  auf  $X$ .

Die andere Implikation in (4.9) und die Spektraleigenschaften für  $A_2$  folgen mit ähnlichen Argumenten.

*Schritt 4: Operatoreigenschaften.* Es gilt

$$\begin{aligned} A_1 &= A \circ P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} [-(\lambda - A) + \lambda](\lambda - A)^{-1} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} [-\text{id} + \lambda(\lambda - A)^{-1}] d\lambda, \end{aligned}$$

was die Beschränktheit von  $A_1$  zeigt. Die Sektorialität von  $A_2$  folgt aus der Lage des Spektrums und der Tatsache, dass die Resolvente von  $A_2$  durch die Resolvente von  $A$  abgeschätzt werden kann.  $\square$

## 4.2.2 Normale Operatoren

Wir machen einen Einschub über normale Operatoren, um folgende Frage nochmals zu beleuchten.

**Frage:** Impliziert die Lage des Spektrums schon die Resolventenabschätzung?

Begründung für diese Frage: Der spezielle Operator  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots) : l^2(\mathbb{N}) \rightarrow l^2(\mathbb{N})$  erfüllt

$$R(\lambda, A) = \text{diag}((\lambda - \lambda_1)^{-1}, \dots, (\lambda - \lambda_n)^{-1}, \dots).$$

Insbesondere erwarten wir die Abschätzung

$$\|R(\lambda, A)\| = \sup_n |(\lambda - \lambda_n)^{-1}| = \left( \inf_n |\lambda - \lambda_n| \right)^{-1} = \text{dist}(\lambda, \sigma(A))^{-1}.$$

Falls also  $\sigma(A) \subset \mathbb{C} \setminus \Sigma_\theta$  mit  $\theta > \pi/2$ , dann gilt die Resolventenabschätzung.

Wir haben mit den Verschiebungsdynamiken in Abschnitt 2.3 Gegenbeispiele zu obiger Frage kennengelernt: Die Lage des Spektrums war wie gewünscht, aber die Resolventenabschätzung war trotzdem nicht erfüllt. Wir fragen also anders: Für welche Klasse von Operatoren ist die Antwort auf obige Frage positiv? Der nachfolgende Satz liefert eine hinreichende Bedingung: Für *normale Operatoren* muss nur die Lage des Spektrums überprüft werden, nicht die Resolventenabschätzung.

Wir nennen einen Operator auf einem Hilbertraum normal, falls er mit seinem adjungierten Operator vertauscht:  $AA' = A'A$ .

In den nachfolgenden Beweisen verwenden wir für beschränkte Operatoren  $T$  den Spektralradius

$$r(T) := \sup \{ |\mu| : \mu \in \sigma(T) \} \stackrel{(!)}{=} \lim_n \|T^n\|^{1/n}. \quad (4.10)$$

**Übung 4.1.** *Man beweise die markierte Gleichheit in (4.10). Man zeige weiterhin die Gleichheit  $\|T\| = \|T'\|$  und schließe daraus für normale Operatoren  $A$  die Gleichheit  $r(A) = r(A')$ .*

**Satz 4.9** (Halbgruppe zu einem normalen Operator). *Sei  $A$  ein normaler Operator auf einem Hilbertraum  $X$  mit*

$$\sigma(-A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \arg(z) < \vartheta\}$$

*für ein  $\vartheta \in (0, \pi/2)$ . Dann erzeugt  $A$  eine analytische Halbgruppe.*

Der Beweis des Satzes basiert auf elementaren Eigenschaften abgeschlossener Operatoren in Hilberträumen. Es gilt

**Lemma 4.10** (Norm und Spektralradius). *Ein normaler Operator  $A \in \mathcal{L}(X)$  auf einem Hilbertraum  $X$  erfüllt*

$$r(A) = \|A\|. \quad (4.11)$$

*Beweis des Lemmas.* Für einen selbstadjungierten Operator  $T$  mit  $|\langle Tx, x \rangle| \leq C\|x\|^2$  gilt  $\|T\| \leq C$ . Dies folgt, indem wir für  $x, y \in X$  mit  $\|x\| = \|y\| = 1$  rechnen:

$$\begin{aligned} \text{Re} \langle Tx, y \rangle &= \frac{1}{4} \{ \langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle \} \\ &\leq \frac{1}{4} C \{ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \} \\ &\leq \frac{1}{2} C \{ \|x\|^2 + \|y\|^2 \} = C. \end{aligned}$$

Die Rechnung liefert für  $T = A'A$

$$\begin{aligned}\|A'A\| &= \sup \{ \langle A'Ax, x \rangle \mid x \in X, \|x\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \langle Ax, Ax \rangle \mid x \in X, \|x\| = 1 \} = \|A\|^2,\end{aligned}$$

also  $\|T\| = \|A\|^2$ .

Wir können das obige Argument auch auf  $T$  und seine Potenzen anwenden: Der Operator  $T = A'A$  ist selbstadjungiert und mit  $T$  anstelle von  $A$  in obiger Rechnung erhalten wir wegen  $T^2 = T'T$  auch  $\|T^2\| = \|T\|^2$ . Dies gilt ebenso für höhere Potenzen, es gilt also auch  $r(T) = \|T\|$ .

Für einen normalen Operator  $A$  erhalten wir unter Verwendung von  $r(A) = r(A')$

$$\begin{aligned}r(A)^2 &= r(A)r(A') = \lim_n (\|A^{2^n}\| \|(A')^{2^n}\|)^{2^{-n}} \geq \lim_n (\|A^{2^n}(A')^{2^n}\|)^{2^{-n}} \\ &= \lim_n (\|(A'A)^{2^n}\|)^{2^{-n}} = r(A'A) = \|A'A\| = \|A\|^2.\end{aligned}$$

Da  $r(A) \leq \|A\|$  immer gilt, haben wir  $r(A) = \|A\|$  erhalten.  $\square$

*Beweis von Satz 4.9.* Für normales  $A$  und  $\lambda \in \rho(A)$  ist auch  $R(\lambda, A)$  normal (als Inverse eines normalen Operators). Also gilt nach Lemma 4.10

$$\|R(\lambda, A)\| = r(R(\lambda, A)).$$

Für den Spektralradius kann eine Rechnung wie im einführenden Beispiel durchgeführt werden: Man zeigt  $\sigma(R(\lambda, A)) = (\lambda - \sigma(A))^{-1}$  und rechnet damit

$$\begin{aligned}r(R(\lambda, A)) &= \sup \{ |\mu| : \mu \in \sigma(R(\lambda, A)) \} \\ &= \sup \{ |\mu| : \mu \in (\lambda - \sigma(A))^{-1} \} = \sup \left\{ \frac{1}{|\lambda - s|} : s \in \sigma(A) \right\} \\ &= \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))}.\end{aligned}$$

Der Spektralradius der Resolventen hängt also nur vom Abstand zum Spektrum ab. Für Operatoren mit Spektrum in einem Sektor ist der Abstand  $\text{dist}(\lambda, \sigma(A))$  von der Ordnung  $|\lambda|$  (in einem verkleinerten Sektor für  $\lambda$ ). Für normale Operatoren überträgt sich dies als Abschätzung für die Norm der Resolvente.

Der Operator ist daher negativ sektoriell (mit  $\omega = 0$ ) und erzeugt nach Satz 4.6 eine analytische Halbgruppe.  $\square$

### 4.3 Gebrochene Potenzen von sektoriellen Operatoren

Wir betrachten Potenzen von sektoriellen Operatoren. Dafür sei  $A$  sektoriell zu  $\omega = 0$  auf einem Banachraum  $X$  mit  $0 \in \rho(A)$  und  $\alpha > 0$ . Wir betonen, dass hier  $A$  *positiv* sektoriell ist. Nach dem Funktionalkalkül setzt man

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \lambda^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \quad (4.12)$$

Hierbei ist  $\gamma$  ein Weg in  $\rho(A) \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-)$ , der von  $\infty e^{i(\pi/2-\delta)}$  nach  $\infty e^{i(-\pi/2+\delta)}$  läuft für ein  $\delta \in (0, \pi/2)$ .

Der Abfall des Arguments ist wie  $|\lambda|^{-1-\alpha}$ . Daher kann man für  $\alpha \in (0, 1)$  den Weg  $\gamma$  deformieren, bis man nur noch über  $\mathbb{R}_-$  integriert (zweimal, in umgekehrter Richtung). Wir erhalten

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i} (e^{-\pi i \alpha} - e^{\pi i \alpha}) \int_{\mathbb{R}_-} |\lambda|^{-\alpha} (\lambda - A)^{-1} d\lambda. \quad (4.13)$$

Auf der Basis dieser Formel definieren wir nun gebrochene Potenzen.

**Definition 4.11** (Gebrochene Potenz eines sektoriellen Operators). *Sei  $A$  sektoriell zu  $\omega = 0$  auf einem Banachraum  $X$  mit  $0 \in \rho(A)$ . Für  $\alpha \in (0, 1)$  definieren wir einen beschränkten Operator  $A^{-\alpha}$  durch*

$$A^{-\alpha} := \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda. \quad (4.14)$$

*Wir setzen  $A^0 := id$  und für  $\beta = n + \alpha$  mit  $1 \leq n \in \mathbb{N}$  und  $\alpha \in [0, 1)$  setzen wir  $A^{-\beta} = A^{-n} A^{-\alpha}$ . Für  $\beta > 0$  setzen wir  $A^\beta = (A^{-\beta})^{-1}$  mit Definitionsbereich  $D(A^\beta) = A^{-\beta}(X)$ .*

Für die Definition müssen wir sicherstellen, dass für positives  $\beta = n + \alpha$  und festes  $u$  die Lösung  $x$  von  $A^{-\beta}x = u$  eindeutig ist. Anwendung von  $A^{-1+\alpha}$  liefert  $A^{-1-n}x = A^{-1+\alpha}u$ , also die Eindeutigkeit. Diese formale Rechnung wird mit dem nachfolgenden Satz gerechtfertigt.

**Satz 4.12** (Darstellung der gebrochenen Potenz). *Für einen sektoriellen Operator  $A$  mit  $\operatorname{Re}(\sigma(A)) > 0$  und  $\alpha > 0$  kann die Potenz dargestellt werden durch*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} dt. \quad (4.15)$$

*Es gilt die Funktionalgleichung  $A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-\alpha-\beta}$  für alle  $\alpha, \beta > 0$ .*

Bevor wir den Satz beweisen, betrachten wir Gleichung (4.15) für reelle Zahlen  $A > 0$ . Man weise zur Übung durch eine Substitution nach, dass der Ausdruck aus (4.15) richtig in  $A$  skaliert, dass also  $(rA)^{-\alpha} = r^{-\alpha} A^{-\alpha}$  gilt für  $r > 0$ . Sobald dies gezeigt ist, ist (4.15) nur noch eine mögliche Definition von  $\Gamma(\alpha)$ .

*Beweis.* Wir stellen zunächst fest, dass zu einem sektoriellen Operator  $A$  mit  $0 \in \rho(A)$  eine Zahl  $\omega < 0$  existiert, so dass  $A + \omega$  immer noch sektoriell ist. Dies folgt aus der Abgeschlossenheit des Spektrums und der Beschränktheit von  $A^{-1}$  (folgt aus der Abgeschlossenheit, siehe Bemerkung 2.3). Insbesondere folgt der exponentielle Abfall der Halbgruppe und damit die Existenz des Integrals in (4.15).

Wir zeigen für den Ausdruck aus (4.15) nacheinander

1. Für  $\alpha = 1$  gilt  $A^{-1} = A^{-1}$ , d.h. (4.15) liefert die Inverse von  $A$
2. Die Funktionalgleichung ist erfüllt (insbesondere auch für  $\beta = 1$ )

3.  $A^{-\alpha}$  stimmt für  $\alpha \in (0, 1)$  mit der Definition in (4.14) überein.

Der Satz ist bewiesen, sobald diese 3 Punkte nachgewiesen sind.

Ad 1. Für  $\alpha = 1$  liefert (4.15)

$$A^{-1} = \int_0^{\infty} e^{-At} dt.$$

Nach Satz 2.18 ist dies tatsächlich eine Darstellung der Inversen.

Ad 2. Wir berechnen direkt mit den Substitutionen  $u = t + s$  und anschließend  $t = uz$

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} A^{-\beta} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} s^{\beta-1} e^{-A(t+s)} ds dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} \int_0^u t^{\alpha-1} (u-t)^{\beta-1} e^{-Au} dt du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} u^{1+\alpha-1+\beta-1} \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz e^{-Au} du. \end{aligned}$$

Wir verwenden nun, dass

$$\int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Dies folgt, wenn man in obiger Rechnung die reelle Zahl  $A = 1$  einsetzt. Damit ist 2. gezeigt.

Ad 3. Wir berechnen mit der Resolventendarstellung aus Satz 2.18, Fubini und der Darstellung (4.15) für reelle Zahlen

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} d\lambda &= \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} e^{-At} dt d\lambda \\ &= \int_0^{\infty} e^{-At} \int_0^{\infty} \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t} d\lambda dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-At} \Gamma(1-\alpha) t^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

Die beiden Darstellungen stimmen also bis auf einen Faktor überein. Einsetzen einer reellen Zahl  $A$  liefert, dass dieser Faktor 1 sein muss, und damit das Ergebnis.  $\square$

Die Operatoren  $A^\alpha$  für  $\alpha > 0$  sind von großer Wichtigkeit für die Theorie, insbesondere die zugehörigen Banachräume.

**Definition 4.13** (Der Raum  $X^\alpha$ ). Für einen sektoriellen Operator  $A$  mit  $\text{Re}(\sigma(A)) > 0$  und  $\alpha > 0$  definieren wir den Banachraum

$$X^\alpha := D(A^\alpha), \quad \|u\|_{X^\alpha} \equiv \|u\|_\alpha := \|A^\alpha u\|_X. \quad (4.16)$$

Falls das Spektrum von  $A$  nicht in der linken Hälfte liegt, so wählen wir  $a \in \mathbb{R}$  so, dass für  $A' = a + A$  obige Definition anwendbar ist. Für unterschiedliche  $a$  finden wir zwar verschiedene, aber äquivalente Normen.

Wir müssen noch zeigen, dass  $X^\alpha$  Banachräume sind.

**Satz 4.14.** *Sei  $A$  sektoriell auf einem Banachraum  $X$ . Dann sind  $X^\alpha$  mit Norm  $\|\cdot\|_\alpha$  Banachräume,  $A^\alpha : D(A^\alpha) = X^\alpha \subset X \rightarrow X$  ist abgeschlossen, und die Einbettung  $X^\alpha \subset X^\beta$  ist dicht und stetig für  $\alpha > \beta$ .*

*Falls die Resolvente von  $A$  kompakt ist, so ist auch die Einbettung  $X^\alpha \subset X^\beta$  kompakt.*

*Beweis.* Ohne Einschränkung nehmen wir im Beweis an, dass  $a = 0$  gewählt werden kann. Der Beweis ist in allen Punkten quasi trivial; wir führen ihn aus, um zu sehen, wo welche Eigenschaften von  $A$  eingehen.

Norm:  $\|u\|_\alpha = 0$  impliziert  $A^\alpha u = 0$ , nach Anwendung von  $A^{-\alpha}$  also  $u = 0$ . Dreiecksungleichung und Skalierung sind klar.

Vollständigkeit: Sei  $u_n$  eine Cauchy-Folge in  $X^\alpha$ . Dann ist  $A^\alpha u_n$  eine Cauchy-Folge in  $X$  und konvergiert daher,  $A^\alpha u_n \rightarrow v$  in  $X$ . Nach Definition der Norm gilt  $\|u_n - A^{-\alpha}v\|_\alpha = \|A^\alpha u_n - v\|_X \rightarrow 0$ .

Abgeschlossenheit: Sei nun  $u_n \rightarrow u$  in  $X$  und  $A^\alpha u_n \rightarrow v$  in  $X$ . Anwendung des stetigen Operators  $A^{-\alpha}$  liefert  $u_n \rightarrow A^{-\alpha}v$  in  $X$ , insbesondere Gleichheit des Limes,  $u = A^{-\alpha}v$ . (Bemerkung: Die Abgeschlossenheit von  $A$  wurde verwendet, um die Beschränktheit von  $R(\lambda, A)$  für  $\lambda \in \rho(A)$  zu zeigen, was in der Definition von  $A^{-\alpha}$  verwendet wurde.)

Stetigkeit: Folgt aus der Beschränktheit von  $A^{-(\alpha-\beta)}$ :  $\|u\|_\beta = \|A^\beta u\| = \|A^{\beta-\alpha} A^\alpha u\| \leq C \|A^\alpha u\| = C \|u\|_\alpha$ .

Dichtheit: Sei  $u \in X^\beta$  für  $\beta \in (0, 1)$ , also  $A^\beta u \in X$ . Dann gibt es  $D(A) \ni v_n \rightarrow A^\beta u$  in  $X$ , es gilt also  $A^{-\beta} v_n \rightarrow u$  in  $X^\beta$ . Wir behaupten, dass  $A^{-\beta} D(A) \subset D(A)$ , dann sind die  $A^{-\beta} v_n$  sogar in  $D(A)$ . Dies folgt aus der Abgeschlossenheit von  $A$ : Für  $u \in D(A)$  können wir die Riemannsummen  $w_n \rightarrow A^{-\beta} u$  bilden. Dann gilt  $Aw_n \rightarrow A^{-\beta} Au$ , insbesondere  $A^{-\beta} u \in D(A)$ . Es folgt also die Dichtheit von  $D(A)$  in  $X^\beta$ . Wegen  $D(A) \subset X^\alpha$  für  $\alpha < 1$  folgt die Aussage für  $\beta < \alpha < 1$ . Für zusätzliche ganzzahlige Abstände  $n$  nutzen wir zusätzlich  $n$ -mal die Dichtheit von  $D(A)$ .

