Maßtheorie für Partielle Differentialgleichungen

Ben Schweizer

TU Dortmund

Material für das Sommersemester 2016

Version vom 9.8.2016

Inhaltsverzeichnis

Literatur

Für das Studium des Stoffes empfehlen wir die Lehrbücher, die auch als Vorlage in der Vorbereitung dieser Vorlesung dienten.

Rudin Real and Complex Analysis Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

Evans, Gariepy Measure Theory and Fine Properties of Functions. Advanced Studies in Mathematics, CRC Press, 1992.

Ambrosio, Fusco, Pallara Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems. Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 2000.

Schilling Measures, Integrals and Martingales. Cambridge University Press, 2005.

Dabei sind die wesentlichen Vorlagen die zwei Erstgenannten. Rudin entwickelt die Maßtheorie und war meine Hauptvorlage für Teil I. Evans und Gariepy benutzen die Maßtheorie als ein Werkzeug für das Studium von Funktionen und war Vorlage für Teil II. Das dritte Buch ist eine wichtige Referenz für andere und oft kürzere Beweise. Das vierte Lehrbuch kann für einen unproblematischen Einstieg in die Sprache der Maßtheorie verwendet werden.

Wichtigste Ergebnisse

Wir beweisen in dieser Vorlesung einige wichtige Sätze, die immer wieder in Anwendungen und in der Entwicklung weiterer Theorie gebraucht werden.

- Der Begriff des Maßes, des Borel- und des Radon-Maßes in Kapitel 1 und 3
- Das (Lebesgue-)Integral in Kapitel 2
- Der Satz von Radon-Nikodym in Abschnitt 4.1
- Die Charakterisierung $(L^p)' = L^q$, Satz 4.12 in Abschnitt 4.2
- Der Darstellungssatz von Riesz, also $\mathcal{M} = (C_0)'$, Satz 4.13, Abschnitt 4.2

Die wichtigsten Anwendungen sind neue Begriffe, die für die Analyse von Funktionen zentral sind. Dazu zählen

- Schwache Konvergenz in Kapitel 5
- Young-Maße in 6.2
- Lebesgue-Punkte in Satz 7.8 in 7.1

- Rademachers Theorem, Satz 7.14 in 7.2
- Das Hausdorff-Maß in Kapitel 8
- BV-Funktionen in Kapitel 9

Voraussetzungen

Wir setzen Analysis I-III voraus, insbeondere eine gewisse Vertrautheit mit L^p-Räumen und dem Lebesgue-Integral. Alle oben erwähnten Sätze werden in dieser Vorlesung vollständig bewiesen. Die einzigen hier nicht bewiesenen Grundlagen sind aus der Funktionalanalysis

- Der Satz von Hahn-Banach, zitiert in Satz 5.1
- Der Hilbertraum-Darstellungssatz von Riesz, zitiert in Satz 4.4
- Sobolev-Einbettungen und Morrey-Abschätzung

Weiterhin beweisen wir hier nicht (obwohl wir diese Ergebnisse im Kapitel über Hausdorff-Maße verwenden)

- Fubini
- Vitali-Überdeckungssatz

Dieser Text ist ursprünglich entstanden als das Skript zu einer Vorlesung an der TU Dortmund im Sommersemester 2008. Ich danke allen Studenten der Vorlesung für die Mitarbeit und Kommentare zum Skript. Mein besonderer Dank gilt Herrn Manuel Jaracewski. Er hat dankenswerterweise eine Mitschrift der Vorlesung in Latex gesetzt und als Vorlage für dieses Skript zur Verfügung gestellt. Viele Fehler in der ersten Version wurden von Herrn Sven Badke gefunden.

Teil I.

Allgemeine Maßtheorie

1. Maßräume

1.1. Definitionen und Beispiele

Notation: Sei X eine Menge. Wir definieren das Komplement einer Menge $M \subset X$ als $M^{\complement} := X \setminus M = \{x \in X | x \notin M\}$ und die Potenzmenge von X als $\mathcal{P}(X) := \{M \mid M \subset X\}$.

Definition 1.1 (σ-Algebra)**.** *Sei X eine Menge. Ein System $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ von Teilmengen von X heißt σ-Algebra über X, falls*

(S1) $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $X \in \mathcal{A}$

(S2) $M \in \mathcal{A} \Rightarrow M^{\complement} \in \mathcal{A}$

(S3) $M_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \in \mathcal{A}$.

Definition 1.2 (Maße und Maßräume)**.** *Ein Maßraum ist ein Tripel $(X, \mathcal{A}, \mu)$, wobei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über X ist und μ ein Maß. Dabei ist ein Maß eine Abbildung $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mit der Additivitäts-Eigenschaft*

(M1) Falls $M_k \in \mathcal{A}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $M_k \cap M_\ell = \emptyset$ für alle $k \neq \ell$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(M_k).$$

In einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißen die Mengen $M \in \mathcal{A}$ die meßbaren Mengen. Wir nehmen dabei immer an, dass ein $M \in \mathcal{A}$ existiert mit $\mu(M) < \infty$.

Definition 1.3 (Borel-σ-Algebra)**.** *Sei X eine Menge mit einer Topologie. Die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ ist definiert als die kleinste σ-Algebra, die die offenen Teilmengen von X enthält. Ein Maß μ zu einem Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ist ein Borel-Maß, falls $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(X)$.*

Für ein Borel-Maß sind alle Borel-Mengen messbar, insbesondere sind alle offenen Mengen messbare Mengen.

Beispiele

Beispiele für σ-Algebren

Sei X eine beliebige Menge.

- $\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$ ist eine σ-Algebra.
- $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra.

- Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar. Dann ist $\mathcal{L}(X) = \{M \subset X \mid M \textit{ Lebesgue messbar}\}$ eine σ-Algebra.

- Sei $x_0, x_1 \in X$ und

$$\mathcal{A} = \{M \subset X \mid \text{entweder } x_0, x_1 \in M \text{ oder } x_0, x_1 \in M^\complement\}.$$

Das letzte Beispiel hat eine wichtige Interpretation in stochastischen Anwendungen: Eine σ-Algebra kodiert Information; die σ-Algebra des Beispiels kann zwischen x_0 und x_1 nicht unterscheiden.

Bemerkung 1.4. *Sei X eine Menge, $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{N} \subset \mathcal{A}$, so dass für alle σ-Algebren $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$ gilt: $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$. Kurz: "$\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{N}$ enthält".*

Bemerkung 1.4 beweist, dass in jedem topologischen Raum X eine eindeutige Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(X)$ wie in Definition 1.3 existiert.

Beweis. Bilde $\mathcal{A} := \bigcap_{\mathcal{D}} \mathcal{D}$, den Schnitt über alle σ-Algebren $\mathcal{D}$ mit $\mathcal{N} \subset \mathcal{D}$. Die Menge $\mathcal{A}$ existiert, weil $\mathcal{D} = \mathcal{P}(X)$ eine erlaubte σ-Algebra ist. Es ist zu zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

1. $\emptyset, X \in \mathcal{D}$ für alle $\mathcal{D} \Rightarrow \emptyset, X \in \mathcal{A}$.

2. $M \in \mathcal{A} \Rightarrow M \in \mathcal{D}\ \forall \mathcal{D} \Rightarrow M^\complement \in \mathcal{D}\ \forall \mathcal{D} \Rightarrow M^\complement \in \mathcal{A}$.

3. $M_k \in \mathcal{A}\ \forall k \in \mathbb{N}$. Sei $\mathcal{D}$ beliebig. $M_k \in \mathcal{D}\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ beliebig war, ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \in \mathcal{A}$.

Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{D}} \mathcal{D}$ tatsächlich eine σ-Algebra ist. □

Beispiele für Maßräume

- **Lebesgue-Maß.** Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue-messbar und $\mu := \mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß. Dann ist $(X, \mathcal{L}(X), \mu)$ ein Maßraum.

- **Gewichtetes Lebesgue-Maß.** Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ wie oben, dazu $f : X \to [0, \infty)$ eine Funktion der Klasse $L^1(X)$. Dann ist $(X, \mathcal{L}(X), \mu)$ mit $\mu(M) := \int_M f$ ein Maßraum.

- **Dirac-Maß.** Sei X eine Menge, $x_0 \in X$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Dann definiert man das Dirac-Maß in x_0 durch $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$,

$$\mu(M) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_0 \in M \\ 0 & \text{falls } x_0 \notin M. \end{cases}$$

  Notation: Wir schreiben δ_{x_0} für das Dirac-Maß in x_0.

Ein stochastisches Beispiel

In diesem Abschnitt schreiben wir $\mathcal{P}(...)$ als Abkürzung für *Wahrscheinlichkeit für …*

Maße sind der zentrale Begriff der Wahrscheinlichkeitstheorie. Unser nächstes Beispiel soll zeigen, warum. Wir nehmen dabei an, dass wir einen idealen Zufallszahlengenerator haben, der alle reellen Zahlen zwischen 0 und 1 mit derselben Wahrscheinlichkeit erzeugt.

Eine Zufallszahl X wird wie folgt ermittelt. Zunächst werfen wir eine Münze. Falls diese *Kopf* zeigt, so setzen wir $X := 0.2$. Falls die Münze dagegen *Zahl* zeigt, so wählen wir mit unserem Zufallszahlengenerator die Zahl $X \in [0,1]$ zufällig.

Frage: Wie beschreiben wir die *Verteilung* von X?

Klar ist: Die Wahrscheinlichkeit, dass $X = 0.2$, ist genau $\frac{1}{2}$,

$$\mathcal{P}(X = 0.2) = \frac{1}{2}.$$

Aber leider ist für jede andere Zahl $x_0 \in [0,1]$, $x_0 \neq 0.2$, die Wahrscheinlichkeit, dass wir genau diese Zahl finden, Null,

$$\mathcal{P}(X = x_0) = 0.$$

Diese Aussagen sagen also nicht viel darüber, wie wahrscheinlich welches Ergebnis für X ist.

Die Lösung ist, mit Mengen zu arbeiten. Für ein beliebiges Intervall $A = [a,b] \subset [0,1]$ setzen wir

$$\mu(A) := \begin{cases} \frac{1}{2}(b-a) & \text{falls } 0.2 \notin A, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(b-a) & \text{falls } 0.2 \in A \end{cases}$$

Diese auf Intervallen definierte Funktion beschreibt die Verteilung der Werte von X.

Leider hat die obige Beschreibung einige technische Nachteile. Zum Beispiel würden wir gerne für zwei disjunkte Intervalle $A_1, A_2 \subset [0,1]$ rechnen

$$\mathcal{P}(X \in A_1 \cup A_2) = \mathcal{P}(X \in A_1) + \mathcal{P}(X \in A_2),$$

also, mit unserem „Maß“:

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Dies ist aber leider nicht möglich, denn $A_1 \cup A_2$ ist kein Intervall mehr, und μ ist auf dieser Vereinigung zweier Intervalle nicht definiert. Um solche Rechnungen durchführen zu können, wollen wir μ auf einer σ-Algebra von Mengen definieren.

Die richtige Beschreibung ist der folgende Maßraum, der das eindimensionale Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^1$ und das Dirac-Maß $\delta_{0.2}$ verwendet.

$$\begin{aligned} X &:= [0,1] \\ \mathcal{A} &:= \mathcal{B}(X) \\ \mu(A) &:= \begin{cases} \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A) & \text{falls } 0.2 \notin A, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A) & \text{falls } 0.2 \in A \end{cases} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{0.2}(A) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A). \end{aligned}$$

Hier hätten wir ebensogut die σ-Algebra der $\mathcal{L}^1$-Lebesgue-meßbaren Mengen wählen können. Mit der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f \equiv \frac{1}{2}$ können wir auch schreiben

$$\mu(A) := \begin{cases} \int_A f & \text{falls } 0.2 \notin A, \\ \frac{1}{2} + \int_A f & \text{falls } 0.2 \in A. \end{cases}$$

Damit kann f als eine Dichte der Verteilung von X interpretiert werden.