Kompaktheit: Zunächst bemerken wir, dass wegen der Resolventenidentität (2.1) tatsächlich gilt: Ist eine Resolvente  $R(\lambda, A)$  kompakt, so auch alle anderen. Wir müssen zeigen:  $A^\alpha u_n$  beschränkt impliziert für Teilfolge, dass  $A^\beta u_n$  konvergent ist. Wir müssen also die Kompaktheit von  $A^{\beta-\alpha}$  nachweisen. Wegen der Stetigkeit von  $A^{\beta-\alpha+\gamma}$  für  $\gamma < \alpha - \beta$  reicht es, die Kompaktheit von  $A^{-\gamma}$  für  $\gamma \in (0, 1)$  zu zeigen. Dies folgt aus der Definition in (4.14), weil die Riemannsummen kompakte Operatoren definieren.  $\square$

**Übung 4.2.** *Man überlege sich zum letzten Schritt im obigen Beweis: Falls ein Operator  $T$  beliebig gut in  $\mathcal{L}(X)$  durch kompakte Operatoren  $T_n$  approximiert werden kann, so ist auch  $T$  kompakt.*

Für das nachfolgende Beispiel brauchen wir die Bessel-Potential Funktionenräume  $H^s(\mathbb{R}^n)$  für  $s \in [0, \infty)$ . Diese sind definiert mit Hilfe der Fouriertrans-

formation  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2}^2 &\sim \|\mathcal{F}u\|_{L^2}^2, \\ \|u\|_{H^1}^2 &= \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 \sim \|\mathcal{F}u(\xi)\|_{L^2}^2 + \|\xi \mathcal{F}u(\xi)\|_{L^2}^2 \\ &= \|(1 + |\xi|^2)^{1/2} \mathcal{F}u(\xi)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Um Räume  $H^s$  'dazwischen' zu definieren, wählen wir die Norm

$$\|u\|_{H^s}^2 := \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{s/2} d\xi.$$

Man überlege sich, dass für  $s \in \mathbb{N}$  die Standardräume entstehen.

**Beispiel 4.15** (Wärmeleitungsgleichung auf  $\mathbb{R}^n$ ). *Wir betrachten den Operator*

$$-\Delta : H^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = X$$

und, weil  $0 \in \sigma(-\Delta)$ , die Verschiebung  $A = id - \Delta$ . Dann ist  $A$  sektoriell. Die Räume der Skala  $X^\alpha$  stimmen mit den  $H^s$  überein,

$$H^{2\alpha}(\mathbb{R}^n) = X^\alpha.$$

Der Operator  $A$  ist dicht definiert und nach elliptischer Regularitätstheorie abgeschlossen.

Wir stellen nun fest, dass  $-A$  dissipativ ist. Für  $u \in H^2$  gilt

$$\operatorname{Re} \langle (\Delta - id)u, u \rangle = - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 - \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 < 0.$$

Hierbei muss die partielle Integration durch Approximation mit Abschneidefunktionen gerechtfertigt werden.

Wir müssen nun einen Punkt in der Resolventenmenge finden. Tatsächlich können wir  $A$  invertieren, indem wir für  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  das Funktional

$$F(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \{|\nabla u|^2 + |u|^2\} - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f$$

minimieren.  $F$  ist koerziv und schwach unterhalbstetig, daher finden wir einen Minimierer.

Die Dissipativität liefert die Resolventenabschätzung auf der rechten Halbebene, da wir einen Punkt in der Resolvente haben, ist die rechte Halbebene auch in der Resolventenmenge. Daher erzeugt  $-A$  eine Halbgruppe. Die Operatoren  $-e^{i\vartheta} A$  sind ebenfalls dissipativ für  $|\vartheta| < \pi/2$ , daher ist  $A$  sektoriell.

Wir können daher Operatoren  $A^\alpha$  und die Räume  $X^\alpha$  definieren. Es gilt  $X^0 = X = L^2$ ,  $X^1 = D(A) = H^2$  und die weiteren  $X^n$  wie gewünscht. Wir berechnen den Operator  $A^{-\alpha}$  mit der Fourier-Transformation

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(A^{-\alpha}u)(\xi) &= \mathcal{F} \left( \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + A)^{-1} u d\lambda \right) (\xi) \\ &= C_0 \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + 1 + |\xi|^2)^{-1} \mathcal{F}(u)(\xi) d\lambda. \end{aligned}$$

Mit der Substitution  $\lambda = (1 + |\xi|^2)\mu$  finden wir

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda + 1 + |\xi|^2)^{-1} d\lambda &= \int_0^\infty \frac{\mu^{-\alpha}}{1 + \mu} d\mu (1 + |\xi|^2)^{-\alpha} \\ &= C_1 (1 + |\xi|^2)^{-\alpha}, \end{aligned}$$

und daher

$$\mathcal{F}(A^{-\alpha}u)(\xi) = C_2 (1 + |\xi|^2)^{-\alpha} \mathcal{F}(u)(\xi).$$

Also ist  $A^{-\alpha} : H^s \rightarrow H^{s+2\alpha}$  ein Isomorphismus. Die Skalen der Banachräume stimmen also überein.

## 4.4 Regularisierung und Interpolation

Im gesamten Abschnitt sei  $A$  ein sektorieller Operator auf einem Banachraum  $X$ ,  $\gamma$  ein geeigneter Weg für  $A$  und wir schreiben  $e^{-At} = S(t)$  für die von  $-A$  erzeugte Halbgruppe. Ein erstes Beispiel für einen regularisierenden Effekt ist folgende Abschätzung: Für ein  $C > 0$  gilt

$$\|Ae^{-At}\| \leq \frac{C}{t} e^{\omega t}. \quad (4.17)$$

Für den Beweis nehmen wir  $\omega = 0$  an und wählen  $\gamma$  als Kreissegment mit Radius  $1/t$  um die 0, zusammen mit zwei Halbgeraden. Mit einer Substitution  $\mu = \lambda t$  für  $t > 0$  rechnen wir

$$\begin{aligned} \|Ae^{-At}\| &= \|\partial_t e^{-At}\| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma |-\lambda e^{-\lambda t}| \|(\lambda - A)^{-1}\| d|\lambda| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{t\gamma} \left| \frac{\mu}{t} \right| |e^{-\mu}| \frac{C}{|\mu|} d|\mu| \leq \frac{C}{t}. \end{aligned}$$

**Satz 4.16.** *Sei  $A$  sektoriell,  $e^{-At}$  die von  $-A$  erzeugte Halbgruppe und  $\operatorname{Re} \sigma(A) > \delta > 0$ . Für  $\alpha \geq 0$  gibt es  $C_\alpha$  mit*

$$\|A^\alpha e^{-At}\| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t} \quad \forall t > 0. \quad (4.18)$$

*Für die Approximation der Anfangswerte gilt für  $\alpha \in (0, 1]$  und  $u \in X^\alpha$*

$$\|e^{-At}u - u\| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \|A^\alpha u\|. \quad (4.19)$$

*Beweis.* Indem wir Abschätzung (4.17) mehrfach anwenden, erhalten wir das Resultat für ganzzahlige Potenzen  $A^m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ :

$$\|A^m e^{-At}\| = \left\| (Ae^{-At/m})^m \right\| \leq C \left( \frac{m}{t} \right)^m e^{-\delta t} \leq C(m) t^{-m} e^{-\delta t}.$$

Für Potenzen  $A^\alpha$  mit  $\alpha \in (0, 1)$  rechnen wir

$$A^\alpha e^{-At} = A^{-1+\alpha} A e^{-At} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} e^{-As} A e^{-At} ds$$

und daher mit  $s = t\sigma$

$$\begin{aligned} \|A^\alpha e^{-At}\| &\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty s^{-\alpha} \|Ae^{-A(t+s)}\| ds \\ &\leq C \int_0^\infty s^{-\alpha} (t+s)^{-1} e^{-\delta t} ds \\ &= C \int_0^\infty t^{-\alpha} \sigma^{-\alpha} \frac{1}{t} (1+\sigma)^{-1} e^{-\delta t} t d\sigma = C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Für  $\beta = m + \alpha$ ,  $m$  und  $\alpha$  wie oben, schreiben wir

$$\|A^\beta e^{-At}\| \leq \|A^\alpha e^{-At/2}\| \|A^m e^{-At/2}\|$$

und verwenden die obigen Ergebnisse.

Die Abschätzung (4.19) folgt aus

$$e^{-At}u - u = - \int_0^t Ae^{-As}u ds = - \int_0^t A^{1-\alpha} e^{-As} A^\alpha u ds.$$

□

**Satz 4.17.** Sei  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $u \in D(A)$ . Dann gilt die Interpolationsabschätzung

$$\|A^\alpha u\| \leq C \|Au\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha} \quad (4.20)$$

mit  $C$  unabhängig von  $\alpha$ .

*Beweis.* Wir rechnen für  $\beta = 1 - \alpha$  und  $x = Au$  mit  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \Gamma(\beta) \|A^{-\beta} x\| &\leq \left\| \int_0^\varepsilon t^{\beta-1} e^{-At} x dt - \int_\varepsilon^\infty t^{\beta-1} A^{-1} \partial_t [e^{-At} x] dt \right\| \\ &\leq C \frac{\varepsilon^\beta}{\beta} \|x\| + \varepsilon^{\beta-1} \|e^{-A\varepsilon} A^{-1} x\| + |\beta - 1| \left\| \int_\varepsilon^\infty t^{\beta-2} e^{-At} A^{-1} x dt \right\| \\ &\leq C \frac{\varepsilon^\beta}{\beta} \|x\| + C \varepsilon^{\beta-1} \|A^{-1} x\| + 2 \sup_{t \geq 0} \|e^{-At} A^{-1} x\| \int_\varepsilon^\infty t^{\beta-2} dt \\ &\leq C \frac{\varepsilon^\beta}{\beta} \|x\| + C \varepsilon^{\beta-1} \|A^{-1} x\|. \end{aligned}$$

Wir optimieren die Wahl von  $\varepsilon$  durch  $\varepsilon = \|A^{-1}x\|/\|x\|$  und erhalten (ohne den  $\beta$ -Faktor zu optimieren)

$$\Gamma(\beta) \|A^{-\beta} x\| \leq \frac{C}{\beta} \|A^{-1}x\|^\beta \|x\|^{1-\beta}.$$

Wegen der Funktionalgleichung  $\Gamma(1 + \beta) = \beta\Gamma(\beta)$  und  $\Gamma(1) = 1$  erfüllt die Gammafunktion eine Ungleichung  $\Gamma(\beta) \geq C/\beta$ . Insbesondere kann die Konstante  $C$  unabhängig von  $\beta$  gewählt werden. Einsetzen von  $x = Au$  und  $\alpha = 1 - \beta$  liefert die Behauptung. □

**Beispiel 4.18** (Wärmeleitungsgleichung). Für den sektoriellen Operator

$$A = id - \Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

lauten unsere Ergebnisse für die zugehörige Halbgruppe  $S(t)$

$$\begin{aligned} \|S(t)u\|_{H^{2\alpha}} &\leq C_\alpha t^{-\alpha} \|u\|_{L^2} \\ \|S(t)u - u\|_{L^2} &\leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^\alpha \|u\|_{H^{2\alpha}}, \\ \|u\|_{H^{2\alpha}} &\leq C \|u\|_{H^2}^\alpha \|u\|_{L^2}^{1-\alpha} \end{aligned}$$

## Mehr Funktionenräume

Wir gehen immer von  $\mathbb{R}^n$  und den Sobolevräumen  $W^{k,p}$  aus ( $k$  ist hier und im Folgenden immer in  $\mathbb{N}$ ). Der Raum  $W^{k,p}$  ist der Raum der  $L^p$ -Funktionen, für die alle  $k$ -ten Ableitungen in  $L^p$  sind (ebenso die niedrigeren Ableitungen).

Wir haben in Beispiel 4.15 zu  $X = L^2$  und  $A = 1 - \Delta$  die Bessel-Potential-Räume  $X^{s/2} = H^s \equiv H^{s,2}$  betrachtet. Ebenso können wir auch von  $L^p$  ausgehend Bessel-Räume  $H^{s,p}$  definieren durch die Norm

$$f \mapsto \|\mathcal{F}^{-1} [(1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathcal{F}f(\xi)]\|_{L^p}.$$

Dann gilt für  $X = L^p$  und  $A = 1 - \Delta$ , dass  $X^{s/2} = H^{s,p}$ , und es gelten die Abschätzungen aus Beispiel 4.18 in  $H^{s,p}$ -Räumen.

Man kann Räume zwischen  $W^{k,p}$  und  $W^{k+1,p}$  auch mit der sogenannten Interpolationsmethode definieren. Hierbei wird ausgehend von zwei Banachräumen  $X$  und  $Y$  mit  $Y \subset X$  für alle Parameter  $\theta \in [0, 1]$  ein neuer Raum  $[X, Y]_\theta$  konstruiert, der für  $\theta = 0, 1$  mit den Räumen  $X$  bzw.  $Y$  übereinstimmt. In der reellen Interpolationsmethode gibt es noch einen Parameter  $q \in [1, \infty)$ , der die Methode spezifiziert. Wenn  $(X, Y)_{\theta,q}$  den Interpolationsraum angibt, so gilt

$$(X, X^1)_{\theta,q} = \left\{ u \in X \mid \int_0^\infty t^{-\theta q} \|S(t)u - u\|_X^q \frac{1}{t} dt < \infty \right\}.$$

Man kann also nicht nur aus dem Operator selbst eine Skala von Räumen definieren, sondern auch aus der Halbgruppe.

Aus den Abschätzungen in Beispiel 4.18 zu  $L^p$  sehen wir sofort: Für  $u \in X^\alpha = W^{2\alpha,p}$  gilt

$$\int_0^1 t^{-\theta q} \|S(t)u - u\|_X^q \frac{1}{t} dt \leq C \int_0^1 t^{-\theta q} t^{\alpha q} \|u\|_\alpha^q \frac{1}{t} dt,$$

also  $X^\alpha \subset (X, X^1)_{\theta,q}$  für alle  $q$  und alle  $\theta < \alpha$ . In Anwendungen kann die Interpolations-Skala von Räumen von Vorteil sein, nämlich dann, wenn man die Räume  $(X, X^1)_{\theta,q}$  bestimmen kann, aber die  $X^\alpha$  nicht. Folklore sagt, dass man unsere (Henry's) Theorie für nichtlineare Gleichungen auch auf der Basis der Interpolationsräume aufbauen kann.

## Teil II

# Nichtlineare Halbgruppentheorie

# Kapitel 5

## Semilineare Gleichungen

### 5.1 Die inhomogene Gleichung

Wir wollen die Gleichung

$$\partial_t u + Au = f, \quad u(0) = u_0, \quad (5.1)$$

lösen. Als Daten sind uns gegeben: Ein Banachraum  $X$ , ein sektorieller Operator  $A : X \rightarrow X$ , ein Startwert  $u_0 \in X$ , ein Zeitintervall  $(0, T)$ , wobei wir immer  $T = \infty$  zulassen wollen, und eine Inhomogenität  $f : [0, T) \rightarrow X$ . Eine Abbildung  $u : [0, T) \rightarrow X$  nennen wir *Lösung von (5.1)*, falls  $u$  stetig ist auf  $[0, T)$ , auf dem offenen Intervall  $(0, T)$  differenzierbar, eine Abbildung  $u : (0, T) \rightarrow D(A)$ , und die Gleichungen im klassischen Sinne löst (die Evolutionsgleichung auf dem offenen Intervall).

#### 5.1.1 Variation der Konstanten

Falls  $u$  eine Lösung von (5.1) ist, so erwarten wir für die Halbgruppe  $S(t) = e^{-At}$  zu  $-A$  die folgende Darstellung (Variation-der-Konstanten-Formel)

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s) ds. \quad (5.2)$$

Formales Einsetzen liefert  $u(0) = e^{-A0}u_0 = u_0$  und die Zeitableitung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) &= -Ae^{-At}u_0 + \int_0^t (-A)e^{-A(t-s)}f(s) ds + e^{-A(t-s)}f(s)|_{s=t} \\ &= -Au(t) + f(t). \end{aligned}$$

Wir wollen nun feststellen, wann diese formale Rechnung durchführbar ist.

**Lemma 5.1.** *Sei  $f : (0, T) \rightarrow X$  lokal Hölder-stetig mit*

$$\int_0^{t_0} \|f(s)\| ds < \infty$$

für ein  $t_0 > 0$ . Wir betrachten den Ausdruck

$$F(t) := \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Es gilt:  $F : [0, T) \rightarrow X$  ist stetig mit  $F(0) = 0$ ,  $F$  ist stetig differenzierbar auf  $(0, T)$  und  $F(t) \in D(A)$  für alle  $t \in (0, T)$ . Es gilt

$$\partial_t F(t) = -AF(t) + f(t).$$

Sobald das Lemma bewiesen ist, ist unsere obige Rechnung gerechtfertigt. Dann folgt sofort

**Satz 5.2.** Für  $\alpha, t_0 > 0$  gelte

$$f \in C^\alpha((0, T), X), \quad \int_0^{t_0} \|f(s)\| ds < \infty$$

Dann ist die eindeutige Lösung von (5.1) gegeben durch

$$u(t) = e^{-At} u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Die Ableitung kann dargestellt werden durch

$$\partial_t u(t) = -[Ae^{-At} u_0 - e^{-At} f(t)] + \int_0^t Ae^{-A(t-s)} (f(t) - f(s)) ds. \quad (5.3)$$

Zum Beweis des Satzes ist nur festzustellen, dass die Lösung tatsächlich eindeutig ist. Die Differenz zweier Lösungen ist eine Lösung zu  $f = 0$  und Startwerten 0. Wegen der Eindeutigkeit der Halbgruppe verschwindet dann aber diese Differenz.

Die Gleichung (5.3) ist formal klar; wir schreiben

$$g(s) = f(t)e^{-A(t-s)}, \quad \partial_s g(s) = Ag(s),$$

also

$$f(t) - f(t)e^{-At} = g(t) - g(0) = \int_0^t Ag(s) ds.$$

Dies addiert man zu  $\partial_t u = -Au + f$ .

*Beweis.* (des Lemmas und von (5.3)) Wir zeigen zunächst  $F(0) = 0$  und Stetigkeit von  $F$  in der 0. Wir wenden die Abschätzung  $\|e^{-At}\| \leq C$  an (für beschränkte  $t$ ) und schließen

$$\|F(t)\| \leq C \int_0^t \|f(s)\| ds \rightarrow 0$$

für  $t \rightarrow 0+$  (wegen der Integrierbarkeit von  $\|f\|$ ).

Ein Problem im Beweis ist, dass nach Theorem 4.16 zwar gilt

$$\|Ae^{-A(t-s)} f(s)\| \leq \frac{C}{t-s} \|f(s)\|,$$

aber dies ist nicht integrierbar bis  $s = t$ . Aber natürlich sind Integrale über  $Ae^{-A\tau}$  besser, als es diese Abschätzung suggeriert. Wir betrachten

$$F_\rho(t) := \int_0^{t-\rho} e^{-A(t-s)} f(s) ds \quad \text{für } t > \rho, \quad (5.4)$$

und  $F_\rho(t) := 0$  für  $t \leq \rho$ . Dann gilt  $F_\rho(t) \in D(A)$  für alle  $t > 0$ . Hierfür ist eigentlich eine Nebenrechnung erforderlich:  $F_\rho(t)$  wird durch seine Riemann-Summen  $F_\rho^n(t)$  approximiert, die  $AF_\rho^n(t)$  sind Riemann-Summen für das Integral mit  $A$  angewendet auf den Integranden. Die  $AF_\rho^n(t)$  konvergieren gegen das Integral wegen der absoluten Integrierbarkeit des Integranden. Wegen der Abgeschlossenheit von  $A$  ist daher der Grenzwert  $F_\rho(t)$  wieder in  $D(A)$  und die Anwendung von  $A$  liefert das Gewünschte, nämlich

$$AF_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} Ae^{-A(t-s)} f(s) ds \quad \text{für } t > \rho.$$

Es gilt  $F_\rho \rightarrow F$  für  $\rho \rightarrow 0$ : Wir setzen  $f(s) = 0$  für  $s < 0$  und rechnen

$$\|F(t) - F_\rho(t)\| \leq \int_{t-\rho}^t \|e^{-A(t-s)}\| \|f(s)\| ds \rightarrow 0$$

für  $\rho \rightarrow 0+$ . Nun berechnen wir für  $AF_\rho$

$$\begin{aligned} AF_\rho(t) &= \int_0^{t-\rho} Ae^{-A(t-s)} f(s) ds \\ &= \int_0^{t-\rho} Ae^{-A(t-s)} (f(s) - f(t)) ds + (e^{-A\rho} - e^{-At}) f(t). \end{aligned}$$

Im Integral nutzen wir nun

$$\|Ae^{-A(t-s)}(f(s) - f(t))\| \leq \frac{C}{t-s} (t-s)^\alpha$$

für  $s$  nahe  $t$ , also die Kleinheit des Integrals von  $t - \rho$  bis  $t$  und schließen

$$AF_\rho(t) \rightarrow \int_0^t Ae^{-A(t-s)} (f(s) - f(t)) ds + (\text{id} - e^{-At}) f(t)$$

für  $\rho \rightarrow 0$ . Wieder wegen der Abgeschlossenheit von  $A$  ist dann auch der Limes  $F(t)$  in  $D(A)$  und es gilt

$$AF(t) = \int_0^t Ae^{-A(t-s)} (f(s) - f(t)) ds + (\text{id} - e^{-At}) f(t).$$

Wir wollen nun die gleichmäßige Konvergenz  $AF_\rho(\cdot) \rightarrow AF(\cdot)$  auf Kompakta  $[t_1, t_2] \subset (0, T)$  zeigen. Dies impliziert insbesondere die Stetigkeit von  $AF(\cdot)$  wegen

der Stetigkeit der  $AF_\rho(\cdot)$ . Wir geben uns also ein  $\varepsilon > 0$  vor und wählen (abhängig von  $\varepsilon$ ) genügend viele ‘Stützstellen’  $\tau_k$  in  $[t_1, t_2]$ ,

$$\begin{aligned} \|AF_\rho(t) - AF(t)\| &\leq \|(\text{id} - e^{-A\rho})f(t)\| \\ &\quad + \int_{t-\rho}^t \|Ae^{-A(t-s)}(f(s) - f(t))\| ds \\ &\leq \|(\text{id} - e^{-A\rho})f(\tau_k)\| \\ &\quad + \|(\text{id} - e^{-A\rho})\|C|t - \tau_k|^\alpha + C \int_{t-\rho}^t (t-s)^{\alpha-1} ds < \varepsilon, \end{aligned}$$

für eine nahe an  $t$  gelegene Stützstelle  $\tau_k$  und für  $\rho$  klein genug für alle Stützstellen.

Zur Differenzierbarkeit: Die  $F_\rho$  sind differenzierbar mit Ableitung

$$\partial_t F_\rho(t) = -AF_\rho(t) + e^{-A\rho}f(t - \rho)$$

für  $t > \rho$  (dies kann direkt mit Differenzenquotienten in einer einfachen Rechnung nachgewiesen werden; einfache Übung). Die rechte Seite konvergiert gleichmäßig auf Kompakta gegen  $-AF(t) + f(t)$  (für  $AF$  siehe oben, für den  $f$ -Term folgt dies aus der Hölderstetigkeit mit einer Rechnung mit Stützstellen wie oben). Dann ist auch die Grenzfunktion differenzierbar und hat die erwarteten Ableitungen.

Wir setzen die Darstellung von  $AF$  in diese Formel für  $\partial_t F$  ein und erhalten (5.3).  $\square$

## 5.1.2 Fourier-Transformation

In diesem kurzen Einschub wollen wir die Gleichung

$$\partial_t u + Au = f, \quad u(0) = 0, \tag{5.5}$$

in Hilberträumen  $X$  lösen. Man kann dafür auch auf die Fourier-Transformation in der Zeit zurück greifen.

**Proposition 5.3.** *Sei  $X$  ein Hilbertraum, die rechte Seite  $f \in L^2((0, T), X)$ ,  $A$  sektoriell mit  $\text{Re } \sigma(A) > 0$ . Dann können wir die Gleichung (5.5) mit  $u \in H^1((0, T), X)$  lösen.*

*Beweis.* Wir nehmen an, dass uns  $f \in L^2((0, T), X)$  gegeben ist, einen reellen Hilbertraum  $X$  betten wir in seine Komplexifizierung  $X_{\mathbb{C}} := X \oplus iX$  ein. Wir setzen  $f$  trivial auf  $\mathbb{R}$  fort zu einer Funktion  $\bar{f}$ . Dann ist  $\bar{f} \in L^2(\mathbb{R}, X)$  und wir können die Fourier-Transformierte  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}, X_{\mathbb{C}})$  betrachten.

Eine Lösung  $u$  erfüllt (bei entsprechender Glattheit) im Fourier-Raum

$$i\xi \hat{u}(\xi) + A\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi)$$

für alle  $\xi \in \mathbb{R}$ . Wir setzen also

$$\hat{u}(\xi) := (i\xi + A)^{-1} \hat{f}(\xi),$$

was nach Voraussetzung an  $A$  wohldefiniert ist. Wegen der Resolventenabschätzung gilt

$$\|(1 + |\xi|) \hat{u}(\xi)\|_{X_{\mathbb{C}}} \leq C \|\hat{f}(\xi)\|_X,$$

also insbesondere auch

$$\|(1 + |\xi|) \hat{u}(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R}, X_{\mathbb{C}})} \leq C \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}, X_{\mathbb{C}})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R}, X)} \leq C.$$

Wir erhalten also ein  $u := \mathcal{F}^{-1}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}, X_{\mathbb{C}})$  mit  $\partial_t u = \mathcal{F}^{-1}(i\xi\hat{u}(\xi)) \in L^2(\mathbb{R}, X_{\mathbb{C}})$ , also  $u \in H^1(\mathbb{R}, X_{\mathbb{C}})$ . Außerdem ist  $u$  (für reelle Hilberträume die erste Komponente von  $u$ ) Lösung der Gleichung.

Wir müssen noch klären, warum die Anfangswerte erfüllt werden. Weil  $u$  in  $L^2$  beschränkt ist, finden wir eine Folge  $t_k \rightarrow \infty$  so, dass  $\|u(-t_k)\| \leq C$ . Es gilt

$$\|u(0)\| \leq C \|S(t_k)\| \rightarrow 0,$$

also ist die Bedingung  $u(0) = 0$  erfüllt.  $\square$

Die Methode ist sehr direkt und man kann aus der Resolventenabschätzung direkt Lösungen konstruieren. Ein Nachteil ist (außer der Einschränkung auf Hilberträume), dass man keine Charakterisierung für erlaubte  $u_0$  hat.

Falls man zu den gegebenen Anfangswerten eine glatte Fortsetzung hat, so kann man diese Fortsetzung in die Gleichung einsetzen, und es ist nur noch Gleichung (5.5) zu lösen. Eine implizite Darstellung der erlaubten Anfangswerte ist dann

$$\{u_0 \in X \mid \exists \tilde{u} : \mathbb{R} \rightarrow X, \tilde{u}(0) = u_0, \tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}, X) \cap L^2(\mathbb{R}, X^1)\}.$$

Die Funktion  $w = u - \tilde{u}$  löst

$$\partial_t w + Aw = f - [\partial_t \tilde{u} + A\tilde{u}], \quad w(0) = 0,$$

und kann mit obiger Methode gelöst werden.

Beispiel: Wir wollen eine Lösung der inhomogenen Gleichung mit Startwerten  $u_0 \in D(A)$ . Dann erfüllt  $\tilde{u}(t) := e^{-At}u_0$  für alle  $t > 0$

$$\tilde{u}(t) \in D(A), \tilde{u} \in C^1((0, \infty), X).$$

Wir definieren für  $t < 0$  eine Fortsetzung durch  $\tilde{u}(t) = \tilde{u}(-t)$ . Es gilt  $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}, X)$  wegen der Stetigkeit in  $t = 0$  und des exponentiellen Abfalls in  $\pm\infty$ . Man überlege sich, dass die Voraussetzung  $u_0 \in X^\alpha$  mit  $\alpha > 1/2$  ausreicht.

## 5.2 Existenzsatz für semilineare Gleichungen

Wir wollen nun nichtlineare Gleichungen der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + Au(t) &= f(t, u(t)) & \text{für } t \in (0, T), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

betrachten. Die Strategie ist klar: Wir setzen eine Näherungslösung in die rechte Seite ein und lösen für das entstandene  $f = f(t)$  die inhomogene Gleichung. Wir nehmen wieder an, dass  $A$  ein sektorieller Operator mit  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  ist; andere sektorielle Operatoren können mittels der Standardtransformation aber ebenso betrachtet werden.

Ein mögliches  $f$  wäre  $f = f(t, u)$ ,  $f : (0, T) \times X^\alpha \rightarrow X$  differenzierbar für  $\alpha \in [0, 1)$ . Dann gilt unsere Interpretation, dass  $f$  von niedrigerer Ordnung ist als  $A$  (welches ja von  $X^1$  nach  $X$  abbildet). Genauere Annahmen werden im Theorem genannt.

Zunächst definieren wir einen schwachen Lösungsbegriff. Wir werden diese sogenannten milden Lösungen konstruieren und später zeigen, dass unter recht allgemeinen Voraussetzungen diese auch starke Lösungen sind.

**Definition 5.4.** *Wir sagen, dass  $u$  eine milde Lösung von (5.6) auf  $(0, T)$  ist, falls  $u \in C^0((0, T), X^\alpha)$  und falls die Integralgleichung gilt,*

$$u(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s, u(s)) \, ds \quad \forall t \in (0, T).$$

Für die Existenz des Integrals fordern wir zudem, dass  $t \mapsto \|f(t, u(t))\|$  integrierbar ist über ein Intervall  $(0, t_0)$ .

Mit der angedeuteten Iteration konstruieren wir nun milde Lösungen.

**Satz 5.5.** *Sei  $u_0 \in X^\alpha$  und  $f : [0, T) \times X^\alpha \rightarrow X$  stetig und lokal Lipschitz-stetig in  $u$  mit einer Konstanten unabhängig von  $t$ . Dann existiert ein  $T > 0$  und eine milde Lösung  $u \in C^0([0, T], X^\alpha)$  von (5.6) auf  $(0, T)$ .*

*Beweis.* Die Lipschitz-Voraussetzung bedeutet für festes  $\delta > 0$ :

$$\|f(t, u_1) - f(t, u_2)\| \leq M_1 \|u_1 - u_2\|_\alpha$$

für  $t \in [0, 1]$  und alle  $u_1, u_2$  mit  $\|u_i - u_0\|_\alpha \leq \delta$ . Wir wählen an dieser Stelle  $T > 0$  klein. Die Kleinheitsanforderung (später präzisiert) darf also von  $u_0$ ,  $\delta$ , von  $M_1$  und  $M_2 = \sup_{t \in [0, 1]} \|f(t, u_0)\|$  abhängen.

Wir suchen Lösungen im Raum

$$Z := C^0([0, T], X^\alpha),$$

beziehungsweise in der zugehörigen  $\delta$ -Kugel  $B = B_\delta(u_0)$  um die konstante Funktion  $u \equiv u_0$ . Wir definieren die Iterationsabbildung  $G$  durch

$$G(w)(t) = e^{-At}u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)}f(s, w(s)) \, ds.$$

Wenn wir nun zeigen, dass  $G : B \rightarrow B$  kontraktiv ist, dann gibt es einen Fixpunkt nach dem Banachschen Fixpunktsatz und wir haben eine milde Lösung gefunden.

Zunächst zeigen wir, dass  $G$  nach  $B$  abbildet. Für  $w \in B$  gilt

$$\begin{aligned} \|G(w)(t) - u_0\|_\alpha &\leq \|(e^{-At} - \text{id})u_0\|_\alpha \\ &\quad + \int_0^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(s, w(s))\| ds \\ &\leq \|(e^{-At} - \text{id})A^\alpha u_0\| + \int_0^t C(t-s)^{-\alpha} (M_2 + M_1\delta) ds. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist kleiner als  $\delta$  für alle  $t \in [0, T]$ , falls  $T$  klein gewählt wird (abhängig von  $\delta, M_1, M_2$  und  $u_0$ ). Die Funktion  $G(w)$  ist auch stetig nach  $X^\alpha$ ; dies folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f(\cdot, w(\cdot)) : [0, T] \rightarrow X$  und der Integrierbarkeit von  $(t-s)^{-\alpha}$ . Wir schließen, dass  $G$  eine Selbstabbildung ist.

Für die Kontraktivität rechnen wir

$$\begin{aligned} \|G(w)(t) - G(\bar{w})(t)\|_\alpha &\leq \int_0^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| \|f(s, w(s)) - f(s, \bar{w}(s))\| ds \\ &\leq \int_0^t C(t-s)^{-\alpha} ds M_1 \sup_{\sigma \in [0, T]} \|w(\sigma) - \bar{w}(\sigma)\|_\alpha \\ &\leq CM_1 \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds \|w - \bar{w}\|_Z \leq \gamma \|w - \bar{w}\|_Z. \end{aligned}$$

Für kleines  $T$  (abhängig von  $M_1$ ) kann  $\gamma$  kleiner als 1 gewählt werden. Damit ist  $G$  auch kontraktiv.

Der Fixpunkt  $u$  hat alle geforderten Regularitätseigenschaften.  $u$  ist von der Klasse  $C^0([0, T], X^\alpha)$  nach Konstruktion, und  $f(\cdot, u(\cdot))$  ist stetig, also integrierbar.  $\square$

Meist sind die milden Lösungen auch ‘echte’ Lösungen, wobei:

**Definition 5.6.** *Wir nennen  $u$  eine Lösung von (5.6), falls  $u \in C^0([0, T], X)$  mit  $u(0) = u_0$ , und für alle  $t \in (0, T)$  gilt  $u(t) \in D(A)$ ,  $\partial_t u(t)$  existiert und (5.6) ist erfüllt.*

**Lemma 5.7.** *Sei  $f : \mathbb{R} \times X^\alpha \rightarrow X$  lokal Hölder-stetig in  $t$  und lokal Lipschitz-stetig in  $u$ . Dann gilt: Jede milde Lösung  $u$  ist eine Lösung von (5.6).*

*Beweis.* Wir müssen nur zeigen, dass  $u$  sogar Hölder-stetig ist, dass also für ein  $\delta > 0$  gilt:  $u \in C^\delta((0, T), X^\alpha)$ . Wenn dies gezeigt ist, dann folgt insbesondere die Hölder-Stetigkeit von  $s \mapsto f(s, u(s)) \in X$ . Die Voraussetzungen von Theorem 5.2 sind erfüllt und  $u$  ist eine Lösung.