Kommentar: In diesem Beispiel hätte man auch die Verteilungsfunktion $F(x) := \mathcal{P}(X \leq x)$ verwenden können, also $F(x) = \mu([0,x])$. Diese Möglichkeit wird allerdings in höherer Raumdimension komplizierter, man muss dann für $x \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $F(x) = \mathcal{P}(X_k \leq x_k \forall k \leq n)$ verwenden. Letzlich führt das wieder auf die Mengenbewertung zurück, bei der man das Maß für Rechtecke der Form $(-\infty, x_1) \times ... \times (-\infty, x_n)$ angibt.

Geometrische Beispiele für Maße (ein Ausblick)

- **Punkte** $x = (x_1, ..., x_n)$ **in** $X = \mathbb{R}^n$**.** Ein Punkt $x \in X$ ist durch die Angabe seiner Koordinaten spezifiziert. Eine Alternative ist die Beschreibung eines Punktes $x \in X$ durch sein Dirac-Maß δ_x.

  Ein Vorteil dieser Beschreibung in Anwendungen ist: N Punkte im Raum, gegeben durch $x^1, ..., x^N$, sind durch das (eine!) Maß $\mu^N := \sum_{k=1}^N \delta_{x^k}$ beschrieben. Die gewichteten Maße $\frac{1}{N}\mu^N$ beschreiben die Dichte der Punktwolke (es gilt $\frac{1}{N}\mu^N(X) = 1$). Oft kann ein Grenzübergang $N \to \infty$ für diese Maße durchgeführt werden, $\frac{1}{N}\mu^N \to \nu$ im geeigneten Sinne für ein Grenzmaß ν auf $\mathbb{R}^n$.

- Betrachte die Gerade $\Gamma := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$. Diese Gerade wollen wir nun ebenfalls als Maß beschreiben. Dazu sei $R = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$ ein beliebiges Rechteck im $\mathbb{R}^2$. Wir setzen als Maß

  $$\begin{aligned} \mu(R) &:= \textit{Länge von } \Gamma \cap R \\ &= \begin{cases} \sqrt{2} \cdot (\min\{b_1, b_2\} - \max\{a_1, a_2\}), & \text{falls } \min\{b_1, b_2\} \geq \max\{a_1, a_2\}, \\ 0 \quad \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

  Dies ist noch auf beliebige Testmengen zu verallgemeinern. Das Ergebnis ist: $\mu = \mathcal{H}^1 \lfloor \Gamma$, das 1-dimensionale Hausdorffmaß, eingeschränkt auf Γ.

1.2. Äußere Maße

Definition 1.5 (Äußeres Maß)**.** *Sei X eine Menge. Dann heißt μ ein äußeres Maß auf X, falls*

(A1) $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ *mit* $\mu(\emptyset) = 0$

(A2) Monotonie: Für $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$

(A3) σ-Subadditivität: $A_k \in \mathcal{P}(X)\ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$.

Die Ungleichheit in der letzten Formel hat eine doppelte Bedeutung. Zum einen wird auch für Maße die linke Seite typischerweise kleiner sein als die rechte Seite, denn wir haben nicht gefordert, dass die A_k disjunkt sind. Zum anderen aber gewähren wir an dieser Stelle den äußeren Maßen tatsächlich eine zusätzliche Freiheit (im Gegensatz zur Gleichheit in der Definition 1.2 von Maßen). Es gilt: Jedes Maß auf $\mathcal{P}(X)$ ist auch ein äußeres Maß.

Lebesgue äußeres Maß

Hier betrachten wir nur Grundmengen $X \subset \mathbb{R}^n$. Für eine Menge $A \subset X$ soll $\mu(A)$ als ein "Maß" für das Volumen von A konstruiert werden.

Wir beginnen die Konstruktion mit n-dimensionalen Rechtecken $R = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ und setzen $\mu(R) := \prod_{k=1}^n (b_k - a_k)$. Für beliebige Mengen A definieren wir dann

$$\mu(A) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_k) \middle| R_k \text{ ein Rechteck } \forall k \in \mathbb{N},\ A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k \right\}.$$

Wir behaupten, dass μ ist ein äußeres Maß auf X definiert. Es wird als das äußere Lebesgue-Maß bezeichnet.

Beweis der Behauptung:

Zu (A1) $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ und $\mu(\emptyset) = 0$ sind klar.

Zu (A2) Die Monotonie ist ebenfalls trivialerweise erfüllt, für $A \subset B$ ist eine B-Überdeckung immer gleichzeitig eine A-Überdeckung.

Zu (A3) Seien A_j Mengen und $\varepsilon > 0$. Wir finden zu jedem A_j eine Überdeckung $A_j \subset \bigcup_k R_{j,k}$ mit

$$\mu(A_j) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(R_{j,k}) - \varepsilon \cdot 2^{-j}.$$

Für $A := \bigcup_j A_j$ gilt $A \subset \bigcup_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} R_{j,k}$. Wir können also berechnen

$$\mu(A) \leq \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}^2} \mu(R_{j,k}) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(R_{j,k}) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} (\mu(A_j) + \varepsilon \cdot 2^{-j}) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\mu(A) \leq \sum_j \mu(A_j)$.

Konstruktion eines Maßes aus einem äußeren Maß

Gegeben sei ein äußeres Maß μ. Dann ist μ im Allgemeinen kein Maß, denn die Formel für das Maß disjunkter Vereinigungen ist im Allgemeinen nicht erfüllt. Wir können dieses Problem aber mit einem eleganten Schritt beseitigen, nämlich mit Hilfe einer Definition ("Mathematikertrick"): Wir definieren die Menge der messbaren Mengen so, dass die Maß-Formel für alle messbaren Mengen gilt.

Definition 1.6. *Sei μ ein äußeres Maß auf einer Menge X. Wir nennen eine beliebige Teilmenge $A \subset X$ messbar (bezüglich μ), falls für alle Testmengen $B \subset X$ gilt*

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A). \tag{1.1}$$

Satz 1.7. *Sei X eine Menge, μ ein äußeres Maß, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ die Familie messbarer Mengen bezüglich μ. Dann ist $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.*

Strenggenommen sollte es im Satz heißen: $(X, \mathcal{A}, \tilde{\mu})$ ist ein Maßraum für die Einschränkung $\tilde{\mu} := \mu\lfloor\mathcal{A} : \mathcal{A} \to [0, \infty]$.

Beweis. Wir müssen zeigen, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist und dass μ ein Maß auf $\mathcal{A}$ ist. Die einfachen Schritte sind: $\emptyset \in \mathcal{A}$, denn für $B \subset X$ beliebig gilt $\mu(B \cap \emptyset) + \mu(B \setminus \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(B) = 0 + \mu(B) = \mu(B)$.

Weiterhin gilt $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^{\complement} \in \mathcal{A}$, denn (1.1) aus der Definition kann symmetrisch geschrieben werden als

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A) = \mu(B \setminus A^{\complement}) + \mu(B \cap A^{\complement}).$$

Wir kommen zum eigentlichen Teil, der σ-Additivität und der Messbarkeit abzählbarer Vereinigungen.

Schritt 1. Formeln für endliche Vereinigungen. Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjunkt.

$$\mu(A_1 \cup A_2) \stackrel{A_1 \in \mathcal{A}}{=} \mu((A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu((A_1 \cup A_2) \setminus A_1) = \mu(A_1) + \mu(A_2).$$

Wir beobachten, dass wir hier nur die Messbarkeit von A_1 verwenden. Diese Tatsache wollen wir noch ausnutzen, um eine etwas allgemeinere Additivitätsformel herzuleiten (diese wird im letzten Schritt des Beweises benötigt). Sei dazu $M \in \mathcal{P}(X)$ beliebig und $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ disjunkt. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu((M \cap A_1) \cup (M \cap A_2)) &\stackrel{A_2 \in \mathcal{A}}{=} \mu((M \cap A_1) \cup (M \cap A_2) \cap A_2) \\ &\qquad + \mu([(M \cap A_1) \cup (M \cap A_2)] \setminus A_2) \\ &\stackrel{A_1 \cap A_2 = \emptyset}{=} \mu(M \cap A_2) + \mu(M \cap A_1). \end{aligned}$$

Induktiv zeigt man: Sind endlich viele $A_k \in \mathcal{A}$ disjunkt und $M \in \mathcal{P}(X)$, dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(A_k), \qquad \mu\left(M \cap \bigcup_{k=1}^{N} A_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \mu(M \cap A_k).$$

Schritt 2. Messbarkeit endlicher Vereinigungen. Sei $B \in \mathcal{P}(X)$ und $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$. Zu zeigen ist:

$$\mu(B) = \mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)).$$

Dabei folgt „$\leq$“ schon aus (A3) in der Definition des äußeren Maßes. Wir zeigen „$\geq$“. Es gilt

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \mu(B \cap A_1) + \mu(B \setminus A_1) && \text{Messbarkeit von } A_1 \\ &= \mu((B \cap A_1) \cap A_2) + \mu((B \cap A_1) \setminus A_2) && \text{Messbarkeit von } A_2 \\ &\quad + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2) + \mu(B \setminus (A_1 \cup A_2)). \end{aligned}$$

Damit bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\mu(B \cap (A_1 \cup A_2)) \leq \mu(B \cap A_1 \cap A_2) + \mu((B \cap A_1) \setminus A_2) + \mu((B \setminus A_1) \cap A_2).$$

Dies ist aber klar, denn es gilt die zugehörige Mengeninklusion

$$B \cap (A_1 \cup A_2) \subset (B \cap A_1 \cap A_2) \cup ((B \cap A_1) \setminus A_2) \cup ((B \cap A_2) \setminus A_1).$$

Wegen Monotonie und Subadditivität des äußeren Maßes folgt „$\geq$“ und damit die Messbarkeitsrelation.

Wir haben damit gezeigt, dass $A_1 \cup A_2$ messbar ist. Induktiv erhält man, dass für messbare Mengen A_k und $N \in \mathbb{N}$ auch $\bigcup_k^N A_k$ messbar ist.

Schritt 3. Formeln für unendliche Vereinigungen. Die Mengen A_k seien messbar für $k \in \mathbb{N}$ und disjunkt. Dann gilt für $A = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$

$$\mu(A) \overset{\text{Monotonie}}{\geq} \mu\left(\bigcup_{k=1}^N A_k\right) \overset{1.}{=} \sum_{k=1}^N \mu(A_k) \overset{N\to\infty}{\to} \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k) \overset{(A3)}{\geq} \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) = \mu(A).$$

Also ist $\mu(A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(A_k)$. Ebenso folgt für beliebige $M \subset X$ die Relation $\mu(M \cap A) = \sum_{k=1}^\infty \mu(M \cap A_k)$.

Schritt 4. Messbarkeit unendlicher Vereinigungen. Aus Schritten 1. und 2. folgt auch

$$\mu(M \setminus \bigcup_{k=1}^N A_k) = \mu(M) - \mu\left(M \cap \bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \mu(M) - \sum_{k=1}^N \mu(M \cap A_k)$$

für A_k messbar und disjunkt. Da sich für nicht notwendigerweise disjunkte Mengen $B_k \in \mathcal{A}$ die Vereinigung $A := \bigcup_{k=1}^\infty B_k$ als Vereinigung disjunkter messbarer Mengen $A_1 := B_1$, $A_{k+1} := B_{k+1} \setminus \bigcup_{j=1}^k B_j$ schreiben lässt, folgern wir, für $M \subset X$ beliebig,

$$\begin{aligned}\mu(M \setminus A) &\leq \mu\left(M \setminus \bigcup_{k=1}^N A_k\right) = \mu(M) - \sum_{k=1}^N \mu(M \cap A_k) \\ &\overset{N\to\infty}{\to} \mu(M) - \sum_{k=1}^\infty \mu(M \cap A_k) \overset{3.}{=} \mu(M) - \mu\left(M \cap \bigcup_{k=1}^\infty A_k\right).\end{aligned}$$

Insgesamt also $\mu(M) \geq \mu(M \setminus A) + \mu(M \cap A)$ für $M \subset X$ beliebig. Also gilt die Messbarkeit der unendlichen Vereinigung $A = \bigcup_{k=1}^\infty B_k = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$. □

Definition 1.8 (Lebesgue-Maß)**.** *Satz 1.7 liefert zum äußeren Lebesgue-Maß μ einen Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu) = (X, \mathcal{L}(X), \mathcal{L}^n)$. Dieser Raum heißt Lebesgue-Maßraum und $\mathcal{L}(X)$ sind die Lebesgue-messbaren Mengen. Das Maß $\mathcal{L}^n$ ist das n-dimensionale Lebesgue-Maß.*

Nach Bemerkung 1.9 unten gilt $R \in \mathcal{L}(X)$ für alle Rechtecke $R = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$. Dann sind auch alle offenen Mengen in $\mathcal{L}(X)$. Begründung: Sei U offen. Dann ist $U = \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}^n} R_x$, wobei R_x ein geeignetes kleines Rechteck um x ist. Also ist die offene Menge U messbar. Dann gilt aber sogar: $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{L}(X)$, das Lebesgue-Maß ist ein Borel-Maß (siehe Definition 1.3).

Bemerkung 1.9. *Sei $R = (a_1, b_1) \times ... \times (a_n, b_n)$ ein Rechteck. Dann ist R Lebesgue-messbar. Zum Beweis betrachten wir eine beliebige Testmenge $B \subset X$ und zeigen, dass $\mu(B) \geq \mu(B \cap R) + \mu(B \setminus R)$.*

Zu $\varepsilon > 0$ existieren Rechtecke R_k mit $B \subset \bigcup_k R_k$ und $\mu(B) \geq \sum_k \mu(R_k) - \varepsilon$. Wir folgern

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\geq \sum_k \mu(R_k) - \varepsilon = \sum_k \left(\mu(R_k \cap R) + \mu(R_k \setminus R)\right) - \varepsilon \\
&\geq \mu\left(\bigcup_k (R_k \cap R)\right) + \mu\left(\bigcup_k R_k \setminus R\right) - \varepsilon \\
&\geq \mu(B \cap R) + \mu(B \setminus R) - \varepsilon.
\end{aligned}$$

In der ersten Zeile haben wir ausgenutzt, dass nach Konstruktion des äußeren Lebesgue-Maßes $\mu(R) = \mu(R \cap \tilde{R}) + \mu(R \setminus \tilde{R})$ für zwei Rechtecke $R, \tilde{R}$ gilt. Der letzten Schritt gilt wegen der Monotonie von μ. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt damit die Messbarkeit von R.

Liste wichtiger Begriffe und Ergebnisse

Wir geben hier einen Überblick über wichtige Begriffe, die in diesem Text vorkommen.

- Ein **Maß** ist eine Abbildung, welche Mengen auf reelle Zahlen abbildet. Normalerweise nehmen wir Werte in $[0, \infty) \cup \{\infty\}$ an, zur Betonung sprechen wir dann auch von einem **positiven Maß**, siehe Definition 1.2. Ein **signiertes Maß** nimmt Werte in $(-\infty, \infty)$ an, siehe Definition 4.1.
- Für ein **Borel-Maß** sind alle Borel-Mengen messbar, siehe Definition 1.3.
- Ein **Radon-Maß** hat Regularitätseigenschaften, z.B. sind messbare Mengen von außen durch offene Mengen mit ähnlichem Maß approximierbar, siehe Definition 3.1.
- **Absolutstetigkeit** von Maßen ($\lambda \ll \mu$) und zueinander **singuläre** Maße ($\lambda \perp \mu$) werden in Definition 4.2 eingeführt.

Die wichtigsten Resultate der Maßtheorie sind die Folgenden.

- Der **Darstellungssatz** setzt Funktionale $C_0(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ in Beziehung zu Radon-Maßen; positive Funktionale zu (positiven) Radon-Maßen (Satz 3.5), allgemeine Funktionale zu signierten Radon-Maßen (Satz 4.13).
- Bei der **Lebesgue-Zerlegung** schreibt man $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$, wobei die Anteile zu einem vorgegebenen Maß μ absolutstetig beziehungsweise singulär sind (Satz 4.6).
- Der Satz von **Radon-Nikodym** liefert zu $\lambda \ll \mu$ eine Dichte $h \in L^1(X, \mu)$ mit $d\lambda = h\, d\mu$ (ebenfalls in Satz 4.6).
- In der **Jordan-Zerlegung** schreibt man $\mu = \mu_+ - \mu_-$ mit positiven $\mu_\pm$, siehe (4.2). In der **Hahn-Zerlegung** teilt man die Grundmenge entsprechend, $X = A \dot{\cup} B$, siehe Satz 4.11. In der **Polar-Zerlegung** schreibt man $d\lambda = h\, d|\lambda|$, siehe Satz 4.10.

2. Integrale

2.1. Messbare Funktionen

Im Folgenden sei immer $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Definition 2.1. *Sei Y ein topologischer Raum. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt **μ-messbar**, falls*

$$U \subset Y \text{ offen} \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(U) \in \mathcal{A}.$$

Bemerkung. *Für uns ist typischerweise $Y = \mathbb{R}$ oder eine Variante ($Y = [-\infty, \infty]$ oder $Y = [0, \infty]$ oder $Y = \mathbb{R}^n$). Für $Y = \mathbb{R}$ (bzw. $Y = [-\infty, \infty]$) vereinfacht sich das obige Messbarkeitskriterium: f ist μ-messbar $\iff \forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty, a)) \in \mathcal{A}$.*

Begründung: Für offene Intervalle (c, d) schreiben wir die Urbildmenge als $f^{-1}((c, d)) = f^{-1}([-\infty, d)) \setminus f^{-1}([-\infty, c])$, wobei wiederum $[-\infty, c] = \bigcap_k [-\infty, c + \frac{1}{k})$ als Schnitt offener Intervalle geschrieben werden kann.

Satz 2.2. *Für $k \in \mathbb{N}$ seien $f, g, f_k : X \to [-\infty, \infty]$ messbare Funktionen. Dann sind auch folgende Funktionen messbar:*

$$-f, \quad f + g, \quad f_+ := \max\{f, 0\}, \quad \max\{f, g\}, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \quad (\textit{fordere } g(x) \neq 0 \, \forall x \in X).$$

Weiterhin sind die folgenden Funktionen $f : X \to [-\infty, \infty]$ messbar: $f(x) := \inf_k f_k(x)$ und $f(x) := \liminf_{k \to \infty}(f_k(x))$.

Beweis. Dass die Funktion $-f$ messbar ist, ist klar. Wegen

$$(f + g)^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_{\substack{r,s \in \mathbb{Q} \\ r+s<a}} f^{-1}([-\infty, r)) \cap g^{-1}([-\infty, s))$$

ist $f + g$ messbar. Aus

$$(f_+)^{-1}([-\infty, a)) = \begin{cases} \emptyset & \text{für } a \leq 0 \\ f^{-1}([-\infty, a)) & \text{für } a > 0 \end{cases}$$

folgt die Messbarkeit von f_+. Wir schreiben $\max\{f, g\} = (f - g)_+ + g$ und schließen, dass $\max\{f, g\}$ messbar ist.

Die Funktion f^2 ist messbar, da

$$(f^2)^{-1}([-\infty, a)) \overset{a \geq 0}{=} f^{-1}([-\infty, \sqrt{a})) \setminus f^{-1}([-\infty, -\sqrt{a}]).$$

Wir schreiben $f \cdot g = \frac{1}{2} \cdot [(f + g)^2 - f^2 - g^2]$ und schließen, dass $f \cdot g$ messbar ist.

Die Funktion $\frac{1}{g}$ ist messbar, da

$$\left(\frac{1}{g}\right)^{-1}[-\infty, a) = \begin{cases} g^{-1}(\frac{1}{a}, 0) & \text{falls } a < 0, \\ g^{-1}(-\infty, 0) & \text{falls } a = 0, \\ g^{-1}([-\infty, 0)) \cup g^{-1}((\frac{1}{a}, \infty]) & \text{falls } a > 0. \end{cases}$$

Damit ist auch $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$ messbar.

Sei $f = \inf_k f_k$. Dann ist

$$f^{-1}([-\infty, a)) = \bigcup_k f_k^{-1}([-\infty, a))$$

als abzählbare Vereinigung von messbaren Mengen messbar. Nach den obigen Schritten ist auch

$$f := \liminf_k (f_k) = \sup_m \left(\inf_{k \geq m} (f_k) \right)$$

messbar. □

Notation. *Eine Eigenschaft gilt* ***μ-fast überall*** $:\iff$ *es existiert eine Menge $N \subset X$ mit $\mu(N) = 0$ (***Nullmenge***), so dass die Eigenschaft für alle $x \in X \setminus N$ gilt.*

2.2. Integrale messbarer Funktionen

Definition 2.3. *Eine Funktion $g : X \to [-\infty, \infty]$ heißt* ***einfache Funktion****, falls*

1. *g ist μ-messbar*
2. *die Bildmenge $g(X)$ ist endlich*

Eine einfache Funktion nimmt nur endlich viele Werte an, sie "ersetzt" die Treppenfunktionen des Riemann-Integrals. Für einfache Funktionen $g : X \to [0, \infty]$ definieren wir ein Integral durch

$$\int_X g \, d\mu := \sum_{a \in g(X)} a \cdot \mu(g^{-1}(\{a\})).$$

Sei $f : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann definieren wir das Integral von f bezüglich μ durch

$$\int_X f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X g \, d\mu \,\middle|\, g : X \to [0, \infty] \text{ einfache Funktion, } g \leq f \right\}.$$

Für $f : X \to [-\infty, \infty]$ messbar schreiben wir $f \in L^1(X)$, falls $\int_X |f| \, d\mu < \infty$ und setzen

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu,$$

wobei $f_+ := \max\{0, f\}$, $f_- := \max\{0, -f\}$, so dass $f = f_+ - f_-$.

Für eine messbare Menge $A \subset X$ definieren wir das Integral von f über A durch

$$\int_A f \, d\mu := \int_X f \cdot \chi_A \, d\mu,$$

wobei $\chi_A(x) = 1$ für $x \in A$ und 0 sonst.

Wir wollen betonen, dass im Integral einfacher Funktionen die Menge $A_a := g^{-1}(\{a\})$ messbar ist, weil die Funktion g als μ-messbar vorausgesetzt wird.

Satz 2.4 (Monotone Konvergenz)**.** *Für $k \in \mathbb{N}$ seien $f_k : X \to [0,\infty]$ messbar und es gelte $f_{k+1} \geq f_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze $f(x) := \lim_k(f_k(x))$. Dann ist f messbar und es gilt*

$$\int_X f\,d\mu = \lim_k \int_X f_k\,d\mu.$$

Beweis. Die Messbarkeit von f wurde in Satz 2.2 gezeigt.

Sei $\alpha \in [0,\infty]$ der Grenzwert der $\int_X f_k\,d\mu$, also $\int_X f_k\,d\mu \nearrow \alpha$. Wegen $f_k \leq f$ ist $\int_X f_k\,d\mu \leq \int_X f\,d\mu$ und damit $\alpha \leq \int_X f\,d\mu$. Es bleibt zu zeigen, dass die umgekehrte Ungleichung gilt.