Für die Hölder-Stetigkeit berechnen wir die Differenz direkt über die Integralgleichung als

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= (e^{-Ah} - \text{id})e^{-At}u_0 \\ &\quad + \int_0^t (e^{-Ah} - \text{id})e^{-A(t-s)} f(s, u(s)) ds \\ &\quad + \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)} f(s, u(s)) ds. \end{aligned}$$

Für den ersten Term gilt

$$\|(e^{-Ah} - \text{id})e^{-At}u_0\|_\alpha \leq Ch^{1/2}\|A^{1/2+\alpha}e^{-At}u_0\|$$

nach Theorem 4.16. Für den Integranden im zweiten Term gilt mit  $z(s) = f(s, u(s))$

$$\begin{aligned} \|(e^{-Ah} - \text{id})e^{-A(t-s)}z\|_\alpha &\leq Ch^\delta\|A^{\delta+\alpha}e^{-A(t-s)}z\| \\ &\leq Ch^\delta(t-s)^{-\alpha-\delta}\|z\|, \end{aligned}$$

der Integrand ist von der Form  $h^\delta \cdot g$  mit  $g$  integrierbar. Für den dritten Term gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int_t^{t+h} e^{-A(t+h-s)}f(s, u(s)) ds \right\|_\alpha &\leq C \int_t^{t+h} \|A^\alpha e^{-A(t+h-s)}\| ds \\ &\leq Ch^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Es folgt die Hölder-Stetigkeit von  $u$  und damit das Lemma.  $\square$

Wenn wir die Existenz von milden Lösungen kombinieren mit der Tatsache, dass milde Lösungen auch Lösungen sind, dann finden wir ein Resultat über die lokale Existenz von Lösungen. Wir führen noch eine Lokalisierung durch. Für allgemeine Startzeitpunkte  $t_0 \in \mathbb{R}$  reicht es, wenn die Funktion  $f$  in einer Umgebung von  $(t_0, u_0)$  definiert ist. Wegen der Stetigkeit der Lösung ist diese Lokalisierung kein Problem.

**Satz 5.8.** *Sei  $A$  sektoriell,  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $f : \mathbb{R} \times X^\alpha \supset U \rightarrow X$  lokal Hölder-stetig in  $t$  und lokal Lipschitz-stetig in  $u$ . Dann gibt es für jedes  $(t_0, u_0) \in U$  ein  $T > 0$  und auf  $(t_0, t_0 + T)$  eine eindeutige Lösung  $u \in C^0([t_0, t_0 + T], X^\alpha)$  von*

$$\begin{aligned} \partial_t u(t) + Au(t) &= f(t, u(t)) \\ u(t_0) &= u_0. \end{aligned}$$

Zur Eindeutigkeit. Seien  $u^1$  und  $u^2$  zwei Lösungen auf  $(t_0, t_0 + T)$ . Man betrachtet

$$t_1 := \sup \{t \leq t_0 + T \mid u^1(\tau) = u^2(\tau) \forall \tau \in (t_0, t)\}.$$

Wegen der Stetigkeit der Lösungen gilt  $u^1(t_1) = u^2(t_1) \in X^\alpha$ . Falls  $t < t_0 + T$ , so konstruieren wir die eindeutige milde Lösung wie in Theorem 5.5 zu  $(t_1, u^1(t_1))$  auf  $(t_1, t_1 + \delta)$ . Dort gilt  $u^1 = u^2$ , ein Widerspruch zur Wahl von  $t_1$ .

### 5.3 Verhalten für große Zeiten

Unsere Lösungen existieren für kurze Zeiten. Am Ende dieses Zeitintervalls kann man jedoch im allgemeinen zunächst die Lösung noch fortsetzen. Wir wollen uns nun mit der Frage beschäftigen, in welchen Situationen wir nicht mehr fortsetzen können.

Wir definieren das maximale Existenzintervall  $(t_0, t_1)$  so: Es gibt kein  $t_2 > t_1$  mit einer Lösung  $u$  auf  $(t_0, t_2)$ .

Hier ist nun  $f$  immer in einer Umgebung  $U$  von  $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X^\alpha$  definiert. Was erwarten wir bezüglich Fortsetzbarkeit? Zunächst, dass wir immer fortsetzen können

(dann ist  $t_1 = \infty$ ), oder wir können irgendwann nicht mehr fortsetzen, weil wir  $f$  nicht mehr auswerten können, dass also Lösungen zum Rand von  $U$  laufen. Dabei ist unsere Notation: Falls  $U \cap \{t\} \times X^\alpha$  unbeschränkt ist, so ist auch der Punkt  $\{t\} \times \infty$  im Rand von  $U$ .

**Satz 5.9.** *Seien  $A$  und  $f$  wie in Theorem 5.8, und  $f$  erfüllt: Jede abgeschlossene beschränkte Menge  $B \subset U$  wird abgebildet in eine beschränkte Menge  $f(B) \subset X$ .*

*Dann gilt: Eine Lösung  $u$  mit maximalem Existenzintervall  $(t_0, t_1)$  erfüllt entweder  $t_1 = \infty$  oder es gibt eine Folge  $s_k \nearrow t_1$  mit  $u(s_k) \rightarrow \partial U$ .*

*Beweis.* Wir nehmen immer an, dass  $t_1 < \infty$ . Wir werden zeigen, dass die Lösung jede beschränkte abgeschlossene Menge  $B \subset U$  verlassen muss. Die Mengen  $\bar{U} \setminus B$  sind Umgebungen von  $\partial U$  und müssen also getroffen werden. Für alle  $T < t_1$  ist  $u : [0, T] \rightarrow U$  stetig, die Lösung läuft also erst für  $t \rightarrow t_1$  zum Rand.

Sei also nun  $B$  wie oben. Unter der Annahme, dass die Lösung  $B$  nicht verlässt, werden wir zeigen, dass es  $(t_1, u_1) \in B$  gibt, so dass  $(t, u(t)) \rightarrow (t_1, u_1)$  für  $t \rightarrow t_1$ . Wenn dies gezeigt ist, so gibt es ausgehend von  $(t_1, u_1)$  wieder eine lokale Lösung, was der Maximalität von  $t_1$  widerspricht. Wir verwenden dabei, dass die zusammengesetzte Funktion stetig ist und daher eine milde Lösung. Wegen Lemma 5.7 ist die zusammengesetzte Funktion sogar eine Lösung.

Sei  $M := \sup \|f(B)\|$ .  $M < \infty$  nach Voraussetzung. Für  $\beta \in (0, 1)$  zeigen wir, dass  $\|u\|_\beta$  beschränkt bleibt. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\beta &\leq \|A^{\beta-\alpha} e^{-At}\| \|u_0\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|A^\beta e^{-A(t-s)}\| \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq Ct^{-\beta+\alpha} \|u_0\|_\alpha + C \int_{t_0}^t (t-s)^{-\beta} M ds = C_\beta. \end{aligned}$$

Wir wählen nun  $\beta > \alpha$ , so dass Obiges eine verbesserte Regularität der Lösung bedeutet. Wir nutzen sie, um für Zeiten  $\tau_1 < \tau_2 < t_1$  zu rechnen

$$u(\tau_1) - u(\tau_2) = [e^{-A(\tau_2-\tau_1)} - \text{id}]u(\tau_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-A(\tau_2-s)} f(s, u(s)) ds,$$

und daher

$$\begin{aligned} \|u(\tau_1) - u(\tau_2)\|_\alpha &\leq C(\tau_2 - \tau_1)^{\beta-\alpha} \|u(\tau_1)\|_\beta + C \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\tau_2 - s)^{-\alpha} M ds \\ &\leq C' (\tau_2 - \tau_1)^{\beta-\alpha} \end{aligned}$$

Wir haben damit gezeigt, dass die Folge  $u(\tau)$  für  $\tau \nearrow t_1$  eine Cauchy-Folge in  $X^\alpha$  ist, sie hat also einen Grenzwert. Da  $B$  abgeschlossen ist, ist dieser wieder in  $B$ . Dies wollten wir zeigen.  $\square$

Wir wollen mit einem Beispiel zeigen, dass für eine Aussage wie in Theorem 5.9 eine Voraussetzung an  $f$  notwendig ist.

**Beispiel 5.10.** Wir betrachten den sektoriellen Operator  $A = id$  und den Hilbertraum  $X = l^2(\mathbb{N})$ . Es gilt  $X^\alpha = X$  für alle  $\alpha$ . Es gibt ein  $f : \mathbb{R} \times X^\alpha \rightarrow X$  lokal Lipschitz, so dass die Lösung zu  $\partial_t u + Au = f(\cdot, u)$ ,  $u(0) = e_1$ , nur auf  $(0, 1)$  existiert, aber beschränkt bleibt.

$(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sei die kanonische Basis von  $X$ . Wir wählen eine glatte Kurve  $u : (0, 1) \rightarrow X$  mit

$$u(1 - 2^{1-k}) = e_k,$$

die auf den Zeitintervallen  $I_k := (1 - 2^{1-k}, 1 - 2^{-k})$  nahe an den Verbindungslinien  $\Gamma_k := \{\lambda e_k + (1 - \lambda)e_{k+1} | \lambda \in [0, 1]\}$  liegt (mit punktweise höchstens dem Abstand  $1/4$ ). Nun definieren wir  $f(t, u) = f(u)$  auf den Umgebungen  $B_{1/3}(\Gamma_k)$  für  $k = 1, 2, 3, \dots$  als eine Fortsetzung von  $f(u(t)) := \partial_t u(t) + u(t)$ . Die Lösungskurve  $u$  tritt für  $t > 1 - 2^{-k}$  nicht mehr in die Umgebungen  $B_{1/3}(\Gamma_l)$ ,  $l < k$  ein, daher ist die Konstruktion möglich. Die Fortsetzung  $f$  ist lokal Lipschitz, denn sie ist lokal glatt.

Die Kurve  $u$  ist Lösung der Gleichung und kann in  $t = 1$  nicht stetig fortgesetzt werden. Tatsächlich erfüllt  $f$  nicht die Beschränktheitsvoraussetzung: Die abgeschlossene Menge  $B_2(0)$  wird auf eine unbeschränkte Menge abgebildet, denn die Geschwindigkeit von  $u$  muss groß werden für  $t \rightarrow 1$ .

**Corollar 5.11.** Sei  $A$  sektoriell,  $U = \mathbb{R} \times X^\alpha$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in X^\alpha$ .  $f : U \rightarrow X$  sei wie in Theorem 5.8 mit

$$\|f(t, u)\| \leq K(t)(1 + \|u\|_\alpha),$$

$K$  stetig auf  $[t_0, \infty)$ . Dann gibt es eine Lösung für alle Zeiten, also auf dem ganzen Intervall  $(t_0, \infty)$ .

*Beweis.* Durch die übliche Reskalierung können wir  $\operatorname{Re} \sigma(A) > 0$  annehmen.

$f$  bildet beschränkte Mengen in beschränkte Mengen ab und wir können Theorem 5.9 anwenden. Falls  $t_1$  endlich ist, so gibt es also  $\tau_n \rightarrow t_1$  mit  $\|u(\tau_n)\|_\alpha \rightarrow \infty$ . Aber wegen der Integraldarstellung gilt für  $t < t_1$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\alpha &\leq \|e^{-At}u_0\|_\alpha + \int_{t_0}^t \|A^\alpha e^{-A(t-s)}\| K(s)(1 + \|u(s)\|_\alpha) ds \\ &\leq C_1 + C_2 \int_{t_0}^t (t-s)^{-\alpha} \|u(s)\|_\alpha ds. \end{aligned}$$

Nach der nachfolgenden spezialisierten Gronwall-Ungleichung impliziert dies, dass  $\|u(t)\|_\alpha$  beschränkt bleibt, ein Widerspruch.

$z : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  stetig erfülle

$$z(t) \leq a + b \int_0^t (t-s)^{-\alpha} z(s) ds.$$

Dann gilt mit  $M = 2a$ ,  $\lambda = \lambda(\alpha, b)$

$$z(t) \leq Me^{\lambda t}. \tag{5.7}$$

Sei  $t$  maximal mit  $z(\tau) \leq Me^{\lambda\tau}$  für alle  $\tau < t$ . Dann gilt

$$z(t) \leq a + bM \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{\lambda s} ds \leq a + bM\varepsilon(\lambda)e^{\lambda t},$$

wobei

$$\varepsilon(\lambda) = \int_0^\infty r^{-\alpha} e^{-\lambda r} dr \rightarrow 0$$

für  $\lambda \rightarrow \infty$ . Wir wählen  $\lambda$  so gross, dass  $b\varepsilon(\lambda) < 1/2$ , so dass wir oben schliessen, dass  $z(t) \leq a + Me^{\lambda t}/2 < Me^{\lambda t}$ . Also wird diese obere-Schranken-Funktion von  $z$  nie erreicht.  $\square$

# Kapitel 6

## Regularitätstheorie

### 6.1 Stetige und differenzierbare Abhängigkeit

**Satz 6.1.** Sei  $A$  sektoriell auf  $X$  und  $f, f_n : \mathbb{R} \times X^\alpha \supset U \rightarrow X$  seien wie in Theorem 5.8. Zusätzlich gebe es für jeden Punkt  $(t, u)$  eine Umgebung  $\bar{U}$  mit

$$f_n \rightarrow f \quad \text{in } C^0(\bar{U}, X).$$

Es gelte  $u_{n,0} \rightarrow u_0$  in  $X^\alpha$  und  $0 < \mu_n \rightarrow \mu > 0$  in  $\mathbb{R}$ . Sei nun  $u_n$  die maximal definierte Lösung  $u_n : (0, T_n) \rightarrow X$  von

$$\begin{aligned} \partial_t u_n + \mu_n A u_n &= f_n(t, u_n), \\ u_n(0) &= u_{n,0}, \end{aligned}$$

und ebenso  $u : (0, T_0) \rightarrow X$  zur rechten Seite  $f$  und Startwerten  $u_0$ . Dann gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T_n \geq T_0$$

und

$$u_n \rightarrow u \quad \text{in } C^0([0, T], X^\alpha)$$

für alle  $T < T_0$ .

*Beweis.* Wir können für  $A$  annehmen, dass  $\omega = 0$ . Durch Abziehen der entsprechenden Lösung können wir  $u_0 = 0$  und  $f(t, 0) = 0$  und  $u \equiv 0$  annehmen. Sei nun  $T < T_0$ . Zu jedem Punkt  $t \in [0, T]$  gibt es eine Umgebung von  $(t, 0) \in \mathbb{R} \times X^\alpha$ , so dass  $f$  dort Lipschitzstetig in  $u$  ist. Da  $[0, T]$  kompakt ist, können wir mit endlich vielen Umgebungen überdecken und finden eine Zahl  $\delta > 0$ , so dass

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq M \|v - w\|_\alpha \quad \forall v, w \in B_\delta(0) \subset X^\alpha, t \in [0, T].$$

Ebenfalls wegen der Kompaktheit von  $[0, T]$  schließen wir, dass  $f_n \rightarrow f$  in  $C^0([0, T] \times B_\delta, X)$  für ein eventuell verkleinertes  $\delta > 0$ . Wir wollen nun zeigen, dass alle  $u_n$  für

großes  $n$  auf  $(0, T)$  definiert sind. Dazu rechnen wir

$$\begin{aligned} \|u_n(t)\|_\alpha &\leq \|e^{-\mu_n A t} u_{n,0}\|_\alpha + \left\| \int_0^t e^{-\mu_n A(t-s)} f_n(s, u_n(s)) \, ds \right\|_\alpha \\ &\leq C \|u_{n,0}\|_\alpha + C \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|f_n(s, u_n(s)) - f(s, u_n(s))\| \, ds \\ &\quad + C \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|f(s, u_n(s)) - f(s, 0)\| \, ds \\ &\leq a_n + C \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \|u_n(s)\|_\alpha \, ds \end{aligned}$$

mit  $0 < a_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wir verwenden die spezielle Gronwall Ungleichung (5.7) und finden

$$\|u_n(t)\|_\alpha \leq 2a_n e^{\lambda(\alpha, C)t} \rightarrow 0$$

für  $n \rightarrow \infty$ , gleichmäßig in  $t \in [0, T]$ .

Insbesondere verläßt  $u_n$  für große  $n$  die  $\delta$ -Umgebung der 0 nicht und obige Rechnung wird dadurch gerechtfertigt.  $\square$

Bemerkung: Das Theorem entspricht 3.4.1 aus Henry. Aus gutem Grund übernehmen wir nicht die Aussage

$$T_0 \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} T_n.$$

Unser nächstes Thema: Gegeben  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und ein Funktionenraum  $Z$ . Wie gut ist die Abbildung  $Z \ni u(\cdot) \mapsto f(u(\cdot))$  ?