Sei $g : X \to [0,\infty]$ eine beliebige einfache Funktion mit $g \leq f$ und $t \in (0,1)$ beliebig. Setze

$$E_k \quad := \quad \{x \in X \mid f_k(x) \geq t \cdot g(x)\}. \tag{2.1}$$

Wegen $f_k(x) \to f(x)$ existiert für alle $x \in X$ ein $K_x \in \mathbb{N}$, so dass $x \in E_k$ für alle $k \geq K_x$. Also ist $X = \bigcup_k E_k$. Zudem gilt $E_{k+1} \supset E_k$. Wir können daher folgern

$$\alpha \overset{k\to\infty}{\longleftarrow} \int_X f_k\,d\mu \geq \int_{E_k} f_k\,d\mu \overset{(2.1)}{\geq} \int_{E_k} t\cdot g\,d\mu \overset{k\to\infty}{\to} t \cdot \int_X g\,d\mu.$$

Der zweite Grenzübergang gilt, da g eine einfache Funktion ist und daher

$$\int_{E_k} g\,d\mu = \sum_{a\in g(X)} a \cdot \mu\left(g^{-1}(\{a\}) \cap E_k\right).$$

Wegen der Limeseigenschaften von Maßen gilt $\mu\left(g^{-1}(\{a\})\right) = \lim_k \mu\left(E_k \cap g^{-1}(\{a\})\right)$. Wir erhalten $t \cdot \int_X g\,d\mu \leq \alpha$. Da t beliebig war folgt $\int_X g\,d\mu \leq \alpha$. Da g beliebig war, folgt schließlich $\int_X f\,d\mu \leq \alpha$. □

Satz 2.5 (Lemma von Fatou)**.** *Seien $f_k : X \to [0,\infty]$ messbar für alle $k \in \mathbb{N}$. Setze $f(x) := \liminf_k f_k(x)$ für alle x. Dann gilt*

$$\int_X f\,d\mu \leq \liminf_k \int_X f_k\,d\mu.$$

Beweis. Setze $g_k(x) := \inf_{m\geq k}(f_m)(x)$ für jedes $x \in X$. Dann gilt $g_k \nearrow f = \liminf_k(f_k)$ punktweise. Nach Satz 2.4 ist

$$\int_X \liminf(f_k)\,d\mu = \int_X f\,d\mu = \lim_k \int_X g_k\,d\mu \leq \liminf_k \int_X f_k\,d\mu.$$

Dies zeigt die Behauptung. □

Dass im Lemma von Fatou die Ungleichheit auftreten kann, zeigt das folgende fundamentale Beispiel.

Beispiel. *Sei* $f_k : (0,1) \to \mathbb{R}$ *gegeben durch*

$$f_k(x) = \begin{cases} k & \text{für } x \in (0, \frac{1}{k}) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $f := \liminf_k f_k = 0$ *und* $\int f = 0$, *aber* $\int f_k = 1$.

Aus obigem Satz zur monotonen Konvergenz erhält man den in Anwendungen nützlichsten Konvergenzsatz, den Lebesgue'schen Konvergenzsatz oder auch Satz zur majorisierte Konvergenz. Der Beweis (mit Hilfe der monotonen Konvergenz) ist identisch zum Beweis in der Lebesgue-Theorie aus Analysis III.

Satz 2.6 (Majorisierte Konvergenz)**.** *Sei* $g \in L^1(X)$, f_k *messbar für alle* $k \in \mathbb{N}$ *mit* $f_k \to f$ *punktweise fast überall und* $|f_k| \leq g$. *Dann ist* $f \in L^1(X)$ *und es gilt*

$$\int_X f \, d\mu = \lim_k \int_X f_k \, d\mu.$$

3. Radon-Maße

3.1. Definitionen

Radon-Maße sind Borel-Maße mit einer zusätzlichen “Regularitätseigenschaft”. In der nachfolgenden Definition denken wir an $X = \mathbb{R}^n$ oder Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Definition 3.1 (Radon-Maß)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, X ein topologischer Raum. Das Maß μ heißt Radon-Maß, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

(R1) $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$. Also: μ ist ein Borel-Maß, alle offenen Mengen sind messbar.

(R2) Für alle $M \in \mathcal{A}$ gilt $\mu(M) = \inf\{\mu(U) \mid U \subset X \text{ offen, } M \subset U\}$

(R3) Für alle $K \subset X$ kompakt ist $\mu(K) < \infty$.

Eigenschaft $(R2)$ wird auch als *Regularität von außen* bezeichnet: Jedes $M \in \mathcal{A}$ kann beliebig gut von außen durch eine offene Menge approximiert werden. In Epsilontik: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $U \subset X$ offen mit $M \subset U$ und $\mu(U) \leq \mu(M) + \varepsilon$.

Beispiel. *Das Dirac-Maß δ_0 auf $\mathbb{R}$ (mit der Borel σ-Algebra) ist ein Radon-Maß. Eine äußere Approximation mit abgeschlossenen Mengen ist im Allgemeinen nicht möglich, wie die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ zeigt.*

Proposition 3.2. *Jedes Radon-Maß $(X, \mathcal{A}, \mu)$ auf $X = \mathbb{R}^n$ ist auch von innen regulär: für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset X \text{ kompakt, } K \subset A\}.$$

Beweis. 1. Fall: $\mu(A) < \infty$. Setze $B_j := \overline{B_j(0)} \subset \mathbb{R}^n$. Die B_j sind kompakt. Nach (R3) ist $\mu(B_j) < \infty$ für jedes $j \in \mathbb{N}$. Die Konvergenzeigenschaft von Maßen liefert zudem $\mu(A \cap B_j) \overset{j\to\infty}{\to} \mu(A) < \infty$. Zu $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $j_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\mu(A \setminus B_j) = \mu(A) - \mu(A \cap B_j) \leq \varepsilon$ für alle $j \geq j_0$.

Wir überdecken nun $B_j \setminus A$ mit U_j offen gemäß (R2), $\mu(U_j) \leq \mu(B_j \setminus A) + \varepsilon$. Für die kompakte Menge $K_j := B_j \setminus U_j$ gilt nun $K_j \subset A$, da $K_j = B_j \setminus U_j \subset B_j \setminus (B_j \setminus A) = B_j \cap A \subset A$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\mu(K_j) &= \mu(B_j \setminus U_j) \geq \mu(B_j) - \mu(U_j) \geq \mu(B_j) - \mu(B_j \setminus A) - \varepsilon = \mu(A \cap B_j) - \varepsilon \\ &\geq \mu(A) - 2 \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

für j genügend groß. Da ε beliebig war, folgt die Behauptung.

2. Fall: $\mu(A) = \infty$. Es ist $\infty \overset{(R3)}{>} \mu(A \cap B_j) \to \infty$ für $j \to \infty$. Wegen Fall 1 existiert ein $K_j \subset A \cap B_j$ kompakt mit

$$\mu(K_j) \geq \mu(A \cap B_j) - 1.$$

Also gilt $\mu(K_j) \to \infty$. □

Proposition 3.3 (Caratheodory-Kriterium). *Sei μ ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit der folgenden Eigenschaft:*

> *Für $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{\operatorname{dist}(x,y) \mid x \in A,\ y \in B\} > 0$ gilt $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ (wir fordern nicht die Messbarkeit von A und B).*

Dann ist μ ein Borel-Maß. Genauer: Ist $\mathcal{A}$ die Menge μ-messbarer Mengen, dann gilt $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Sei $C \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Wir zeigen: C ist messbar, das heißt für $A \subset \mathbb{R}^n$ beliebig gilt $\mu(A) = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C)$. Da μ äußeres Maß ist, gilt hier „$\leq$“ automatisch. Es bleibt also „$\geq$“ zu zeigen.

Ohne Einschränkung sei $\mu(A) < \infty$, denn sonst ist die Ungleichung „$\geq$“ trivialerweise erfüllt.

Schritt 1. Setze $C_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{k}\right\} \supset C$. Es gilt $\operatorname{dist}(A \setminus C_k, A \cap C) > 0$. Also ist

$$\mu(A) \geq \mu((A \setminus C_k) \cup (A \cap C)) = \mu(A \setminus C_k) + \mu(A \cap C).$$

Zu zeigen ist also $\mu(A \setminus C_k) \to \mu(A \setminus C)$ für $k \to \infty$.

Schritt 2. Betrachte $R_k := \left\{x \in A \mid \operatorname{dist}(x, C) \in (\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]\right\}$. Dann gilt $A \setminus C = (A \setminus C_k) \cup (\bigcup_{l=k}^{\infty} R_l)$ und $\operatorname{dist}(R_k, R_\ell) > 0$ für alle k, ℓ mit $|k - \ell| \geq 2$. Damit gilt für $N \in \mathbb{N}$ beliebig

$$\sum_{k \leq N,\ k \text{ gerade}} \mu(R_k) = \mu\left(\bigcup_{k \leq N,\ k \text{ gerade}} R_k\right) \leq \mu(A) < \infty$$

und somit auch $\sum_{k \text{ gerade}} \mu(R_k) < \infty$. Ebenso ist $\sum_{k \text{ ungerade}} \mu(R_k) < \infty$.

Wegen $A \setminus C = (A \setminus C_k) \cup \bigcup_{\ell \geq k} R_\ell$ folgert man

$$\mu(A \setminus C) \leq \mu(A \setminus C_k) + \sum_{\ell \geq k} \mu(R_\ell).$$

Für k hinreichend groß ist $\sum_{\ell \geq k} \mu(R_\ell)$ hinreichend klein. □

3.2. Der Darstellungssatz für positive Funktionale

Wir betrachten nun Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$C(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} \quad \text{und}$$
$$C_c(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ kompakt }\}, \text{ mit } \operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Bemerkung 3.4. *Sei μ ein Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist*

$$L : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \qquad f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$$

ein Funktional (da μ Borel-Maß ist, ist f messbar und das Integral wohldefiniert).

Es ist linear, es ist positiv in dem Sinne, dass aus $f \geq 0$ auch $L(f) \geq 0$ folgt, und es ist "stetig" in dem Sinne, dass für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt gilt

$$\sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n),\ \|f\|_\infty \leq 1,\ supp(f) \subset K\} < \infty. \tag{3.1}$$

Letzteres folgt aus

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu \leq \int_K 1\, d\mu = \mu(K) < \infty.$$

Also: **Jedes Maß (mit den Eigenschaften aus Bemerkung 3.4) definiert ein lineares, positives, stetiges Funktional auf $C_c(\mathbb{R}^n)$.** Der Riesz'sche Darstellungssatz für positive Funktionale besagt, dass auch die Umkehrung gilt.

Satz 3.5 (Riesz'scher Darstellungssatz für positive Funktionale)**.** *Sei $L : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ linear, positiv und stetig im Sinne von (3.1). Dann existiert ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$, so dass*

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu$$

für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ist.

Beispiel. *Wir betrachten das Funktional $L(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f$ im Sinne des Riemann-Integrals. Dann ist L positiv und linear. Sei $supp(f) \subset K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\|f\|_\infty < 1$. Dann ist L wegen*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_K \|f\|_\infty \leq \int_K 1 < \infty$$

stetig. Satz 3.5 liefert: Es existiert ein Radon-Maß μ auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \equiv L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu.$$

Dieses Maß μ ist das Lebesgue-Maß. Das Lebesgue-Integral ist die Fortsetung des Riemann-Integrals; die Klasse der messbaren Funktionen wird vergrößert.

Beispiel. *Das Funktional sei $L(f) := f(x_0)$ zu einem festen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist das Maß μ aus Satz 3.5 das Dirac-Maß $\mu = \delta_{x_0}$, denn dafür gilt $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu = f(x_0)$.*

Beweis von Satz 3.5. Es ist ziemlich klar, welches Maß zu dem Funktional gehört, und wir werden dieses Maß im ersten Schritt angeben. Danach bleiben die Eigenschaften nachzuweisen.

Schritt 1. Konstruktion von μ. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen definiere

$$\mu(U) := \sup\{L(f) \mid f \in C_c(\mathbb{R}^n), \|f\|_\infty \leq 1, \operatorname{supp}(f) \subset U\}.$$

Für ein beliebiges $A \subset \mathbb{R}^n$ setze

$$\mu(A) \ := \ \inf\{\mu(U) \mid U \text{ offen}, A \subset U\}. \tag{3.2}$$

Dieses μ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- μ ist äußeres Maß, denn es lebt auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ und es gilt $\mu(\emptyset) = 0$, sowie $\mu(\bigcup_j A_j) \leq \sum_j \mu(A_j)$. Dies zeigt man mit geeigneten U_j und f_j und $\mu(A_j) \approx \mu(U_j) \approx L(f_j)$.