**Lemma 6.2.** [Eigenschaften der induzierten Abbildung] Sei  $J = [0, T] \subset \mathbb{R}$ ,  $X, Y$  Banachräume und  $f : J \times X \rightarrow Y$  stetig. Dann ist die Abbildung

$$F : C^0(J, X) \ni u \mapsto f(\cdot, u(\cdot)) \in C^0(J, Y)$$

ebenfalls stetig. Falls  $f$  stetig differenzierbar nach  $u$  ist, dann ist auch  $F$  stetig differenzierbar und die Ableitung ist die durch  $\partial_u f$  induzierte Abbildung.

**Übung 6.1.** Man zeige: Für  $f(z) = \sin(z)$  ist die induzierte Abbildung

$$F : L^2((0, 1), \mathbb{R}) \ni u(\cdot) \mapsto \sin(u(\cdot)) \in L^2((0, 1), \mathbb{R})$$

zwar Lipschitz-stetig, aber nirgends differenzierbar.

*Beweis.* 1) Stetigkeit: Seien  $u_n \rightarrow u$  in  $C^0(J, X)$ . Wir nehmen an, dass für ein  $\varepsilon > 0$

$$\|f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot))\| = \sup_t \|f(t, u_n(t)) - f(t, u(t))\| \geq \varepsilon.$$

Dann existieren Zeitpunkte  $t_n \in [0, T]$ , so dass

$$\|f(t_n, u_n(t_n)) - f(t_n, u(t_n))\| \geq \varepsilon.$$

Für eine Teilfolge gilt  $t_n \rightarrow t$  und damit auch  $u(t_n) \rightarrow u(t)$  wegen Stetigkeit von  $u$  und  $u_n(t_n) = u_n(t_n) - u(t_n) + u(t_n) \rightarrow u(t)$  wegen der gleichmäßigen Konvergenz  $u_n \rightarrow u$ . Insbesondere  $f(t_n, u_n(t_n)) \rightarrow f(t, u(t))$  und  $f(t_n, u(t_n)) \rightarrow f(t, u(t))$ , also einen Widerspruch.

2) Differenzierbarkeit: Sei nun  $\partial_u f : J \times X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  stetig, also  $\partial_u f : J \times (X \times X) \ni (t, u, v) \mapsto \partial_u f(t, u(t)) \cdot v(t) \in Y$  stetig. Dann ist nach 1) die induzierte Abbildung

$$\partial_u F : C^0(J, X \times X) \ni (u, v) \mapsto \partial_u f(\cdot, u(\cdot)) \cdot v(\cdot) \in C^0(J, Y)$$

stetig. Insbesondere ist  $\partial_u F(u) : C^0(J, X) \rightarrow C^0(J, Y)$  eine stetige lineare Abbildung, die stetig von  $u$  abhängt. Wir müssen zeigen, dass  $\partial_u F(u)$  tatsächlich die Linearisierung von  $F$  in  $u$  ist, also

$$\begin{aligned} C^0(J, Y) \ni F(u_n) - F(u) - \partial_u F(u)(u_n - u) \\ &= f(\cdot, u_n(\cdot)) - f(\cdot, u(\cdot)) - \partial_u f(\cdot, u(\cdot)) \cdot (u_n - u)(\cdot) \\ &= o(\|u_n - u\|). \end{aligned}$$

Wir nehmen das Gegenteil an, also die Existenz einer Folge  $u_n \rightarrow u$ , von Punkten  $t_n$  und eines  $\varepsilon > 0$  mit

$$\begin{aligned} \|f(t_n, u_n(t_n)) - f(t_n, u(t_n)) - \partial_u f(t_n, u(t_n)) \cdot (u_n - u)(t_n)\| \\ \geq \varepsilon \|u_n - u\|. \end{aligned}$$

Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir wegen Kompaktheit von  $J$  annehmen, dass  $t_n \rightarrow t$ . Wir nutzen den Hauptsatz und schreiben für obigen Ausdruck direkt

$$\begin{aligned} &\|f(t_n, u_n(t_n)) - f(t_n, u(t_n)) - \partial_u f(t_n, u(t_n)) \cdot (u_n - u)(t_n)\| \\ &= \left\| \int_0^1 \{ \partial_u f(t_n, (1-s)u_n(t_n) + su(t_n)) \right. \\ &\quad \left. - \partial_u f(t_n, u(t_n)) \} \cdot [u_n(t_n) - u(t_n)] ds \right\| \\ &\leq 2 \sup_{\tau, \xi} \|\partial_u f(\tau, \xi) - \partial_u f(t, u(t))\| \|u_n(t_n) - u(t_n)\|, \end{aligned}$$

wobei das Supremum über eine kleine Kugel um  $(t, u(t))$  genommen wird. Für grosses  $n$  kann eine kleine Kugel gewählt werden und wir finden einen kleinen Faktor (kleiner als  $\varepsilon$ ) vor  $\|u_n(t_n) - u(t_n)\|$ . Ein Widerspruch.  $\square$

**Satz 6.3.** Sei  $A$  sektoriell in  $X$ ,  $\alpha \in [0, 1)$ ,  $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$  offen, und  $\Lambda$  eine offene Teilmenge eines Banachraumes  $L$  von Parametern. Die Abbildung  $f : U \times \Lambda \rightarrow X$  sei Hölder-stetig mit  $\partial_u f$  und  $\partial_\lambda f$  stetig auf  $U \times \Lambda$ .

Für  $\mu > 0$ ,  $\lambda \in \Lambda$  und  $(t_0, u_0) \in U$  sei  $u(t) = u(t; t_0, u_0, \lambda, \mu)$  die maximal definierte Lösung von

$$\partial_t u + \mu A u = f(t, u, \lambda), \quad u(t_0) = u_0.$$

Dann ist in jedem Punkt  $(t, t_0, u_0, \lambda, \mu)$ , in dem die Lösung definiert ist, die Abbildung  $(u_0, \lambda, \mu) \mapsto u(t; t_0, u_0, \lambda, \mu) \in X^\alpha$  stetig differenzierbar, und die Richtungsableitungen  $v(t) = \partial_\lambda u(t)$ ,  $w(t) = \partial_\mu u(t)$ ,  $z(t) = \partial_{u_0} u(t) \cdot \bar{u}$  sind milde Lösungen von

$$\begin{aligned} \partial_t v + \mu A v &= \partial_u f(\cdot, u(\cdot), \lambda) \cdot v + \partial_\lambda f(\cdot, u(\cdot), \lambda), & v(t_0) &= 0 \in X, \\ \partial_t w + \mu A w &= \partial_u f(\cdot, u(\cdot), \lambda) \cdot w - A u(t), & w(t_0) &= 0 \in X, \\ \partial_t z + \mu A z &= \partial_u f(\cdot, u(\cdot), \lambda) \cdot z, & z(t_0) &= \bar{u} \in X. \end{aligned}$$

*Beweis.* Auf einem kurzen Zeitintervall und mit  $t_0 = 0$  ist unsere Lösung  $u$  der Fixpunkt der parameterabhängigen Abbildung

$$\begin{aligned} G(u_0, \lambda, \mu) : C([0, T], X^\alpha) &\rightarrow C([0, T], X^\alpha), \\ u &\mapsto e^{-\mu A} u_0 + \int_0^\cdot e^{-\mu A(\cdot-s)} f(s, u(s), \lambda) ds. \end{aligned}$$

Beweisidee: Wir zeigen, dass  $G$  differenzierbar ist. Der Satz über implizite Funktionen liefert dann, dass auch die Fixpunkte differenzierbar von den Parametern abhängen.

Wir schreiben

$$G(u_0, \lambda, \mu) : u \mapsto T_1(\mu, u_0) + T_2(\mu, f(\cdot, u(\cdot), \lambda))$$

mit den Abbildungen

$$T_1 : \mathbb{R}_+ \times X^\alpha \ni (\mu, u_0) \mapsto e^{-\mu A} u_0 \in C([0, T], X^\alpha)$$

und

$$T_2 : \mathbb{R}_+ \times C([0, T], X) \ni (\mu, g) \mapsto \int_0^\cdot e^{-\mu A(\cdot-s)} g(s) ds \in C([0, T], X^\alpha).$$

In Wirklichkeit ist  $T_1$  nur auf einer Teilmenge definiert; wollen hier lediglich die Topologien kennzeichnen.

Die Abbildungen  $T_i$  sind differenzierbar mit den erwarteten Ableitungen. Die Abhängigkeit von  $u$  bzw.  $g$  ist linear, hier folgt die Differenzierbarkeit also aus der Stetigkeit. Die Abhängigkeit von  $\mu$  muss analog zu obigem Lemma gezeigt werden. Wir berechnen hier nur für die formale Ableitung von  $T_1$ ,

$$\partial_\mu T_1(\mu, u_0) = (t \mapsto -A t e^{-\mu A t} u_0).$$

Nach Theorem 4.16 ist diese Abbildung beschränkt.

Mit  $f$  ist nach Lemma 6.2 auch die induzierte Abbildung  $C([0, T], X^\alpha) \times \Lambda \ni (u, \lambda) \mapsto f(\cdot, u(\cdot), \lambda) \in C([0, T], X)$  differenzierbar. Also ist  $G$  differenzierbar nach seinen Parametern, und damit auch sein Fixpunkt.

Die Ableitung bestimmt sich durch Differenzieren der Gleichung für milde Lösungen,

$$u(t) = e^{-\mu A t} u_0 + \int_0^t e^{-\mu A(t-s)} f(s, u(s), \lambda) ds.$$

Dies liefert die Gleichungen.

Lokalisierung: Wir sind in diesem Beweis davon ausgegangen, dass die Lösung  $u$  Fixpunkt der Abbildung  $G$  ist. Dies ist im Allgemeinen nur lokal der Fall. Wir müssen also  $[t_0, t]$  in kleine (aber nur endlich viele) Abschnitte unterteilen. Auf jedem Abschnitt gilt obiges Argument, und  $u(t)$  ist eine Verkettung endlich vieler differenzierbarer Abbildung.  $\square$

Im Theorem kam die Abhängigkeit von  $t_0$  und von  $t$  nicht vor. Unter stärkeren Annahmen an  $f$  können wir aber auch eine glatte Abhängigkeit von  $t$  und  $t_0$  erwarten.

**Corollar 6.4.** *Seien  $X$ ,  $A$ , und  $f$  wie in Theorem 6.3. Zusätzlich sei  $f \in C^r(U \times \Lambda, X)$ . Dann ist auch die Lösungsabbildung*

$$P : (t, t_0, u_0, \lambda, \mu) \mapsto u(t; t_0, u_0, \lambda, \mu) \in X^\alpha$$

von der Klasse  $C^r$ .

*Beweis.* Wir transformieren auf ein Standardintervall  $[0, 1]$ . Dazu definieren wir  $T = t - t_0$  und setzen

$$v(s) := v(s; u_0, \lambda, T, t_0, \mu) := u(s \cdot T + t_0; t_0, u_0, \lambda, \mu).$$

Dann löst  $v$  die Gleichung

$$\begin{aligned} v(0) &= u_0, \\ \partial_s v + \mu T A v &= g(s, v, (\lambda, T, t_0)) := T \cdot f(s \cdot T + t_0, v, \lambda). \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für die Abbildung

$$P : (t, t_0, u_0, \lambda, \mu) \mapsto v(1; u_0, \lambda, t - t_0, t_0, \mu).$$

Nach obigem Theorem ist diese Abbildung ‘so gut, wie es  $g$  erlaubt’, für  $f \in C^1$  ist  $g \in C^1$ , also auch  $P = v(1; \cdot) \in C^1$ .

Höhere Differenzierbarkeit: Im Theorem gilt die Aussage auch auf Stufe  $r$ ,  $r > 1$ , denn die Aussage ist auf die Ableitungen wieder anwendbar. Also gilt auch im Corollar die  $C^r$ -Abhängigkeit.  $\square$

## 6.2 Verbesserte Regularität

Für die lineare Gleichung  $\partial_t u = Au$  haben wir in der linearen Theorie gesehen, dass für Startwerte  $u_0 \in X$  die Lösung in jedem  $X^k$  liegt,  $u(t) \in X^k$  für alle  $t > 0$ . Die Lösung verbessert also ihre ‘räumliche Regularität’.

Auch für die semilineare Gleichung haben wir in Lemma 5.7 gesehen, dass für Anfangswerte  $u_0 \in X^\alpha$  gilt:  $u(t) \in D(A)$  für alle  $t > 0$ . Die rechte Seite  $f(t, u(t))$  ist (unter unseren Annahmen an  $f$ ) bestenfalls in  $X$ . Wir können also eigentlich nur  $\partial_t u(t) \in X$  erwarten.

Das nachfolgende Theorem ist daher erstaunlich: Es besagt, dass die Zeitableitung von  $u$  besser ist, als wir es von der rechten Seite  $f : U \rightarrow X$  erwarten können.

**Satz 6.5.** Sei  $A$  sektoriell auf  $X$ ,  $f : U \rightarrow X$  lokal Lipschitz auf einer offenen Menge  $U \subset \mathbb{R} \times X^\alpha$  für  $\alpha \in [0, 1)$  und  $\gamma \in [0, 1)$ . Wir betrachten eine Lösung  $u : [0, T] \rightarrow X^\alpha$  von

$$\partial_t u + Au = f(\cdot, u(\cdot)), \quad u(0) = u_0.$$

für  $(0, u_0) \in U$ . Dann gilt für  $t \in (0, T]$  die Abschätzung

$$\|\partial_t u(t)\|_\gamma \leq Ct^{\alpha-\gamma-1}.$$

$C$  hängt nur von  $u_0$ ,  $f$ ,  $\alpha$  und  $T$  ab.

*Beweis.* Wir nutzen wieder die Darstellung von  $u$  als milde Lösung. Da für den Ausdruck  $e^{-At}u_0$  die Aussage klar ist, betrachten wir nur das Integral

$$G(t) := \int_0^t e^{-A(t-s)} g(s) ds,$$

und sind interessiert an der Funktion

$$g(s) := f(s, u(s)).$$

1.)  $g$  ist beschränkt als Abbildung nach  $X$ . Wir wählen  $\beta \in (\alpha, 1)$ , und stellen fest, dass  $G(t)$  beschränkt in  $X^\beta$  ist, weil  $(t-s)^{-\beta}$  integrierbar ist.

2.) Die Lipschitzstetigkeit von  $f$  impliziert wegen Beschränktheit von  $u(\cdot)$  in  $X^\alpha$  und Kompaktheit von  $[0, T]$

$$\begin{aligned} \|g(t+h) - g(t)\| &\leq \|f(t+h, u(t+h)) - f(t, u(t+h))\| \\ &\quad + \|f(t, u(t+h)) - f(t, u(t))\| \\ &\leq C(h + \|u(t+h) - u(t)\|_\alpha). \end{aligned}$$

3.) Verbesserte Abschätzungen für  $u$  und  $g$ . Wir schreiben für  $t > \tau > 0$

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= (e^{-Ah} - \text{id})e^{-A(t-\tau)}u(\tau) \\ &\quad + \int_\tau^t e^{-A(t-s)}[g(s+h) - g(s)] ds + \int_\tau^{\tau+h} e^{-A(t+h-s)}g(s) ds. \end{aligned}$$

Dies setzen wir in die  $g$ -Abschätzung aus 2.) ein,

$$\begin{aligned} \|g(t+h) - g(t)\| &\leq C(h + \|u(t+h) - u(t)\|_\alpha) \\ &\leq C(h + h(t-\tau)^{-1+\beta-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta) \\ &\quad + \int_\tau^t (t-s)^{-\alpha}\|g(s+h) - g(s)\| ds + h(t-\tau)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Wir verwenden die Gronwall Ungleichung aus (5.7) mit  $M = 2a$ ,  $\lambda = \lambda(\alpha, C)$ , also  $e^{\lambda T} = C'$ . Es gilt

$$\|g(t+h) - g(t)\| \leq Ch [1 + (t-\tau)^{-1+\beta-\alpha}\|u(\tau)\|_\beta + (t-\tau)^{-\alpha}].$$

4.) Nach Theorem 5.2 (Darstellung der Zeitableitung) gilt

$$\begin{aligned}\partial_t G(t) &= \partial_t \left[ \int_0^\tau \dots + \int_\tau^t \dots \right] \\ &= - \int_0^\tau A e^{-A(t-s)} g(s) ds + \int_\tau^t A e^{-A(t-s)} [g(t) - g(s)] ds \\ &\quad + e^{-A(t-\tau)} g(t).\end{aligned}$$

Mit dieser Darstellung können wir die  $X^\gamma$ -Norm abschätzen,

$$\begin{aligned}\|\partial_t G(t)\|_\gamma &\leq C(\tau(t-\tau)^{-1-\gamma} + (t-\tau)^{-\gamma} \|g(t)\|) \\ &\quad + C \int_\tau^t (t-s)^{-1-\gamma+1} [1 + (s-\tau)^{-1+\beta-\alpha} \|u(\tau)\|_\beta + (s-\tau)^{-\alpha}] ds.\end{aligned}$$

Wir setzen  $\tau = t/2$  und zerlegen die Integrale in Stücke von  $\tau$  bis  $3t/4$  und von  $3t/4$  bis  $t$ . Es gilt  $\|u(t)\|_\beta \leq Ct^{\alpha-\beta}$  (vom  $u_0$ -Anteil, der  $G$ -Anteil ist beschränkt). Daher

$$\|\partial_t G(t)\|_\gamma \leq Ct^{-\gamma}.$$

Die Regularität von  $\partial_t u(t)$  wird also durch den  $e^{-Atu_0}$ -Anteil limitiert auf die behauptete Größe.  $\square$

In Anwendungen wird dieses Theorem oft wie folgt benutzt. Die Lösung von  $\partial_t u + Au = f(\cdot, u)$  ist beschränkt als Abbildung  $(0, T) \rightarrow X^\alpha$ . Falls  $f$  Lipschitz ist, so gilt nach unserem Theorem für  $t_1 \in (0, T)$ , dass  $\partial_t u(t_1) \in X^\alpha$ .

Wir nehmen nun an, dass  $f \in C^2$ . Dann können wir die  $u$ -Gleichung durchdifferenzieren, denn  $\partial_t^2 u(t)$  existiert nach Corollar 6.4. Die Funktion  $v = \partial_t u$  löst

$$\begin{aligned}\partial_t v + Av &= \partial_u f(\cdot, u(\cdot)) \cdot v + \partial_t f(\cdot, u(\cdot)), \\ v(t_1) &= \partial_t u(t_1) \in X^\alpha.\end{aligned}$$

Falls zusätzlich die stationäre Gleichung  $Au - f(t, u) = g$  optimal regularisiert, dann folgt aus  $Au - f(t, u) = -\partial_t u(t) \in X^\alpha$ , dass  $u(t) \in X^{1+\alpha}$ .

# Kapitel 7

## Anwendungen und Ausblick

### 7.1 Semilineare Gleichungen in Anwendungen

Wir behandeln in diesem Abschnitt zwei Anwendungen unserer Theorie. Das erste Beispiel ist eine Illustration, wie die Voraussetzungen in konkreten Fällen überprüft werden können. Das zweite Beispiel ist die Navier-Stokes Gleichung, also eine Anwendung ‘aus dem Leben’.

#### 7.1.1 Eine Reaktions-Diffusionsgleichung

Wir betrachten auf einem  $C^\infty$ -Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  die Evolutionsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = -\lambda u^3, \quad u(0) = u_0. \quad (7.1)$$

Dabei sei  $\lambda > 0$  fest. Wir wählen als Grundraum  $X = L^p(\Omega)$ , als Operator  $A = -\Delta : W^{2,p} \subset X \rightarrow X$ , und  $f(\cdot, u(\cdot)) = -\lambda u^3$ . Wir wählen  $\alpha \in (n/(2p), 1)$  und fordern daher  $p > n/2$ .

Wir beschränken uns im Folgenden auf spezielle Werte, um die Aussagen transparent zu halten.

$$n = 3, \quad p = 2, \quad \lambda = 1.$$

**1) Lokale Existenz.** Wir nehmen zunächst an, dass  $u_0 \in X^\alpha$ . Wir überprüfen nun die Voraussetzungen an  $f$ . Dazu benutzen wir die Einbettung  $X^\alpha \subset L^\infty$ , auf die wir im Anschluss an diesen Beweis zurückkommen werden. Es gilt

$$\|f(u)\|_{L^p} = \|u^3\|_{L^p} = \|u\|_{L^{3p}}^3 \leq C \|u\|_{X^\alpha}^3.$$

Also ist  $f$  in einer  $X^\alpha$ -Umgebung von  $u_0$  beschränkt. Für die Lipschitz Stetigkeit rechnen wir

$$\begin{aligned} \|f(u) - f(v)\|_{L^2}^2 &\leq \int (|u|^3 - |v|^3)^2 \\ &\leq C(\|u\|_{L^\infty}^4 \|u - v\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^2 \|v\|_{L^\infty}^2 \|u - v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^\infty}^4 \|u - v\|_{L^2}^2) \\ &\leq C(\|u\|_{L^\infty}^2 + \|v\|_{L^\infty}^2) \|u - v\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(\|u\|_{X^\alpha}^2 + \|v\|_{X^\alpha}^2) \|u - v\|_{X^\alpha}^2. \end{aligned}$$

Also ist  $f$  Lipschitz in einer  $X^\alpha$ -Umgebung. Theorem 5.8 impliziert: Es gibt eine eindeutige lokale Lösung  $u$ .

**2) Globale Existenz.** Der Beweis für globale Existenz beruht auf der Kenntnis einer Energiefunktion (Ljapunovfunktion), also einer Größe, die entlang Lösungen nur abnehmen kann. Wir berechnen für die Lösung auf ihrem Existenzintervall

$$\begin{aligned}\partial_t \int |u|^6 &= 6 \int |u|^4 u \cdot \partial_t u = 6 \int |u|^4 u \cdot (\Delta u - u^3) \\ &= -6 \int |u|^8 - 6 \int \nabla u \cdot 5|u|^4 \nabla u \leq 0.\end{aligned}$$

Bei der partiellen Integration haben wir ausgenutzt, dass  $u(t) \in D(A) = H^2$  für alle  $t > 0$ . Dieselbe Rechnung liefert auch  $\partial_t \|u\|_{L^2}^2 \leq 0$ .

Insbesondere gilt also

$$\|u(t)\|_X \leq C, \quad \|f(u(t))\|_X \leq C.$$

$u$  bleibt also in  $X$  beschränkt. Die Aussage für  $f$  kann wie in 5.11 benutzt werden, um zu zeigen, dass  $u$  in endlicher Zeit nicht gegen  $\infty \in X^\alpha$  laufen kann. Die Lösung ist also eine globale Lösung.

Wir wollen noch mehr zeigen, nämlich die Beschränktheit in  $X^\beta$  für  $\beta \in (0, 1)$ . Wir schreiben für  $\delta > 0$

$$u(t + \delta) - e^{-A\delta} u(t) = - \int_t^{t+\delta} e^{-A(t+\delta-s)} u(s)^3 ds.$$

Wir schließen, dass  $\|u(t + \delta) - e^{-A\delta} u(t)\|_{X^\beta}$  beschränkt ist. Damit ist dann aber auch für jedes  $\beta < 1$  und  $t > \delta$

$$\|u(t)\|_{X^\beta} \leq \|e^{-A\delta} u(t - \delta)\|_{X^\beta} + \|u(t) - e^{-A\delta} u(t - \delta)\|_{X^\beta} \leq C_\delta.$$

Für das Zeitintervall  $(0, 1)$  liefert uns die Beschränktheit von  $f$  eine a priori Schranke, also ist die Lösung global in  $X^\beta$  beschränkt. Theorem 5.9 liefert insbesondere die globale Existenz.

**3) Allgemeinere Anfangswerte (für  $\Omega$  beschränkt).** Bisher haben wir  $u_0 \in X^\alpha$  vorausgesetzt. Wir wollen nun allgemeine  $u_0 \in L^q(\Omega)$  mit  $q = 3p$  betrachten.

Wir wählen Approximationen der Startwerte,

$$u_0^n \rightarrow u_0 \text{ in } L^q(\Omega), \quad u_0^n \in X^\alpha.$$

Zu diesen geglätteten Startwerten gibt es globale Lösungen  $u^n$  nach 1) und 2). Nach der a priori Abschätzung ist für jedes  $m \in \mathbb{N}$  die Folge  $u^n(1/m) \in X^\beta$  beschränkt. Nach Theorem 4.14 ist die Einbettung  $X^\beta \subset X^\alpha$  kompakt für  $\beta > \alpha$ , da  $(1 - \Delta)^{-1} : X \rightarrow X$  kompakt ist. Also, für eine Teilfolge  $n \rightarrow \infty$ ,

$$u^n(1/m) \rightarrow u_m \text{ in } X^\alpha \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Durch Wahl einer Diagonalfolge erreichen wir diese Konvergenz für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

Wir definieren nun  $u(t)$  wie folgt. Für ein  $t > 0$  wählen wir  $m > 1/t$ , betrachten die Lösung  $u(t)$  zu  $u(1/m) = u_m$ . Dies definiert  $u(t)$ . Es gilt

1.  $u$  ist wohldefiniert, denn nach Theorem 6.1 gilt für alle  $t > 1/m$ : Die Startwerte  $u^n(1/m) \rightarrow u_m$  konvergieren und daher auch  $u^n(t) \rightarrow u(t)$ .
2.  $u$  ist Lösung: Nach Definition.
3. Anfangswerte:  $f$  ist beschränkt in  $L^\infty((0, 1), X)$ , unabhängig von  $n$ . Wir rechnen

$$\begin{aligned} u(t) - u_0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} [u^n(t) - u_0] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ e^{-At} u_0^n + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u^n(s)) ds - u_0 \right]. \end{aligned}$$

Aus der Beschränktheit von  $f(u^n)$  folgt für die Norm

$$\|u(t) - u_0\|_X \leq 0 + Ct + \|(e^{-At} - \text{id})u_0\|,$$

also  $u(t) \rightarrow u_0$  in  $X$  für  $t \rightarrow 0$ .

**4) Zusätzliche Regularität.** Nach Theorem 6.5 gilt für Zeitpunkte  $t > 0$  zusätzlich

$$\partial_t u(t) \in X^\gamma,$$

also die zeitliche Regularität der Lösung. Da  $f$  nicht von  $t$  abhängt kann man beliebig oft nach  $t$  differenzieren.

Schließlich betrachten wir die räumliche Regularität. Wir behaupten, dass  $f : X^1 \rightarrow X^1$  wieder Lipschitzstetig ist. Wir berechnen nur die Beschränktheit:

$$\begin{aligned} \|\Delta(f(u))\|_{L^2} &\leq C\|\Delta(u^3)\|_{L^2} \\ &\leq C\|3u^2\Delta u\|_{L^2} + C\|6u|\nabla u|^2\|_{L^2} \\ &\leq 3C\|u\|_{L^\infty}^2\|\Delta u\|_X + 6C\|u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_X^2 \\ &\leq C\|u\|_{X^1}^3. \end{aligned}$$

Nun lesen wir die Gleichung als stationäre Gleichung: Mit  $g(t) = \partial_t u(t) \in X^\gamma$  (mit Abschätzung) betrachten wir für jedes  $t$

$$\Delta u(t) + f(u(t)) = g(t).$$

Dies liefert  $\|u(t)\|_{H^2} \leq C(\|f(u(t))\|_{L^2} + \|g(t)\|_{L^2})$ , also  $u(t) \in H^2$  mit Abschätzungen. Dies können wir wieder in  $f$  einsetzen und finden  $f(u(t)) \in H^2$ . Die Regularität von  $u(t)$  wird nur durch die Zeitableitung limitiert und wir haben  $u(t) \in X^{1+\gamma}$  mit Abschätzungen. Die Abbildung  $f : X^{1+\gamma} \rightarrow X^1$  ist auch Lipschitzstetig, denn die Einbettung  $X^{1+\gamma} \rightarrow X^1$  ist stetig und linear. Dann kann man  $u$  auch als Lösung im Raum  $C^0((t_0, \infty), X^{1+\gamma})$  über dem Grundraum  $X^1$  auffassen. Der Prozess läßt sich noch iterieren. Wir finden, dass  $u$  eine klassische Lösung ist,

$$u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^n).$$

*Ergebnis:* Für  $u_0 \in L^{3p}(\Omega)$ ,  $p > n/2$ , hat Gleichung (7.1) eine globale klassische Lösung.

Wir haben verwendet, dass  $X^\alpha \subset L^\infty$ . Dies ist noch zu zeigen.

**Satz 7.1.** Für Gebiete  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  mit glattem Rand (Fortsetzungseigenschaft) und einen sektoriellen Operator  $A$  auf  $X = L^p(\Omega)$ ,  $p < \infty$  mit  $D(A) = X^1 \subset W^{m,p}(\Omega)$  stetig, gilt

$$X^\alpha \subset W^{k,q}(\Omega) \quad (7.2)$$

mit stetiger Einbettung, falls  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $q \geq p$ , und

$$k - \frac{n}{q} < m\alpha - \frac{n}{p}.$$

*Beweis.* Der Beweis beruht auf einer Gagliardo-Nirenberg Interpolationsabschätzung zwischen  $L^p$  und  $W^{m,p}$ ; wir werden sie allerdings hier nicht beweisen. Sie lautet

$$\|u\|_{W^{k,q}} \leq C \|u\|_{W^{m,p}}^\theta \|u\|_{L^p}^{(1-\theta)},$$

und gilt, falls  $k - \frac{n}{q} < \theta(m - \frac{n}{p}) + (1 - \theta)(0 - \frac{n}{p}) = \theta m - \frac{n}{p}$  und  $\infty \geq q \geq p$  (oft ist auch Gleichheit erlaubt). Für  $u \in D(A)$  finden wir also

$$\|u\|_{W^{k,q}} \leq C \|Au\|_X^\theta \|u\|_X^{(1-\theta)}.$$

Wir wollen gerne auf der rechten Seite  $\|u\|_{X^\alpha}$  stehen haben, brauchen also quasi eine inverse Interpolationsabschätzung.

Wir schreiben  $u$  als

$$u = A^{-\alpha} A^\alpha u = C_0 \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-At} A^\alpha u \, dt,$$

und rechnen

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k,q}} &\leq C \int_0^\infty t^{\alpha-1} \|Ae^{-At} A^\alpha u\|^\theta \|e^{-At} A^\alpha u\|^{1-\theta} \, dt \\ &\leq C \int_0^\infty t^{\alpha-1} t^{-\theta} e^{-\delta t} \|A^\alpha u\| \, dt \leq C(\theta, \alpha) \|A^\alpha u\|, \end{aligned}$$

falls  $\theta < \alpha$ . Nach Voraussetzung an  $\alpha$  ist ‘noch Platz’ zum kritischen Exponenten, wir finden also  $\theta$  mit den gewünschten Eigenschaften.  $\square$

## 7.1.2 Die Navier-Stokes Gleichung

Wir betrachten die Navier-Stokes Gleichung auf einem beschränkten, glatt berandeten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Sie bestimmen das Geschwindigkeitsfeld  $v(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  und den Druck  $p(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und lauten

$$\begin{aligned} \partial_t v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p &= 0, \\ \operatorname{div} v &= 0, \end{aligned}$$

und werden ergänzt mit der Randbedingung  $v = 0$  auf  $\partial\Omega$  und den Startwerten  $v(0) = v_0 \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ .

Zunächst scheint diese Gleichung nicht in unsere Theorie zu passen: Es kommt keine Zeitableitung des Druckes vor. Wir werden sehen, dass wir durch eine geeignete Wahl des Funktionenraumes den Druck ‘wegprojizieren’ können. Divergenzfreie Funktionen mit verschwindender Normalgeschwindigkeit am Rand sind

$$\mathcal{H}_\sigma := \{u \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n) \mid u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0, \operatorname{div} u = 0\}.$$

Wir betrachten den Abschluss  $H_\sigma$  von  $\mathcal{H}_\sigma$  bezüglich der  $L^2(\Omega)$ -Norm. Unser Geschwindigkeitsfeld  $v$  suchen wir im Raum  $v(t) \in H_\sigma$ .

Von welchem Typ ist der Ausdruck  $\nabla p$ ? Wir setzen

$$\mathcal{H}_\pi := \{\nabla p \mid p \in C^1(\Omega, \mathbb{R})\},$$

und betrachten wieder den Abschluss  $H_\pi$  von  $\mathcal{H}_\pi$  bezüglich der  $L^2(\Omega)$ -Norm.

Damit sind  $H_\sigma$  und  $H_\pi$  lineare Unterräume von  $L^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ . Wir behaupten, dass sie orthogonal zueinander sind: Tatsächlich gilt für Funktionen  $u \in \mathcal{H}_\sigma$  und  $\nabla p \in \mathcal{H}_\pi$

$$\langle u, \nabla p \rangle = \int_\Omega u \cdot \nabla p = - \int_\Omega \operatorname{div} u p + \int_{\partial\Omega} u \cdot n p = 0.$$

Beliebige Funktionen  $u \in H_\sigma$  und  $\nabla p \in H_\pi$  können in  $L^2$  approximiert werden, das Skalarprodukt verschwindet für alle Approximationen, also auch im Limes.

Wir behaupten nun weiterhin, dass die beiden Unterräume nicht nur orthogonal sind, sondern auch den ganzen Raum  $L^2$  aufspannen, also

$$L^2(\Omega, \mathbb{R}^n) = H_\sigma \oplus H_\pi. \quad (7.3)$$

Um dies zu zeigen, müssen wir ein beliebiges Element  $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  zerlegen. Zunächst sei  $u \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Unser Ziel ist,  $u$  zu schreiben als  $u = v + \nabla p$ .

Wie finden wir  $v$  und  $p$ ? Wir berechnen die Divergenz und die Randwerte als

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u &= \operatorname{div} v + \operatorname{div} \nabla p = 0 + \Delta p, \\ 0 &= u \cdot n|_{\partial\Omega} = v \cdot n|_{\partial\Omega} + (\nabla p) \cdot n|_{\partial\Omega} = \partial_n p|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Die linken Seiten sind bekannt. Wir lesen obiges als Gleichung für  $p$ . Nach dieser formalen Rechnung (die von einer bekannten Zerlegung ausging) *definieren* wir  $p$  als Lösung obiger Gleichung, wir haben damit ein  $p \in C^1(\bar{\Omega})$  und ein  $v := u - \nabla p \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ . Da dieses  $v$  divergenzfrei ist und die Randbedingung erfüllt, haben wir tatsächlich  $u$  zerlegt und (7.3) bewiesen.