- Wir wollen das Caratheodory-Kriterium verwenden (siehe Proposition 3.3). Zu zeigen ist: $\operatorname{dist}(A,B)>0 \Rightarrow \mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$. Dies gilt mit $\mu(A)\approx\mu(U_A)\approx L(f_A)$ und $\mu(B)\approx\mu(U_B)\approx L(f_B)$ wegen

$$\mu(A\cup B)\geq L(f_A+f_B)=L(f_A)+L(f_B)\approx\mu(A)+\mu(B).$$

Details zu diesen Punkten werden im Anschluss an den Beweis nachgeliefert. Proposition 3.3 liefert, dass μ ein Borel-Maß ist. Damit ist die Radon-Maß Eigenschaft (R1) gezeigt.

Die äußere Regularität (R2) folgt aus der Definition in (3.2).

Zum Nachweis von (R3) betrachten wir $K\subset\mathbb{R}^n$ kompakt. Setze $U:=B_1(K)$. Dann ist

$$\mu(K)\leq\mu(U)=\sup\{L(f):\|f\|_\infty\leq 1,\ \operatorname{supp}(f)\subset U\}<\infty$$

wegen der “Stetigkeit” (3.1) von L. Also ist μ ein Radon-Maß.

Schritt 2. Formel $L(f)=\int f\,d\mu$. Dazu sei $f\in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f\geq 0$ und $\varepsilon>0$ fest gewählt. Setze $K:=\operatorname{supp}(f)$. Wähle $0=t_0<t_1<t_2<...<t_N$ mit $t_N=2\|f\|_\infty$ und $t_j-t_{j-1}<\varepsilon$. Durch eine Perturbation der t_j kann $\mu(f^{-1}(\{t_j\}))=0$ für alle $j=1,...,N$ erreicht werden.

Sei U_j die offene Menge $U_j:=f^{-1}((t_{j-1},t_j))$.

Nach Definition von $\mu(U_j)$ existiert ein $g_j\in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(g_j)\subset U_j$ und $0\leq g_j\leq 1$, so dass

$$\mu(U_j)\leq L(g_j)+\frac{\varepsilon}{N}$$

gilt.

Nach Proposition 3.2 ist μ von innen regulär, das heißt es existiert ein $K_j\subset U_j$ kompakt mit $\mu(K_j)\geq\mu(U_j)-\frac{\varepsilon}{N}$ bzw. $\mu(U_j\setminus K_j)\leq\frac{\varepsilon}{N}$.

Schließlich wollen wir die g_j etwas vergrößern. Es gibt $\varphi_j\in C_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $\operatorname{supp}(\varphi_j)\subset U_j$, $0\leq\varphi_j\leq 1$, so dass $\varphi_j\geq g_j$ und $\varphi_j\equiv 1$ auf $K_j\cup\operatorname{supp}(g_i)$ gilt. Insbesondere gilt

$$\mu(U_j)\ \leq\ L(\varphi_j)+\frac{\varepsilon}{N}, \tag{3.3}$$

da L positiv und linear ist.

Die Menge $\{x\in U_j\mid\varphi_j(x)<1\}\subset U_j\setminus K_j$ hat ein kleines Maß. Definiere den Fehler

$$\psi:=f-\sum_j\varphi_j\cdot f.$$

Dann ist $\psi>0$ auf

$$\begin{aligned}B:=\{x\mid\psi(x)>0\}&=\left\{x\mid f(x)>0,\ \text{und}\ \sum_j\varphi_j(x)<1\right\}\\&\subset\bigcup_j(U_j\setminus K_j)\cup\textit{Nullmenge},\end{aligned}$$

wobei die *Nullmenge* eine Teilmenge von $\bigcup_j f^{-1}(\{t_j\})$ ist, daher also tatsächlich eine Nullmenge. Nach Definition von μ folgt

$$L(\psi)\leq\|f\|_\infty\cdot\mu(B)\leq\|f\|_\infty\cdot\sum_j\mu(U_j\setminus K_k)\leq\varepsilon\cdot\|f\|_\infty.$$

Außerdem ist

$$\sum_j t_{j-1} \cdot L(\varphi_j) \le L\left(\sum_j \varphi_j \cdot f\right) = \sum_j L(f \cdot \varphi_j) \le \sum_j t_j \cdot L(\varphi_j) \le \sum_j t_j \cdot \mu(U_j).$$

Zusammen ergibt sich

$$\begin{aligned}
L(f) = L(\psi) + L\left(\sum_j \varphi_j \cdot f\right) &\le \varepsilon \cdot \|f\|_\infty + \sum_j \mu(U_j) \cdot t_j \\
&\le \varepsilon \cdot \|f\|_\infty + \sum_j t_{j-1} \cdot \mu(U_j) + \varepsilon \cdot \sum_j \mu(U_j) \\
&\le \sum_j t_{j-1} \cdot \mu(U_j) + \varepsilon \cdot (\|f\|_\infty + \mu(K)) \\
&\le \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu + C \cdot \varepsilon. \qquad \text{(Definition des Integrals)}
\end{aligned}$$

Andererseits gilt auch

$$\begin{aligned}
L(f) \ge L(f) - L(\psi) = L\left(\sum_j \varphi_j \cdot f\right) \\
&\ge \sum_j t_{j-1} \cdot L(\varphi_j) \ge \sum_j t_{j-1} \cdot \mu(U_j) - 2\varepsilon \cdot \|f\|_\infty \\
&\ge \sum_j t_j \cdot \mu(U_j) - \varepsilon \cdot (2\|f\|_\infty + \mu(K)) \\
&\ge \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu - C \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also ist

$$L(f) \ge \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu - C \cdot \varepsilon.$$

Da ε beliebig war, ergeben die zwei Ungleichungen für das Integral zusammen

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu,$$

also die Behauptung. □

Details zum ersten Teil des Beweises:

Zur σ-Subadditivität: Für ein äußeres Maß μ seien U_1, U_2 offene Mengen und $U := U_1 \cup U_2$. Wir betrachten $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $K := \operatorname{supp}(f) \subset U$ und $\|f\|_\infty < 1$.

Seien h_1, h_2 mit $h_i : U_i \to [0,1]$ mit $\sum_{i=1}^2 h_i = 1$ auf K und $\operatorname{supp}(h_i) \subset U_i$. Setze $f_i := f \cdot h_i$. Dann ist

$$L(f) = L(f \cdot h_1 + f \cdot h_2) = L(f_1) + L(f_2) \le \mu(U_1) + \mu(U_2).$$

Da f beliebig war, ist $\mu(U) \le \mu(U_1) + \mu(U_2)$.

Seien nun $A_i \subset \mathbb{R}^n$ für $i \in \mathbb{N}$. Es existieren U_i offen, $U_i \supset A_i$ mit $\mu(U_i) \leq \mu(A_i) + \varepsilon \cdot 2^{-i}$ für $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei f mit $\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$. Wegen der Kompaktheit von $\operatorname{supp}(f)$ ist sogar $\operatorname{supp}(f) \subset \bigcup_{i=1}^N U_i$. Damit ist also

$$L(f) \leq \sum_{i=1}^{N} \mu(U_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) + \varepsilon.$$

Da f beliebig war, folgt durch Supremumsbildung $\mu(\bigcup_i A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$. Dies ist die σ-Subadditivität des äußeren Maßes.

Zur Caratheodory-Bedingung: Seien $A_1 = A$ und $A_2 = B$ mit $\operatorname{dist}(A, B) > 0$. Sei $U \supset A_1 \cup A_2$ eine beliebige offene Überdeckung. Wähle zu A_i Umgebungen $U_i \subset U$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Dazu gibt es zwei Funktionen $f_i : U_i \to [0, 1]$, stetig mit kompakten Träger, mit $L(f_i) \geq \mu(U_i) - \varepsilon \geq \mu(A_i) - \varepsilon$. Wir setzen $f := f_1 + f_2$. Dann ist

$$L(f) = L(f_1) + L(f_2) \geq \mu(A_1) + \mu(A_2) - 2\varepsilon.$$

Also ist $\mu(A \cup B) \geq \mu(A) + \mu(B)$.

Es ist wichtig, festzuhalten, dass der Darstellungssatz für positive Funktionale einen langen, aber doch elementaren Beweis hat. Das wird für den allgemeinen Satz nicht gelten. Dort benutzt der Beweis Funktionalanalysis.

Der Satz hat eine interessante Konsequenz. Grob gesprochen gilt: Auf $\mathbb{R}^n$ gibt es nur reguläre Maße.

Korollar 3.6. *Sei μ ein (positives) Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}$ regulär, also ein Radon-Maß.*

Beweisskizze. Zu μ ist $L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$ ein positives, stetiges, lineares Funktional auf $C_c(\mathbb{R}^n)$. L wird dargestellt durch $\tilde{\mu}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\tilde{\mu} \Rightarrow \tilde{\mu}(B) = \mu(B).$$

für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Für einen ausführlichen Beweis verweisen wir auf Rudin. □

4. Signierte Maße

4.1. Definitionen, Radon-Nikodym & Lebesgue

Wir führen in diesem Abschnitt einige nützliche Begriffe und Konzepte ein.

Signierte Maße

Zunächst wollen wir bei den Maßen ein Vorzeichen zulassen. Man sollte dabei nicht zu viel erlauben.

Definition 4.1. *Sei X eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, und $\mu : \mathcal{A} \to (-\infty, \infty)$. Dann heißt μ* ***signiertes Maß****, falls es die folgende Eigenschaft hat.*

Für alle $M_k \in \mathcal{A}$, $k \in \mathbb{N}$, $M_k \cap M_\ell = \emptyset \ \forall k \neq \ell$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(M_k),$$

insbesondere bilde μ in die reellen Zahlen ab und die Reihe konvergiere.

Zur Unterscheidung nennen wir die bisherigen „normalen“ Maße ab jetzt manchmal auch „positive Maße“, um die Unterscheidung klar zu machen.

Bemerkung. *μ positives Maß $\not\Rightarrow$ μ signiertes Maß (wegen des Wertes $+\infty$)*
μ signiertes Maß $\not\Rightarrow$ μ positives Maß (wähle beispielsweise $\mu = -\delta_0$)

Variationsmaß

Definiere zu einem signiertem Maß μ ein positives Maß $\lambda = |\mu|$ durch

$$\begin{aligned} &|\mu| : \mathcal{A} \to [0, \infty] \\ &|\mu|(M) := \sup\left\{ \sum_{k\in\mathbb{N}} |\mu(M_k)| \,\middle|\, \bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \subset M,\ M_k \cap M_\ell = \emptyset \ \forall k \neq \ell \right\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Dieses Maß heißt **Variationsmaß**. Ein signiertes Maß, für welches das Variationsmaß ein Radon-Maß definiert, nennen wir **signiertes Radon-Maß.**

Bemerkung. *Es gilt $|\mu|(X) < \infty$, das heißt jede Umordnung der Reihe konvergiert. Insbesondere ist $|\mu|$ ein Maß.*

Für einen Beweis verweisen wir auf Rudin. Mit dem Variationsmaß μ können wir einen positiven Teil und einen negativen Teil des Maßes einführen. Wir setzen

$$\mu_+ := \frac{1}{2}(\mu + |\mu|) \quad \text{und} \quad \mu_- := \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)\,. \tag{4.2}$$

Dann ist $\mu = \mu_+ - \mu_-$. Dies ist die **Jordan-Zerlegung** von μ.

Absolute Stetigkeit

Im Folgenden sei μ ein positives Maß auf $\mathcal{A}$ und $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ signierte Maße auf $\mathcal{A}$.