Allgemeine Funktionen  $u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$  approximieren wir in  $L^2$  mit  $C_0^\infty$ -Funktionen  $u_k$ . Mit  $u_k$  konvergieren auch die Zerlegungen in  $L^2$  wegen der Abschätzung

$$\|\nabla p\|_{L^2} \leq C \|u\|_{L^2}$$

für Lösungen der Poisson-Gleichung.

Mit der Zerlegung in orthogonale abgeschlossene Unterräume gibt es insbesondere eine Projektion  $P$  auf  $H_\sigma$ . Für glatte Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen können wir die Projektion  $P$  auf die erste Gleichung anwenden und finden

$$\begin{aligned} 0 &= P(\partial_t v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p) = \partial_t v - \nu P \Delta v + P[(v \cdot \nabla)v] \\ &=: \partial_t v + Av - f(v), \end{aligned}$$

im Grundraum  $v(t) \in X = H_\sigma$  und mit der zusätzlichen Randbedingung  $v = 0$  auf  $\partial\Omega$ . Wir nehmen diese Randbedingung in den Definitionsbereich von  $D(A)$  von  $A = -\nu P\Delta$  auf. Um  $A$  zu definieren, müssen wir noch  $D(A)$  spezifizieren.

**Definition von  $A$ .** Wir definieren zunächst  $\tilde{A}$ ,

$$\tilde{A} := -\nu P\Delta, \quad D(\tilde{A}) = H_\sigma \cap C_0^3(\Omega).$$

Wir wollen  $A$  als eine Fortsetzung von  $\tilde{A}$  zu einem abgeschlossenen Operator  $A$  auf  $H_\sigma$  definieren. Wir definieren, dass  $v \in X$  in  $D(A)$  ist, falls es eine Folge  $v_k$  und ein  $f$  gibt mit

$$D(\tilde{A}) \ni v_k \rightarrow v \text{ in } X, \quad \tilde{A}v_k =: f_k \rightarrow f \text{ in } X.$$

Wir definieren  $Av := f$ . Dieses  $A$  ist dann abgeschlossen. Es bleibt zu zeigen:  $v = 0$  impliziert  $f = 0$  (für die Wohldefiniertheit). Dazu testen wir  $\tilde{A}v_k = f_k$  mit  $\varphi \in D(\tilde{A})$  und erhalten

$$\begin{aligned} \langle f, \varphi \rangle &\leftarrow \langle f_k, \varphi \rangle = \langle \tilde{A}v_k, \varphi \rangle \\ &= \langle -\nu\Delta v_k, \varphi \rangle = \langle v_k, -\nu\Delta\varphi \rangle \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Da  $D(\tilde{A})$  dicht ist in  $X$ , folgt  $f = 0$ . Wir haben damit  $A$  definiert.

**Abschätzungen.** Der Operator  $\tilde{A}$  entspricht der stationären und linearisierten Gleichung:  $\tilde{A}v = f \in H_\sigma$  für  $v \in D(\tilde{A})$  ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} -\nu\Delta v + \nabla p &= f, \\ \operatorname{div} v &= 0. \end{aligned}$$

Es ist bekannt (siehe z.B. Galdi [6]), dass für solche Lösungen  $v$  eine Abschätzung

$$\|v\|_{H^2} \leq C\|f\|_{L^2}$$

gilt. Idee: Testen mit  $v$  liefert eine  $H^1$ -Abschätzung. Man nimmt die Gleichung für diskrete Differenzenquotienten und testet wieder mit den Lösungen, um die  $H^2$ -Abschätzung zu bekommen.

Die a priori Abschätzung (7.1.2) liefert: Cauchy-Folgen  $f_k \rightarrow f$  liefern  $H^2$ -Cauchy-Folgen  $v_k \rightarrow v$ . Insbesondere gilt (7.1.2) für alle  $Av = f$ ,  $v \in D(A)$ . Damit folgt auch

$$D(A) = X^1 \subset H^2(\Omega) \cap H_\sigma \cap H_0^1$$

mit stetiger Einbettung:  $\|v\|_{H^2} \leq C\|Av\|_X \leq C\|v\|_{X^1}$ .

Der Operator  $A$  ist selbstadjungiert und dissipativ. Nach Satz 4.9 ist daher  $A$  sektoriell.

**Lokale Lösungen.** Wir suchen nun Lösungen von

$$\partial_t v + Av = f(v), \quad v(0) = Pv_0$$

in  $X = H_\sigma$ . Wir beschränken uns für die Bruchrechnungen auf  $n = 3$ . Die a priori Abschätzung liefert  $X^1 \equiv D(A) \subset H^2(\Omega) \cap H_\sigma \cap H_0^1$ . Der Einbettungssatz 7.1 liefert dann für  $\alpha > 3/4$  und  $q < 3$

$$\begin{aligned} X^\alpha &\subset W^{1,q}(\Omega, \mathbb{R}^n), \\ X^\alpha &\subset L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n), \end{aligned}$$

mit stetigen Einbettungen.

Wir müssen nun die Nichtlinearität untersuchen. Für die Beschränktheit rechnen wir für  $\alpha > 3/4$

$$\begin{aligned} \|f(v)\|_{H^\sigma} &= \|P[(v \cdot \nabla)v]\|_{L^2} \leq \|(v \cdot \nabla)v\|_{L^2} \\ &\leq \|v\|_{L^\infty} \|v\|_{H^1} \leq C\|v\|_{X^\alpha}^2. \end{aligned}$$

Die Lipschitzstetigkeit kann ebenso berechnet werden (oder man verwendet, dass  $f$  als Polynom sogar differenzierbar ist). Unser Existenzresultat Satz 5.8 ist anwendbar und liefert die Existenz einer lokalen Lösung. Nach Satz 6.3 hängt die Lösung differenzierbar (sogar analytisch) von  $v_0$ , von  $t$ , und von  $\nu$  ab.

Wir wollen nun überprüfen, ob wir die Ausgangsgleichung gelöst haben. Es gilt  $\partial_t v(t) \in H_\sigma$  und  $v(t) \in D(A) \subset H^2$  für alle  $t \in (0, T)$ , und daher  $Av(t) = -P\nu\Delta v(t)$ . Insbesondere

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_t v(t) - P\nu\Delta v(t) + P[(v \cdot \nabla)v] \\ &= P\{\partial_t v(t) - \nu\Delta v(t) + (v(t) \cdot \nabla)v(t)\}. \end{aligned}$$

Die Projektion der Klammer verschwindet, also läßt sich die Klammer schreiben als ein  $-\nabla p(t)$ . Damit ist die Ausgangsgleichung gelöst.

Wir können auch Satz 6.5 anwenden und sehen, dass die Lösung eine klassische Lösung ist. Das Theorem über das Verhalten für große Zeiten 5.9 impliziert, dass zum Zeitpunkt  $T$ , an dem unsere (klassische) Lösung aufhört zu existieren, gilt

$$\|v(t_k)\|_{X^\alpha} \rightarrow \infty \quad \text{für } t_k \rightarrow T.$$

Die Schwierigkeit des Millenniumproblems liegt darin, dass man für die Größe links keine a priori Schranke hat. Dann wüßten wir nämlich sofort, dass die Lösung global existieren muss.

## 7.2 Die Umgebung einer stationären Lösung

Immer sei  $A$  sektoriell auf dem Banachraum  $X$  und  $f : X^\alpha \rightarrow X$  sei der Einfachheit halber auf dem ganzen Unterraum definiert,  $C^1$ , und unabhängig von  $t$  (die Gleichung ist *autonom*). Wir untersuchen stationäre Punkte, also  $u_0 \in D(A)$  mit

$$Au_0 = f(u_0).$$

Die Lösung  $u$  der zeitabhängigen Gleichung mit Anfangswert  $u(t_0) = u_0$  ist identisch mit  $u_0$ , also  $u(t) = u_0$  für alle  $t \geq t_0$ .

Im Folgenden nehmen wir an, dass  $u_0 = 0$ ; weiterhin modifizieren wir  $A$  zu  $\tilde{A} = A - \partial_u f(u_0) \langle \cdot \rangle$  und entsprechend  $f$ . Nach Weglassen der Tilde haben wir die Situation

$$\begin{aligned} \partial_t u + Au &= f(u), \quad f(0) = 0, \partial_u f(0) = 0, \\ A \text{ sektoriell, } f &\in C^1(X^\alpha, X). \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dies ist die einfachste Situation für Untersuchungen der lokalen Dynamik.

**Proposition 7.2** (Linearisierte Stabilität). *Die Situation sei wie in (7.4), zusätzlich gelte für ein  $\delta > 0$*

$$\operatorname{Re} \sigma(A) > \delta.$$

*Dann ist der Punkt 0 gleichmäßig asymptotisch stabil, das heißt: Es gibt ein  $\rho, M > 0$ , so dass für jedes  $u_0 \in B_{\rho/M}(0) \subset X^\alpha$  gilt: die zugehörige Lösung  $u$  existiert auf  $(0, \infty)$  und erfüllt*

$$\|u(t)\|_\alpha \leq M e^{-\delta t} \|u_0\|_\alpha.$$

*Beweis.* Das Spektrum ist abgeschlossen und in einem Sektor, daher finden wir  $\beta$  mit  $\delta < \beta < \operatorname{Re} \sigma(A)$ . Wir verwenden die Abschätzungen

$$\|e^{-At} z\|_\alpha \leq C e^{-\beta t} \|z\|_\alpha, \quad \|e^{-At} z\|_\alpha \leq C t^{-\alpha} e^{-\beta t} \|z\|.$$

Wir wählen nun  $\sigma > 0$  so klein, dass

$$\sigma \cdot C \int_0^\infty t^{-\alpha} e^{-(\beta-\delta)t} dt < \frac{1}{2}$$

und  $\rho > 0$  so klein, dass

$$\|f(z)\| \leq \sigma \|z\|_\alpha \quad \forall \|z\|_\alpha \leq \rho.$$

Wir setzen nun  $M = 2C$  und betrachten die Lösung  $u$  mit Startwerten  $u_0$ . Solange  $u$  existiert mit  $u(t) \in B_\rho(0) \subset X^\alpha$  gilt

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\alpha &= \left\| e^{-At} u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(u(s)) ds \right\|_\alpha \\ &\leq C e^{-\beta t} \|u_0\|_\alpha + \int_0^t C(t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} \sigma \|u(s)\|_\alpha ds \\ &\leq \frac{M}{2} e^{-\beta t} \frac{\rho}{M} + \sigma \int_0^t C(t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} \rho ds < \rho. \end{aligned}$$

Die Lösung  $\mathbb{R} \ni t \mapsto u(t) \in X^\alpha$  ist stetig nach Satz 5.5, insbesondere ist  $t \mapsto \|u(t)\|_{X^\alpha}$  stetig. Daher kann nach obiger Rechnung  $\|u(t)\|_{X^\alpha}$  den Wert  $\rho$  nie erreichen. Die Lösung kann wegen der Beschränktheit in  $X^\alpha$  auch nicht aufhören, zu existieren (Satz 5.9).

Für den exponentiellen Abfall rechnen wir nun

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_\alpha e^{\delta t} &\leq C e^{-\beta t} \|u_0\|_\alpha e^{\delta t} \\ &\quad + \int_0^t C(t-s)^{-\alpha} e^{-\beta(t-s)} e^{\delta t} \sigma e^{-\delta s} e^{\delta s} \|u(s)\|_\alpha ds \\ &\leq C \|u_0\|_\alpha \\ &\quad + \sigma \int_0^t C(t-s)^{-\alpha} e^{-(\beta-\delta)(t-s)} \sup_{s' \in [0, t]} \|e^{\delta s'} u(s')\|_\alpha ds \\ &\leq \frac{M}{2} \|u_0\|_\alpha + \frac{1}{2} \sup_{s' \in [0, t]} \|e^{\delta s'} u(s')\|_\alpha. \end{aligned}$$

Indem wir das Supremum über alle  $t \in [0, T]$  nehmen, finden wir

$$\sup_{s' \in [0, t]} \|e^{\delta s'} u(s')\|_\alpha \leq M \|u_0\|_\alpha,$$

also die Behauptung.  $\square$

Obige Proposition wird als *linearisierte Stabilität* zitiert; die linearisierte Gleichung hat einen exponentiellen Abfall auf dem ganzen Raum, und dies überträgt sich auf die nichtlineare Gleichung.

Aus dem Beweis sehen wir sofort, dass wir die Bedingung  $f \in C^1$  nicht verwendet haben, sondern nur die schwächere Bedingung

$$\|f(z)\|_X = o(\|z\|_\alpha)$$

für  $\|z\|_\alpha \rightarrow 0$ .

Eine weitere mögliche Verallgemeinerung betrifft zeitabhängige  $f$  mit  $f(t, u_0) = 0$ . Unter der Annahme  $\|f(t, z)\|_X = o(\|z\|_\alpha)$ , gleichmäßig in  $t$ , mit  $f$  Hölderstetig in  $t$  und lokal Lipschitz in  $u$ , gilt obiger Satz (mit identischem Beweis).

**Proposition 7.3** (Instabilität). *Die Situation sei wie in (7.4), zusätzlich sei*

$$\sigma(A) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\} \neq \emptyset$$

eine Spektralmenge, also mit positivem Abstand zum Rest des Spektrums. Dann ist der Punkt 0 instabil, das heißt: Es gibt  $\varepsilon_0 > 0$  und  $u_n \rightarrow 0$  in  $X^\alpha$  mit

$$\sup_{t \in (0, \infty)} \|u(t)\|_\alpha \geq \varepsilon_0.$$

Wir werden dieses Resultat nicht isoliert beweisen; für etwas stärkere Annahmen an  $f$  ist die Instabilität eine Folgerung aus dem nachfolgenden Resultat über stabile und instabile Mannigfaltigkeiten.

**Satz 7.4.** *Die Situation sei wie in (7.4), zusätzlich sei*

$$\sigma(A) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda = 0\} \neq \emptyset.$$

Insbesondere haben dann  $\sigma_u := \sigma(A) \cap \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$  und  $\sigma_s = \sigma(A) \setminus \sigma_u$  eine zugehörige Zerlegung  $X = X_u \oplus X_s$  mit Projektionen  $P_u$  und  $P_s$  (siehe Abschnitt 4.2).

Dann gibt es  $\rho, M > 0$ , so dass

1. Die stabile Mannigfaltigkeit

$$M_s := \left\{ u_0 : \|P_s u_0\|_\alpha \leq \frac{\rho}{M}, \|u(t; u_0)\|_\alpha \leq \rho \forall t > 0 \right\}$$

ist der Graph einer differenzierbaren Abbildung

$$\Phi_s : X_s \cap X^\alpha \supset B_{\rho/M} \rightarrow X_u \cap X^\alpha.$$

$M_s$  ist tangential an  $X_s$  im Ursprung und für  $u_0 \in M_s$  gilt  $\|u(t; u_0)\|_\alpha \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ .

2. Die instabile Mannigfaltigkeit

$$M_u := \left\{ u_0 : \|P_u u_0\|_\alpha \leq \frac{\rho}{M}, \exists \text{ Lösung } u : (-\infty, 0) \rightarrow X^\alpha, \right. \\ \left. u(0) = u_0, \|u(t; u_0)\|_\alpha \leq \rho \quad \forall t < 0 \right\}$$

ist der Graph einer differenzierbaren Abbildung

$$\Phi_u : X_u \cap X^\alpha \supset B_{\rho/M} \rightarrow X_s \cap X^\alpha.$$

$M_u$  ist tangential an  $X_u$  im Ursprung und für  $u_0 \in M_u$  gilt  $\|u(t; u_0)\|_\alpha \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow -\infty$ .

*Beweis.* Wir verwenden die Operatoren  $A_i : D(A) \cap X_i \rightarrow X_i$ ,  $i = u, s$ . Der Operator  $A_u$  ist beschränkt mit 'negativem Spektrum', der Operator  $A_s$  ist sektoriell mit 'positivem Spektrum'.

Wir wählen  $\alpha > 0$  so, dass für  $\bar{A} = A + \alpha$  gilt:  $\operatorname{Re} \sigma(\bar{A}) > 0$ . Der Operator  $\bar{A}$  wird in der Definition von  $X^\alpha$  verwendet und die Halbgruppen erfüllen

$$\begin{aligned} \|\bar{A}^\alpha e^{-A_u t}\| &\leq C e^{\beta t}, & \|e^{-A_u t}\| &\leq C e^{\beta t} & \forall t \leq 0, \\ \|\bar{A}^\alpha e^{-A_s t} P_s \bar{A}^{-\alpha}\| &\leq C e^{\beta t}, & \|\bar{A}^\alpha e^{-A_s t}\| &\leq C t^{-\alpha} e^{\beta t} & \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

1. *Darstellungsformel.* Sei  $u_0 \in M_s$  und  $u(t) = u_u(t) + u_s(t) \in X_u \oplus X_s$  die zugehörige Lösung. Wir suchen eine Darstellung der Lösung mit Integralen.

Die Variation-der-Konstanten-Formel liefert

$$u_u(t) = e^{-A_u(t-t_0)} P_u u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A_u(t-s)} P_u f(u(s)) ds,$$

so dass

$$0 \leftarrow e^{A_u(t-t_0)} u_u(t) = P_u u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A_u(s-t_0)} P_u f(u(s)) ds$$

für  $t \rightarrow \infty$ , also

$$P_u u(t_0) = - \int_{t_0}^{\infty} e^{A_u(s-t_0)} P_u f(u(s)) ds.$$

Damit haben wir  $u_u(t)$  als Integral dargestellt (als Rückwärts-Lösung auf dem Intervall  $(0, \infty)$  mit Startwerten  $u_u(\infty) = 0$ ). Der stabile Anteil kann als Vorwärtsintegral dargestellt werden und wir setzen für  $t > 0$  zusammen zu

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-A_s t} U_s + \int_0^t e^{-A_s(t-s)} P_s f(u(s)) ds \\ &\quad - \int_t^\infty e^{A_u(s-t)} P_u f(u(s)) ds, \end{aligned} \tag{7.5}$$

mit  $U_s = P_s u_0$ .

2. *Lösungen von (7.5).* Wir wollen für beliebiges (kleines)  $U_s \in X_s \cap X^\alpha$  die Integralgleichung für  $u : (0, \infty) \rightarrow X^\alpha$  lösen. Falls dies gelingt, haben wir eine

Abbildung  $U_s \mapsto u(0)$ . An der Integraldarstellung sehen wir, dass  $P_s u(0) = U_s$ . Die Konstruktion wird so sein, dass  $u(0) \in M_s$ . Wir können dann setzen

$$\Phi_s(U_s) = P_u u(0),$$

und wissen, dass  $M_s$  Graph von  $\Phi_s$  ist.

Wir betrachten also für festes  $U_s$  die rechte Seite von (7.5) als  $L(u)$ ,

$$L : C^0([0, \infty), X^\alpha) \supset B_\rho(0) \rightarrow C^0([0, \infty), X^\alpha).$$

Wir wählen  $\rho > 0$  so klein, dass

$$\begin{aligned} \|\partial_u f(u)\|_{\mathcal{L}(X^\alpha, X)} &\leq \sigma, \quad \forall u, \quad \|u\|_\alpha \leq \rho, \\ \sigma \cdot C \left\{ \|P_s\| \int_0^\infty y^{-\alpha} e^{-\beta y} dy + \|P_u\| \int_0^\infty e^{-\beta y} dy \right\} &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wir behaupten, dass für  $\|U_s\|_\alpha \leq \rho/(2C)$  die Abbildung  $L$  eine kontraktive Selbstabbildung ist. Wir berechnen die Norm zu

$$\begin{aligned} \|L(u)\|_{C^0([0, \infty), X^\alpha)} &= \sup_t \left\| e^{-A_s t} U_s + \int_0^t e^{-A_s(t-s)} P_s f(u(s)) ds \right\|_\alpha \\ &\quad + \sup_t \left\| \int_t^\infty e^{A_u(s-t)} P_u f(u(s)) ds \right\|_\alpha \\ &\leq C \|U_s\|_\alpha + \int_0^\infty C e^{-\beta s} s^{-\alpha} \|P_s\| \sigma \rho ds \\ &\quad + \sup_t \int_t^\infty C e^{-\beta(s-t)} \|P_u\| \sigma \rho ds < \rho. \end{aligned}$$

Die Differenz  $L(u^1) - L(u^2)$  kann mit derselben Rechnung abgeschätzt werden; statt  $\rho$  oben taucht dann jeweils  $\sup_s \|u^1(s) - u^2(s)\|_\alpha$  auf.

3. *Eigenschaften.* Wie in Satz 6.3 ist die Abbildung  $L$  sogar stetig differenzierbar. Der Fixpunkt hängt dann auch differenzierbar von  $U_s$  ab und es gilt

$$\frac{\partial \Phi_s(U_s)}{\partial U_s}(V_s) = - \int_t^\infty e^{A_u(s-t)} P_u \partial_u f(u(s)) \cdot v ds,$$

wobei  $v(t) = \frac{\partial u(t)}{\partial U_s}(V_s)$  die ebenso durchdifferenzierte Integralgleichung löst. Wegen  $\partial_u f(0) = 0$  verschwindet obiger Ausdruck in  $U_s = 0$  (mit zugehöriger Lösung  $u(\cdot) \equiv 0$ ). Dies zeigt die Tangentialität.

Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ . Wie oben kann für eine eventuell kleinere Kugel und für kleines  $\delta > 0$  gezeigt werden, dass  $L$  auch eine Selbstabbildung ist auf

$$\left\{ u \in C^0([0, \infty), X^\alpha) : \sup_t \|e^{\delta t} u(t)\|_\alpha \leq \rho \right\}.$$

Daraus folgt der exponentielle Abfall aller Lösungen in  $M_s$ .

4. *Die instabile Mannigfaltigkeit.* Der Beweis ist analog zur stabilen Mannigfaltigkeit. Analog zu (7.5) benutzt man für  $t < 0$  die Darstellung

$$u(t) = e^{A_t t} U_u - \int_t^0 e^{A_u(t-s)} P_u f(u(s)) ds + \int_{-\infty}^t e^{A_s(t-s)} P_s f(u(s)) ds, \quad (7.6)$$

mit  $U_u = P_u u_0$ . Man folgt dann Schritt 2 und 3 wie für die stabile Mannigfaltigkeit.  $\square$

### 7.3 Quasilineare Gleichungen

Bisher haben wir lediglich semilineare Gleichungen betrachtet. Was tun, wenn wir die Gleichung

$$\partial_t u + Au = f(\cdot, u), \quad u(0) = u_0,$$

für  $f : X^1 \rightarrow X$  lösen wollen. Dabei sei  $f$  Lipschitzstetig. Wir nehmen hier an, dass  $A$  die Linearisierung der Gleichung in  $u_0$  ist. Dann können wir die Kleinheit von  $f$  annehmen. Es ist naheliegend, wieder mit einer Iteration zu lösen,

$$u \mapsto g(\cdot) = f(\cdot, u(\cdot)) \mapsto u^{\text{neu}}.$$

Da wir im ersten Schritt (in jedem Zeitpunkt) von  $X^1$  nach  $X$  abbilden, müssen wir im zweiten Schritt die *maximale Regularität* gewinnen. Dies ist das Ziel im nachfolgenden Theorem, das wir von Da Prato [3] übernehmen.

Wieder sei  $A : D(A) \subset X \rightarrow X$  ein dicht definierter, sektorieller Operator. Für die Halbgruppe haben wir die Abschätzungen

$$\|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_1, \quad \|tAe^{-At}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C_2.$$

Für  $f \in C^\alpha([0, T], X)$  existiert eine Lösung  $u$  von

$$\partial_t u + Au = f(\cdot), \quad u(0) = u_0,$$

nach Satz 5.2, und  $u$  erfüllt

$$u(t) = e^{-At} u_0 + \int_0^t e^{-A(t-s)} f(s) ds.$$

Wir benötigen Abschätzungen für die Ableitung; dazu benutzen wir die Darstellung aus Satz 5.2,

$$\partial_t u(t) = -e^{-At} [Au_0 - f(t)] - \int_0^t Ae^{-A(t-s)} (f(t) - f(s)) ds.$$

In dieser Darstellung ist für  $f \in C^\alpha$  das Integral wohldefiniert, weil der Integrand durch  $C(t-s)^{\alpha-1}$  abgeschätzt werden kann.

Unser Ziel ist es nun eine  $C^\alpha$ -Abschätzung für die Ableitung.

**Lemma 7.5.** Für  $f \in C^\alpha([0, T], X)$  erfüllt der Ausdruck

$$v(t) = e^{-At}[Au_0 - f(t)] + \int_0^t Ae^{-A(t-s)}(f(t) - f(s)) ds$$

eine Abschätzung

$$\|v\|_{C^\alpha([0, T], X)} \leq C \{ \|f\|_{C^\alpha([0, T], X)} + \|e^{-A} [Au_0 - f(0)]\|_{C^\alpha([0, T], X)} \}. \quad (7.7)$$

*Beweis.* Wir zerlegen das Integral in drei Anteile,

$$v(t) = h_1(t) + h_2(t) + h_3(t)$$

mit

$$\begin{aligned} h_1(t) &= e^{-At}[Au_0 - f(0)], \\ h_2(t) &= e^{-At}[f(0) - f(t)], \\ h_3(t) &= \int_0^t Ae^{-A(t-s)}(f(t) - f(s)) ds. \end{aligned}$$

Der Ausdruck  $h_1$  ist auf der rechten Seite von (7.7) explizit enthalten. Für  $h_2$  stellen wir fest, dass  $h_2(\cdot) \in C^0$  beschränkt ist, und wir rechnen mit  $g(t) = f(0) - f(t)$  und  $0 \leq r \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} h_2(t) - h_2(r) &= e^{-At}(g(t) - g(r)) + e^{-At}g(r) - e^{-Ar}g(r) \\ &= e^{-At}(g(t) - g(r)) + \int_r^t Ae^{-A\sigma}g(r) d\sigma, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \|h_2(t) - h_2(r)\|_X &\leq C_1|t - r|^\alpha \|g\|_{C^\alpha} + C_2 \int_r^t \sigma^{-1} \|g(r) - g(0)\| d\sigma \\ &\leq C_1|t - r|^\alpha \|g\|_{C^\alpha} + C_2 \|g\|_{C^\alpha} \int_r^t \sigma^{\alpha-1} d\sigma \\ &\leq C \|f\|_{C^\alpha} |t - r|^\alpha, \end{aligned}$$

die gewünschte Abschätzung für die Hölder-Norm.

Schließlich schreiben  $h_3(t) - h_3(r) = J_1 + J_2 + J_3$  mit

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_r^t Ae^{-A(t-s)}(f(t) - f(s)) ds, \\ J_2 &= \int_0^r \int_{r-s}^{t-s} A^2 e^{-A\sigma}(f(r) - f(s)) d\sigma ds, \\ J_3 &= (e^{-At} - e^{-A(t-r)})(f(t) - f(r)). \end{aligned}$$

Wie oben kann  $\|J_1\|$  durch  $\|f\|_{C^\alpha} |t - r|^\alpha$  abgeschätzt werden. In trivialer Weise auch  $J_3$  wegen der Beschränktheit der Halbgruppe. Für  $J_2$  schreiben wir

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_X &\leq \int_0^r \int_{r-s}^{t-s} \|Ae^{-A\sigma/2}\| \|Ae^{-A\sigma/2}\| \|f(r) - f(s)\|_X d\sigma ds \\
&\leq 4C_2^2 \|f\|_{C^\alpha} \int_0^r \int_{r-s}^{t-s} \sigma^{-2} |r - s|^\alpha d\sigma ds \\
&= 4C_2^2 \|f\|_{C^\alpha} \int_0^r \left( \frac{1}{r-s} - \frac{1}{t-s} \right) |r - s|^\alpha ds \\
&\leq 4C_2^2 \|f\|_{C^\alpha} \int_0^r |r - t| |r - s|^{\alpha-1} |t - s|^{-1} ds \\
&= 4C_2^2 \|f\|_{C^\alpha} \int_0^r |r - t| z^{\alpha-1} |t - r + z|^{-1} dz \\
&= 4C_2^2 \|f\|_{C^\alpha} \int_0^{r/(t-r)} |r - t|^{1+1+(\alpha-1)-1} y^{\alpha-1} |1 + y|^{-1} dy \\
&\leq C \|f\|_{C^\alpha} |r - t|^\alpha,
\end{aligned}$$

wobei wir  $z = r - s$  und  $y = z/(t - r)$  substituiert haben. Damit ist das Lemma bewiesen.  $\square$

Das Lemma liefert die maximale  $C^\alpha$  Regularität für die Zeitableitung, falls die anfängliche Zeitableitung  $-Au_0 + f(0)$  dies zulässt.

Die 'räumliche Regularität'  $Au(\cdot) \in C^\alpha([0, T], X)$  folgt dann aus der Darstellung  $Au = -\partial_t u + f$ . Wir fassen diese Ergebnisse zusammen:

**Satz 7.6.** *Sei  $A$  sektoriell auf  $X$ ,  $u_0 \in X$ , und  $f \in C^\alpha([0, T], X)$  mit*

$$e^{-A} [Au_0 - f(0)] \in C^\alpha([0, T], X).$$

*Dann erfüllt die Lösung  $u$  der Gleichung*

$$\partial_t u + Au = f, \quad u(0) = u_0,$$

*die maximale Regularitätsabschätzung*

$$\begin{aligned}
&\|\partial_t u(\cdot)\|_{C^\alpha([0, T], X)} + \|Au(\cdot)\|_{C^\alpha([0, T], X)} \\
&\leq C \left\{ \|e^{-A} [Au_0 - f(0)]\|_{C^\alpha([0, T], X)} + \|f\|_{C^\alpha([0, T], X)} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.8}$$

**Bemerkung 7.7.** *Die Forderung an die Startwerte kann in der Sprache von Banachräumen ausgedrückt werden; man fordert  $Au_0 - f(0) \in D_A(\alpha, \infty)$ .*

*Es kann gezeigt werden, dass zu jedem späteren Zeitpunkt  $t$  die wieder gilt  $Au(t) - f(t) \in D_A(\alpha, \infty)$  (mit Normabschätzung). Insbesondere kann die Lösung fortgesetzt werden.*

**Beispiel 7.8.** *Wir betrachten auf einem glatten, beschränkten Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*

$$\partial_t u(t, x) + \sum_{ij} a_{ij}(u(t, x)) \partial_i \partial_j u(t, x) = 0$$

mit Dirichlet Randbedingungen und  $u(0) = u_0$ . Die Koeffizienten  $a_{ij}$  seien glatt und strikt elliptisch. Für glatte Daten  $u_0$  mit kleiner Norm gibt es dann eine eindeutige lokale Lösung der Gleichung.

Beweisskizze: Wir schreiben die Gleichung als

$$\partial_t u + Au = f(u)$$

mit

$$A = - \sum_{ij} a_{ij}(0) \partial_i \partial_j,$$

$$f(u) = \sum_{ij} (a_{ij}(u) - a_{ij}(0)) \partial_i \partial_j u.$$

Wir betrachten  $A$  als Operator  $X^1 = C^{2,\beta}(\Omega) \rightarrow C^\beta(\Omega) = X$ . Wir studieren die Iteration

$$L : C^\alpha([0, T], X^1) \ni u(\cdot) \mapsto f(u(\cdot)) \mapsto u^{\text{neu}} \in C^\alpha([0, T], X^1), \quad (7.9)$$

wobei  $u^{\text{neu}}$  die Lösung der inhomogenen Gleichung mit rechter Seite  $f(t)$  ist.

Die maximale Regularität des Lösungsoperators liefert, dass  $L$  wohldefiniert ist. Für  $T$  klein ist die durch  $f$  induzierte Abbildung  $F$ ,

$$F : C^\alpha([0, T], X^1) \supset B_R(0) \rightarrow C^\alpha([0, T], X)$$

beschränkt durch eine kleine Konstante, denn  $u$  ist punktweise nah an  $u_0$  und zweite Ableitungen sind beschränkt. Also ist  $L$  eine Selbstabbildung in die Kugel. Weiterhin ist  $L$  kontraktiv, denn  $F$  ist sogar kontraktiv (mit einer kleinen Konstanten für  $T$  und  $R$  klein). Der Fixpunkt von  $L$  ist eine Lösung.

**Bemerkung 7.9.** Die Theorie liefert den 'richtigen' Raum für Startwerte,  $Au_0 - f(0) \in D_A(\alpha, \infty)$ . Der Nachteil der Theorie ist, dass der Raum  $D_A(\alpha, \infty)$  meist nicht explizit charakterisiert werden kann.

Im Fall der Wärmeleitungsgleichung mit Dirichlet Randbedingung konnte der Raum durch Lunardi charakterisiert werden. Für  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  ist es

$$D_\Delta(\alpha, \infty) = \{u \in C^{2\alpha}(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

# Literaturverzeichnis

- [1] H.-W. Alt. Lineare Funktionalanalysis. *Springer Hochschultext*, 1985.
- [2] V. Barbu. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces. *Noordhoff*, 1976.
- [3] G. Da Prato. Abstract Differential Equations, Maximal regularity, and Linearization. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Volume 45 (1986), Part 1, AMS.
- [4] K.-J. Engel, R. Nagel. One-parameter semigroups for linear evolution equations. *Springer*, 1999.
- [5] L.C. Evans. Partial Differential Equations. *Amer. Math. Soc.*, 1998.
- [6] G. Galdi. An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Vol. 1: Linearized steady problems. *Springer*, 1994.
- [7] D. Henry. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations. *Springer Lecture Notes in Mathematics 840*, 1989.
- [8] A. Pazy. Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. *Springer, Applied Mathematical Sciences*, 44, 1983.
- [9] B. Schweizer. Partielle Differentialgleichungen. *Springer Masterclass*, 2. Auflage, 2018.

# Index

$\Gamma$ -Funktion, 56  
analytische Halbgruppe, 47  
Eigenschaften des Erzeugers, 23  
Erzeuger, 6, 22  
Erzeuger analytische Halbgruppe, 50  
Exponentielles Wachstum, 21  
gebrochene Potenzen, 55  
gleichförmig stetig, 8  
Halbgruppe, 6  
Hille-Yosida Theorem, 30, 41  
Invariante Unterräume, 51  
Lumer-Phillips Theorem, 34  
Normale Operatoren, 53  
Plattengleichung, 40  
Projektionen, 51  
Resolvente, 17  
Resolventenidentität, 18  
sektorieller Operator, 46  
Spektralradius, 54  
Spektrum, 17  
stark stetig, 8  
Stetigkeitseigenschaften, 20  
Wellengleichung, 38  
Zerlegung, 51