Definition 4.2.

$$\begin{aligned}
\lambda \ll \mu :&\iff \lambda \textit{ ist } \textbf{\textit{absolut stetig}} \textit{ zu } \mu \\
:&\iff \forall E \in \mathcal{A} : \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0 \\
\lambda \textbf{\textit{ konzentriert}} \textit{ auf } A \in \mathcal{A} :&\iff \forall E \in \mathcal{A} : \lambda(E) = \lambda(E \cap A) \\
\lambda \perp \mu :&\iff \lambda \textit{ ist } \textbf{\textit{singulär}} \textit{ zu } \mu \\
:&\iff \exists A \in \mathcal{A}, \mu(A) = 0, \lambda \textit{ konzentriert auf } A \\
\lambda_1 \perp \lambda_2 :&\iff \lambda_1 \textit{ und } \lambda_2 \textit{ sind } \textbf{\textit{zueinander singulär}} \\
:&\iff \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A}, A_1 \cap A_2 = \emptyset \\
&\qquad \textit{so dass } \lambda_i \textit{ konzentriert auf } A_i.
\end{aligned}$$

Beispiel. *Wir setzen*

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &:= \delta_0 \text{ auf } \mathcal{L}(\mathbb{R}), \\
\lambda_2 &:= \delta_1 \text{ auf } \mathcal{L}(\mathbb{R}), \\
\lambda_3 &:= \mathcal{L}^1 \text{ auf } \mathcal{L}(\mathbb{R}), \\
\lambda_4 &:= f\,dx = f\,d\mathcal{L}^1 \text{ für } f \in L^1(\mathbb{R}), \\
\lambda_4(A) &:= \int_A f\,d\mathcal{L}^1.
\end{aligned}$$

Dann ist λ_1 konzentriert auf $\{0\}$, λ_3 ist konzentriert auf $\mathbb{R}$, aber auch auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, λ_4 ist konzentriert auf $\{x \mid f(x) \neq 0\}$.

Es gilt $\lambda_1 \perp \lambda_2$, $\lambda_1 \perp \lambda_3$ und $\lambda_1 \perp \lambda_4$. Verwende hierfür $A_1 = \{0\}$ und die Tatsache, dass $\mathcal{L}^1(\{0\}) = 0$ gilt.

Es ist $\lambda_4 \ll \lambda_3$, denn für E mit $\lambda_3(E) = 0$, das heißt für eine $\mathcal{L}^1$- Nullmenge E, ist $\lambda_4(E) = \int_E f = 0$.

Es gilt: $f > 0$ $\mathcal{L}^1$-fast überall auf $\mathbb{R} \iff \lambda_3 \ll \lambda_4$.

Betrachte $\mu := \lambda_1 + \lambda_3 = \mathcal{L}^1 + \delta_0$. Dann gilt $\mu \not\ll \mathcal{L}^1$ und $\mu \not\ll \delta_0$, $\mathcal{L}^1 \ll \mu$, $\mu \not\perp \mathcal{L}^1$.

Bemerkung 4.3. *Die nachfolgenden Eigenschaften sind für ein positives Maß μ und signierte Maße λ, $\lambda_{1,2}$ leicht nachzuprüfen.*

1. λ *ist auf* A *konzentriert* $\Rightarrow |\lambda|$ *ist auf* A *konzentriert*
2. $\lambda_1 \perp \lambda_2 \Rightarrow |\lambda_1| \perp |\lambda_2|$
3. $\lambda_1 \perp \mu$, $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \perp \mu$
4. $\lambda_1 \ll \mu$, $\lambda_2 \ll \mu \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \ll \mu$
5. $\lambda \ll \mu \Rightarrow |\lambda| \ll \mu$
6. $\lambda_1 \ll \mu$, $\lambda_2 \perp \mu \Rightarrow \lambda_1 \perp \lambda_2$
7. $\lambda \ll \mu$, $\lambda \perp \mu \Rightarrow \lambda = 0$

L^p-Räume

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Für $p \in [1, \infty)$ setzen wir: $f \in L^p(X, \mu) :\iff f : X \to \mathbb{R}$ ist μ-messbar und

$$\|f\|^p_{L^p(X,\mu)} := \int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$

Für $p = \infty$ setzen wir $f \in L^\infty(X, \mu) :\iff \exists$ eine μ-Nullmenge E und $C > 0$, so dass $|f(x)| \leq C$ für alle $x \in X \setminus E$. Wir definieren das **essentielle Supremum** von f durch

$$\|f\|_{L^\infty(X,\mu)} := \text{ess sup}\,|f| := \inf\{C > 0 \,|\, |f| \leq C \; \mu\text{-fast überall}\}.$$

Alle Räume $L^p(X, \mu)$ sind Banachräume. Es gilt die **Hölderungleichung**

$$\|f \cdot g\|_{L^1(X,\mu)} = \int_X |f \cdot g| \, d\mu \leq \|f\|_{L^p(X,\mu)} \|g\|_{L^q(X,\mu)}$$

für $p, q \in [0, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Im Fall $p = 2$ gilt $q = 2$. Der Raum $L^2(X, \mu)$ ist sogar ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \cdot g(x) \, d\mu(x)\,.$$

Wir verwenden folgedes Resultat aus der Funktionalalysis:

Satz 4.4 (Riesz'scher Darstellungssatz für Hilberträume.)**.** *Sei H ein Hilbertraum und $\Lambda : H \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann gibt es ein $g \in H$ mit*

$$\Lambda(f) := \langle g, f \rangle \text{ für alle } f \in H.$$

Das nachfolgende Lemma wird sich als sehr nützlich erweisen. Es besagt: Wenn alle Mittelwerte einer Funktion in einem festen Intervall liegen, so hat die Funktion (fast überall) nur Werte in diesem Intervall.

Lemma 4.5. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und $f \in L^1(X, \mu)$ mit*

$$\frac{1}{\mu(E)} \cdot \int_E f \, d\mu \in [a, b] \qquad \forall E \in \mathcal{A} \text{ mit } 0 < \mu(E)$$

Dann gilt: $f(x) \in [a, b]$ für μ-fast alle $x \in X$.

Beweis. Definiere $B^\varepsilon_+ := \{x \in X : f(x) \geq b + \varepsilon\}$ und $B^\varepsilon_- := \{x \in X : f(x) \leq a - \varepsilon\}$.

1. Fall: Für alle $\varepsilon = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, sind B^ε_+ und B^ε_- Nullmengen. In diesem Fall ist auch

$$\bigcup_{\varepsilon = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}} B^\varepsilon_+ \cup B^\varepsilon_- = \{f > b\} \cup \{f < a\}$$

als Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge.

2. Fall: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass B^ε_+ keine Nullmenge ist. In diesem Fall gilt

$$b \geq \frac{1}{\mu(B^\varepsilon_+)} \int_{B^\varepsilon_+} f \, d\mu \geq \frac{1}{\mu(B^\varepsilon_+)} \int_{B^\varepsilon_+} (b + \varepsilon) \, d\mu = b + \varepsilon,$$

ein Widerspruch.

3. Fall: Es existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass B^ε_- keine Nullmenge ist. Analog zu Fall 2. $\square$

Radon-Nikodym & Lebesgue

Satz 4.6 (Lebesgue-Radon-Nikodym für endliches $\mu(X)$)**.** *Sei μ ein (positives) Maß auf $(X, \mathcal{A})$ mit $\mu(X) < \infty$. Weiterhin sei λ ein signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$.*

1. *Es existieren eindeutige signierte Maße λ_a, λ_s auf X, so dass*
$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s$$
mit $\lambda_a \ll \mu$ und $\lambda_s \perp \mu$. (Lebesgue-Zerlegung)

2. *Es existiert eine eindeutige Dichte $h \in L^1(X, \mu)$, so dass*
$$\lambda_a(E) = \int_E d\lambda_a = \int_E h \, d\mu \qquad \forall E \in \mathcal{A}.$$

Korollar. *Der Standard-Satz von Radon-Nikodym ist die zweite Aussage des Satzes für $\lambda \ll \mu$. Er besagt: Für jedes $\lambda \ll \mu$ existiert eine eindeutige Dichte $h \in L^1(X, \mu)$ mit $d\lambda = h \, d\mu$.*

Beweis. Schritt 1. Einfache Teile. Eindeutigkeit der Zerlegung: Sei
$$\lambda_a + \lambda_s = \lambda = \lambda'_a + \lambda'_s \Rightarrow \lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s \overset{(4.3,7.)}{\Rightarrow} \lambda_a - \lambda'_a = \lambda'_s - \lambda_s = 0.$$
Eindeutigkeit von h: Wegen
$$\int_E h \, d\mu = \lambda_a(E) = \int_E h' \, d\mu,$$
ist $\frac{1}{\mu(E)} \int_E (h - h') \, d\mu = 0$ für alle E. Wegen Lemma 4.5 gilt dann die Relation $h - h' = 0$ auch μ-fast überall.

Schritt 2. Konstruktion von λ_a, λ_s, h für $\lambda \geq 0$. Definiere das Maß φ auf $(X, \mathcal{A})$ durch
$$\varphi := \lambda + \mu.$$
Dann gilt auch
$$\int_X f \, d\varphi = \int_X f \, d\lambda + \int_X f \, d\mu$$
für alle $f : X \to \mathbb{R}$ messbar mit $f \geq 0$. Intuitiv ist λ "kleiner" als φ. Wir erwarten daher, dass die Abbildung $L^2(X, \varphi) \ni f \longmapsto \int f \, d\lambda \in \mathbb{R}$ beschränkt und linear ist. Dies gilt tatsächlich, und zwar wegen
$$\begin{aligned}\int_X f \, d\lambda &\leq \|f\|_{L^2(X,\lambda)} \cdot \|1\|_{L^2(X,\lambda)} = \left(\int_X |f|^2 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_X 1 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_X |f|^2 \, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_X 1 \, d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{L^2(X,\varphi)} \cdot \lambda(X)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

wobei $\lambda(X) < \infty$ nach Voraussetzung. Der Riesz'sche Darstellungssatz für Hilberträume Satz 4.4 liefert daher: Es existiert ein $g \in L^2(X, \varphi)$, so dass

$$\int_X f\, d\lambda = \int_X f \cdot g\, d\varphi \qquad \forall f \in L^2(X, \varphi). \tag{4.3}$$

Es gilt $g(x) \in [0,1]$ für φ-fast alle x. Dies folgt wieder mit Lemma 4.5: Für beliebiges $E \in \mathcal{A}$ mit $\varphi(E) > 0$ gilt mit $f = \chi_E$ in (4.3)

$$\frac{1}{\varphi(E)} \int_E g\, d\varphi = \frac{1}{\varphi(E)} \int_E d\lambda = \frac{\lambda(E)}{\varphi(E)} \in [0,1].$$

Wir können nun (4.3) umschreiben. Mit der Funktion $g : X \to [0,1]$ gilt

$$\int_X f(1-g)\, d\lambda = \int_X fg\, d\mu \qquad \forall f \in L^2(X, \varphi). \tag{4.4}$$

Aus dieser Relation werden wir alle behaupteten Eigenschaften ableiten. Wir setzen $A := \{x \in X : g(x) \in [0,1)\}$ und $B := \{x \in X : g(x) = 1\}$. Damit definieren wir $\lambda_a(E) := \lambda(E \cap A)$ und $\lambda_s(E) := \lambda(E \cap B)$.

Es ist $X = A \dot\cup B$. Daher gilt auch $\lambda = \lambda_a + \lambda_s$. Weiterhin ist nach Definition $\lambda_a \perp \lambda_s$. Wir behaupten, dass auch $\lambda_s \perp \mu$. Hierfür müssen wir zeigen, dass $\mu(B) = 0$. Dies gilt wegen

$$\mu(B) = \int_B g\, d\mu \overset{f:=\chi_B}{=} \int_X fg\, d\mu \overset{(4.4)}{=} \int_X f(1-g)\, d\lambda = 0.$$

Nun bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\lambda_a \ll \mu. \tag{4.5}$$

Hierfür setzen wir $f := \left(1 + g + g^2 + ... + g^k\right) \cdot \chi_E$ für ein $E \in \mathcal{A}$ und $k \in \mathbb{N}$ in (4.4) ein. Dies ergibt

$$\int_E \left(1 + g + g^2 + ... + g^k\right) \cdot (1-g)\, d\lambda = \int_E \left(1 + g + ... + g^k\right) \cdot g\, d\mu.$$

Hierbei gilt für die linke Seite

$$\begin{aligned}\int_E \left(1 + g + g^2 + ... + g^k\right) \cdot (1-g)\, d\lambda &= \int \left(1 - g^{k+1}\right)\, d\lambda \\ &= \int_{E\cap A} \left(1 - g^{k+1}\right)\, d\lambda \to \lambda(E \cap A) = \lambda_a(E)\end{aligned}$$

für $k \to \infty$ wegen $1 - g^{k+1} \to 1$ monoton auf A.

Andererseits ist die rechte Seite $g \cdot \left(1 + g + ... + g^k\right)$ monoton wachsend mit messbarem punktweisem Limes $h : X \to [0, \infty]$. Der Satz von der monotonen Konvergenz 2.4 liefert die Formel $\lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu$. Wegen $\lambda_a < \infty$ folgt $h \in L^1(X, \mu)$. Dies zeigt die zweite Aussage des Satzes und auch (4.5):

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda_a(E) = \int_E h\, d\mu = 0.$$

Schritt 3. Falls λ signiertes Maß. Schreibe $\lambda = \lambda_+ - \lambda_-$. Wende 2. Schritt auf λ_+ und λ_- an und setze $\lambda_+ = \lambda_{+,a} - \lambda_{+,s}$ und $\lambda_- = \lambda_{-,a} - \lambda_{-,s}$. Definiere $\lambda_a := \lambda_{+,a} - \lambda_{-,a}$ und $\lambda_s := \lambda_{+,s} + \lambda_{-,s}$.

Ebenso h_+ zu λ_+ und μ, und h_- zu λ_- und μ. Dann ist $h := h_+ - h_- \in L^1(\mu)$ und es gilt $d\lambda_a = d\lambda_{a,+} - d\lambda_{a,-} = h_+ \, d\mu - h_- \, d\mu = h \, d\mu$. □

Definition 4.7. *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Das Maß μ heißt σ-endlich, falls $E_j \in \mathcal{A}$ existieren mit $X = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} E_j$ und $\mu(E_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.*

Beispiel. *$\mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$ ist σ-endlich. Es genügt, $E_j = B_j(0)$ zu wählen.*

Satz 4.8. *Die Aussage von Satz 4.6 bleibt ohne die Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ richtig, falls μ ein σ-endliches Maß ist.*

Beweis. Analog zum Beweis des Satzes 4.6, unter Verwendung des nachfolgenden Lemmas. Details sind in Rudin zu finden. □

Lemma 4.9. *Sei μ ein σ-endliches Maß. Dann existiert ein $w \in L^1(X, \mu)$ mit $0 < w(x) \leq 1$ für alle $x \in X$.*

Beweis. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass die Mengen E_j aus der Definition von σ-endlich disjunkt sind. Andernfalls setzen wir $\tilde{E}_j := E_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} E_k$. Wir definieren

$$w_j : X \to \mathbb{R}, \qquad w_j(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{2^{j+1}} \cdot \dfrac{1}{1 + \mu(E_j)} & \text{falls } x \in E_j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere $w := \sum_{j \in \mathbb{N}} w_j$. Es ist $1 \geq w > 0$ und wegen

$$\int_{\bigcup_{j=1}^N E_j} w \, d\mu = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^{j+1}} \cdot \frac{\mu(E_j)}{1 + \mu(E_j)} \leq 1$$

gilt auch $w \in L^1(X, \mu)$ durch Bildung des Grenzwertes $N \to \infty$. □

Der Nutzen der Abbildung w ist, dass wir μ zu einem endlichen Maß $\tilde{\mu}$ modifizieren können. Wir definieren

$$\tilde{\mu}(E) := \int_E w \, d\mu.$$

Für $\tilde{\mu}$ gilt dann $\tilde{\mu}(X) = \int_X w \, d\mu < \infty$. Andererseits folgt aus $\tilde{\mu}(N) = 0$ schon $\mu(N) = 0$ für alle $\tilde{\mu}$-Nullmengen $N \in \mathcal{A}$. Denn wegen $\int_N w \, d\mu = 0$ und $w > 0$ folgt, dass N auch eine μ-Nullmenge ist. Das neue Maß $\tilde{\mu}$ hat also dieselben Nullmengen wie μ.

Zerlegungen

Satz 4.10 (Polarzerlegung). *Sei λ signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann existiert eine messbare Funktion $h : X \to \mathbb{R}$, $h(x) \in \{-1, +1\}$ für alle $x \in X$ mit $d\lambda = h \, d|\lambda|$, das heißt*

$$\int_E d\lambda = \lambda(E) = \int_E h \, d|\lambda|$$

für alle $E \in \mathcal{A}$.

Beweis. Es gilt $\lambda \ll |\lambda|$ nach Definition des Variationsmaßes $|\lambda|$ (vgl. Bemerkung 4.3 (5)). Der Satz von Radon-Nikodym liefert nun die Existenz eine Dichte $h \in L^1(X, |\lambda|)$, so dass $d\lambda = h\, d|\lambda|$ ist. Zu zeigen ist: $|h| = 1$ fast überall.

Sei dazu $r \in \mathbb{R}$ mit $r > 0$. Setze $A_r := \{x \in X : |h(x)| \leq r\}$. Wir zeigen zunächst $|\lambda|(A_r) = 0$ für alle $r < 1$.

Seien E_j eine Partition von A_r, also $E_k \cap E_l = \emptyset$ für alle $k \neq l$ und $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j = A_r$. Dann ist

$$\sum_j |\lambda(E_j)| = \sum_j \left| \int_{E_j} h\, d|\lambda| \right| \overset{\substack{E_j \subset A_r \\ |h| \leq r}}{\leq} \sum_j r \cdot |\lambda|(E_j) = r \cdot |\lambda|(A_r).$$

Die Supremumsbildung ergibt $|\lambda|(A_r) \leq r \cdot |\lambda|(A_r)$. Für $r < 1$ ist also $|\lambda|(A_r) = 0$. Wir finden $|h| \geq 1$ fast überall.

Für die umgekehrte Ungleichung sei $E \in \mathcal{A}$ beliebig mit $|\lambda|(E) > 0$. Dann ist

$$|\text{Mittelwert von } h \text{ über } E| = \left| \frac{1}{|\lambda|(E)} \int_E h\, d|\lambda| \right| = \left| \frac{1}{|\lambda|(E)} \int_E d\lambda \right| = \frac{|\lambda(E)|}{|\lambda|(E)} \leq 1.$$

Also sind alle Mittelwerte von h in $[-1, 1]$. Nach Lemma 4.5 ist $|h| \leq 1$ fast überall. Durch Abänderung von h auf einer Nullmenge erhalten wir die behauptete Vorzeichenfunktion. □

Bemerkung. *Der Satz gilt auch für komplexe Maße $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ mit $h : X \to \mathbb{C}$ und $|h(x)| = 1$. Dann ist $d\lambda = h\, d|\lambda|$. Dies ist eine Polarzerlegung in Betrag und Argument wie in $z = e^{i\varphi}|z|$.*

Satz 4.11 (Hahn- Zerlegung)**.** *Sei λ signiertes Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Dann existiert eine Zerlegung der Grundmenge in $X = A \dot\cup B$ mit $\lambda_+(E) = \lambda(E \cap A)$ und $\lambda_-(E) = -\lambda(E \cap B)$ für alle $E \in \mathcal{A}$.*

Die Hahn-Zerlegung impliziert, dass $\lambda_+ \perp \lambda_-$.

Beweis. Sei h die Vorzeichenfunktion von λ aus Satz 4.10. Setze $A := \{x \in X : h(x) = +1\}$ und $B := \{x \in X : h(x) = -1\}$. Dann ist $A \cap B = \emptyset$ und A und B sind messbar. Weiter ist $A \cup B = X$.

Sei $E \in \mathcal{A}$ beliebig.

$$\lambda_+(E) = \frac{1}{2}(\lambda + |\lambda|)(E) = \int_E \frac{1}{2}(h+1)\, d|\lambda| = \int_E \chi_A\, d|\lambda| = |\lambda|(E \cap A).$$

Es gilt also auch

$$\lambda_+(E) = \int_{E\cap A} d|\lambda| \overset{\substack{h=1 \\ \text{auf } A}}{=} \int_{E \cap A} d\lambda = \lambda(E \cap A).$$

Die analoge Rechnung funktioniert auch für B und λ_-. □

4.2. Der Riesz'sche Darstellungssatz

Der Raum $C_0(X)$. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner ein lokalkompakter Haussdorffraum). Wir definieren

$$C_c(X) := \{ f : X \to \mathbb{R} \text{ stetig} \,|\, \text{supp}(f) \text{ kompakt} \},$$

und

$$\begin{aligned} C_0(X) &:= \{f : X \to \mathbb{R} | f \textit{ stetig, } \forall \varepsilon > 0 \, \exists K \subset\subset X \textit{ kompakt, } |f|(x) < \varepsilon \, \forall x \notin K\} \\ &= \{f : X \to \mathbb{R} | f \textit{ stetig, } \exists f_k \in C_c(X),\ f_k \to f \textit{ gleichmäßig}\} \\ &= \overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty}. \end{aligned}$$

Der Raum $C_0(X)$ ist mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum.

Ziel: Zu einem linearen und stetigen Funktional $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ wollen wir ein signiertes Radon-Maß λ finden, so dass $\Phi(f) = \int f \, d\lambda$ gilt. Dann sind alle stetigen Funktionale auf $C_0(X)$-Funktionen Integrale.

Der Beweis basiert auf zwei anderen wichtigen Sätzen:

1. Der Satz von Riesz für positive Funktionale, Satz 3.5.

2. Der Dualraum zu L^p ist L^q mit $q = p/(p-1)$.

Den zweiten Satz müssen wir erst noch beweisen, siehe Satz 4.12. In dessen Beweis geht wiederum der Satz von Radon-Nikodym, Satz 4.6 ein.

Satz 4.12 (Der Dualraum von L^p). *Sei $p \in [1, \infty)$ und μ ein positives σ-endliches Radon-Maß auf $(X, \mathcal{A})$. Weiterhin sei $\Phi : L^p(X, \mu) \to \mathbb{R}$ linear und stetig. Dann existiert ein $g \in L^q(X, \mu)$ mit $q = \frac{p}{p-1}$ für $p > 1$ und $q = \infty$ für $p = 1$, so dass*

$$\Phi(f) = \int_X g \cdot f \, d\mu \qquad \forall f \in L^p(X, \mu).$$

Es gilt $\|g\|_{L^q(X,\mu)} \leq \|\Phi\| := \sup_{\|f\|_{L^p(X,\mu)}=1} |\Phi(f)|$.

Bemerkung. *1. Für $p = 2$ erhält man genau den Riesz'schen Darstellungssatz im Hilbertraum $L^2(X, \mu)$.*

2. Formal lautet die Aussage: Ein stetiges Funktional auf L^p wird durch ein Integral dargestellt. Genauer: Das Integral kommt mit einer Dichte aus, die Darstellung erfolgt mit dem Maß $d\lambda = g \, d\mu$.

3. Für $p = \infty$ ist die Aussage falsch.

Begründung des letzten Punktes. Die Dirac-Maß-Auswertung $\Phi : f \mapsto f(x_0)$ für ein $x_0 \in X$ ist auf $C_0(X)$ wohldefiniert und stetig. Das zugehörige Maß λ in der Integraldarstellung ist das Dirac-Maß, $\lambda = \delta_{x_0}$. Dieses Maß λ ist aber im Allgemeinen nicht von der Form $\lambda = g \, d\mu$ für ein $g \in L^1(X, \mu)$.

Merkregel: Funktionale auf L^∞ sind problematisch. □

Der Raum $L^\infty(X,\mu)$ ist ähnlich zu $C_0(X)$ (insofern, als dass die Normen ähnlich sind). Das Ziel des Riesz'schen Darstellungssatzes ist es, ein stetiges Funktional $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ darzustellen. Dies "ersetzt" die Darstellung von Funktionalen auf $L^\infty(X,\mu)$.

Beweis von Satz 4.12. Idee: Wir definieren ein geeignetes Maß $\lambda \ll \mu$, nämlich

$$\lambda(E) := \Phi(\chi_E) \qquad \text{für alle messbaren Mengen } E.$$

Der Satz von Radon-Nikodym 4.6 liefert $d\lambda = g\, d\mu$ und damit den Kandidaten g. Wir führen hier den Beweis nur für $\mu(X) < \infty$.

Schritt 1. Wohldefiniertheit von λ. χ_E ist messbar und in $L^\infty(X,\mu)$. Weiterhin ist χ_E in $L^p(X,\mu)$ wegen der Hölderungleichung und der Voraussetzung $\mu(X) < \infty$.

Schritt 2. λ ist endlich additiv. Wir behaupten, dass $\lambda(A \dot\cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$. Dies ist klar wegen $\chi_{A\dot\cup B} = \chi_A + \chi_B$ und der Linearität von Φ. Hierbei und im folgenden bezeichne χ_A die charakteristische Funktion

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Schritt 3. λ ist signiertes Maß. Es gilt $|\lambda(A)| = |\Phi(\chi_A)| < \infty$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Sei $B := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$, $B_j := \bigcup_{k=1}^j A_k$ mit $A_k \cap A_\ell = \emptyset$ für alle $k \neq \ell$. Dann ist

$$\|\chi_B - \chi_{B_j}\|_{L^p(X,\mu)} = \|\chi_{B\setminus B_j}\|_{L^p(X,\mu)} = \left(\int_{B\setminus B_j} 1^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \mu(B\setminus B_j)^{\frac{1}{p}} = (\mu(B) - \mu(B_j))^{\frac{1}{p}} \to 0$$

für $j \to \infty$. Da Φ stetig auf $L^p(X,\mu)$ ist, folgt $\Phi(\chi_B - \chi_{B_j}) = \Phi(\chi_B) - \Phi(\chi_{B_j}) = \lambda(B) - \lambda(B_j) \to 0$. Also ist

$$\lambda(B) = \lim_{j\to\infty} \lambda(B_j) = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^j \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^\infty \lambda(A_k).$$

Damit ist λ ein signiertes Maß.

Schritt 4. $\lambda \ll \mu$ und Konsequenzen. Sei E mit $\mu(E) = 0$. Dann ist $\chi_E = 0$ μ-fast überall, das heißt $\|\chi_E\|_{L^p(X,\mu)} = 0$. Damit ist $\lambda(E) = \Phi(\chi_E) = 0$.

Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert eine Funktion $g \in L^1(X,\mu)$, so dass $d\lambda = g\, d\mu$ ist, das heißt

$$\Phi(f) \overset{(*)}{=} \int_X f \, d\lambda = \int_X f \cdot g \, d\mu.$$

Dabei gilt $(*)$ zunächst für $f = \chi_D$ mit $D \in \mathcal{A}$ und deswegen dann für alle $f \in L^p(X,\mu)$. Damit ist die behauptete Gleichung gezeigt. Es bleibt zu beweisen, dass $g \in L^q(X,\mu)$ gilt.

Fall $p = 1$ und $q = \infty$. Es ist $g \in L^\infty(X,\mu)$ zu zeigen. Sei dazu $E \subset X$ eine beliebige messbare Menge mit $\mu(E) > 0$. Es gilt

$$\left|\frac{1}{\mu(E)} \int_E g \, d\mu\right| \overset{f=\chi_E}{=} \left|\frac{1}{\mu(E)} \Phi(\chi_E)\right| \le \frac{1}{\mu(E)} \|\Phi\| \cdot \|\chi_E\|_{L^p(X,\mu)} \overset{p=1}{=} \|\Phi\|.$$

Also ist $|g(x)| \leq \|\Phi\|$ für fast alle $x \in X$ wegen Lemma 4.5. Insbesondere gilt $g \in L^q(X,\mu) = L^\infty(X,\mu)$. Damit ist der Satz für $p = 1$ bewiesen.

Fall $p > 1$ und $q = \frac{p}{p-1}$. Idee: Setze „$f = g^{q-1}$“. Dann ist $f^p = (g^{q-1})^p = g^{\frac{p}{p-1}} = g^q$. Um dem Problem von Vorzeichen und unerlaubten Testfunktionen in unserer Formel zu entgehen, setzen wir $\alpha(x) := \operatorname{sgn}(g(x))$ und $E_n := \{x : |g(x)| \leq n\}$ und damit

$$f_n(x) := \alpha(x) \cdot |g(x)|^{q-1} \cdot \chi_{E_n}(x).$$

Eingesetzt in die Gleichung $\int_X f_n \cdot g \, d\mu = \Phi(f_n)$ ergibt sich

- für die rechte Seite

$$|\Phi(f_n)| \leq \|\Phi\| \cdot \|f_n\|_{L^p(X,\mu)} = \|\Phi\| \cdot \left(\int_{E_n} |g(x)|^{(q-1)p} \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \|\Phi\| \cdot \left(\int_{E_n} |g(x)|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Für die linke Seite gilt

$$\int_X f_n(x) \cdot g(x) \, d\mu = \int_{E_n} \alpha(x) \cdot |g(x)|^{q-1} \cdot g(x) \, d\mu = \int_{E_n} |g(x)|^q \, d\mu.$$

Also ist

$$\int_{E_n} |g|^q \, d\mu \leq \|\Phi\| \cdot \left(\int_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

und wegen $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$

$$\left(\int_{E_n} |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|\Phi\|.$$

Der Satz von der monotonen Konvergenz 2.4 liefert $g \in L^q(X,\mu)$ mit $\|g\|_{L^q(X,\mu)} \leq \|\Phi\|$. □

Bemerkung. *Jedes signierte Radon-Maß λ auf X definiert ein stetiges Funktional $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$, $\Phi(f) = \int_X f \, d\lambda$. Dabei verwenden wir, dass ein stetiges f messbar ist für signierte Borel-Maße λ.*

Für eine Folge $C_c(X) \ni f_k \to f$ mit gleichmäßiger Konvergenz gilt $\int_X f_k \, d\lambda \to \int_X f \, d\lambda$ wegen $|\lambda|(X) < \infty$.

Bemerkung. *Wir werden im Folgenden ausnutzen, dass $C_c(X)$ dicht liegt in $L^p(X,\mu)$ für jedes $p \in [1,\infty)$ und jedes Radon-Maß μ.*

Satz 4.13 (Riesz'scher Darstellungssatz)**.** *Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ (oder allgemeiner ein lokalkompakter Hausdorffraum). Sei $\Phi : C_0(X) \to \mathbb{R}$ stetig und linear. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes signiertes Radon-Maß μ auf X, so dass*

$$\Phi(f) = \int_X f \, d\mu.$$

Es gilt $|\mu|(X) = \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} := \sup_{\substack{f \in C_0(X) \\ \|f\|_\infty = 1}} |\Phi(f)|$.

Kurz: Der Dualraum von $C_0(X)$ sind die signierten Radon-Maße.

Beweis. Wir verwenden den Darstellungssatz in L^p und den Darstellungssatz für positive Funktionale.

Grundzug des Beweises. Konstruiere ein positives Funktional $\Lambda : C_0(X) \to \mathbb{R}$ linear, stetig, mit

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} \cdot \|f\|_\infty. \tag{4.6}$$

Dies liefert nach den Satz von Riesz für positive Funktionale, Satz 3.5, ein Radon-Maß λ auf X, so dass

$$\int_X f \, d\lambda = \Lambda(f)$$

für alle $f \in C_c(X)$. Aus der ersten Ungleichung in (4.6) schließen wir weiterhin

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|) = \int_X |f| \, d\lambda = \|f\|_{L^1(X,\lambda)}. \tag{4.7}$$

Mit dem neuen Maß λ ist also $\Phi : L^1(X, \lambda) \to \mathbb{R}$ stetig, oder genauer: Φ kann zu einer solchen Abbildung fortgesetzt werden, da $C_c(X)$ dicht liegt in $L^1(X, \lambda)$ Nach Satz 4.12 existiert dann ein $g \in L^\infty(X, \lambda)$ mit $\|g\|_{L^\infty(X,\lambda)} \leq 1$, so dass

$$\Phi(f) = \int f \cdot g \, d\lambda \tag{4.8}$$

für alle $f \in L^1(X, \lambda)$ gilt. Das Maß $d\mu = g \, d\lambda$ leistet das Verlangte.

Schritt 1. Normen. In diesem ersten Schritt setzen wir die Existenz des Funktionals Λ mit Eigenschaft (4.6) voraus (dieses wird in den Schritten 2-4 konstruiert). Wir zeigen, dass $|\mu|(X) = \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})}$. Dabei nehmen wir ohne Einschränkung an, dass $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} = 1$. Eine formale Rechnung liefert dann

$$\lambda(X) = \int_X 1 \, d\lambda = \Lambda(1) \overset{(4.6)}{\leq} \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} \|1\|_\infty = 1.$$

Die obige Rechnung ist nur formal, da die Funktion $f(x) \equiv 1$ nicht im Raum $C_0(X)$ liegt. Durch Approximation kann das obige Ergebnis rigoros gezeigt werden.

Aus Ungleichung (4.7) folgern wir direkt die Abschätzung $\|\Phi\|_{\mathcal{L}(L^1(X,\lambda),\mathbb{R})} \leq 1$. Satz 4.12 liefert dann auch $\|g\|_{L^\infty(X,\lambda)} \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}(L^1(X,\lambda),\mathbb{R})} \leq 1$ und somit $|g(x)| \leq 1$ für λ-fast alle x. Wir rechnen nun

$$1 \geq \int_X d\lambda \geq \int_X |g| \, d\lambda \geq \int_X f \cdot g \, d\lambda$$

für jedes $f \in C_0(X)$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$. Die Supremumsbildung ergibt

$$\begin{aligned} 1 \geq \int_X |g| \, d\lambda &\geq \sup \left\{ \int_X f \cdot g \, d\lambda : f \in C_0(X) \text{ und } \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \\ &\overset{(4.8)}{=} \sup \left\{ \Phi(f) : f \in C_0(X) \text{ und } \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \overset{\|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})}=1}{=} 1. \end{aligned}$$

Somit gilt überall Gleichheit und es folgt $|g| = 1$ fast überall. Insgesamt erhalten wir $|\mu|(X) = \int_X |g| \, d\lambda = \lambda(X) = 1 = \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})}$, also die Behauptung.

Schritt 2. Konstruktion von Λ für nichtnegative Funktionen und Eigenschaft (4.6). Setze

$$\Lambda(f) := \sup\{|\Phi(h)| : h \in C_c(X),\ |h(x)| \leq f(x) \forall x \in X\}.$$

Damit ist eine Abbildung $\Lambda : C_c^+(X) := \{f \in C_c(X) : f \geq 0\} \to \mathbb{R}$ definiert; sie hat die folgenden Eigenschaften:

- $|\Phi(f)| \leq \Lambda(|f|)$ für alle $f \in C_c^+(X)$ (verwende $h = f = |f|$)
- $\Lambda(f) \geq 0$ für alle $f \in C_c^+(X)$
- $\Lambda(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot \Lambda(f)$ für alle $f \in C_c^+(X)$ und $\alpha \geq 0$
- für $0 \leq f_1 \leq f_2$ ist $\Lambda(f_2) \geq \Lambda(f_1)$
- $\Lambda(|f|) \leq \|\Phi\|_{\mathcal{L}(C_0(X),\mathbb{R})} \cdot \|f\|_\infty$

Schritt 3. Linearität von Λ. Wir zeigen, dass für alle $f_1, f_2 \in C_c^+(X)$ gilt:

$$\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$$

. „$\geq$“: Seien f_1, f_2 gegeben und $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existieren $h_1, h_2 \in C_c(X)$ mit $|h_i| \leq f_i$, so dass $\Phi(h_i) \geq \Lambda(f_i) - \varepsilon$ gilt. Die Funktion $h := h_1 + h_2$ erfüllt die Ungleichung $|h| \leq f_1 + f_2$. Weiter ist

$$\Lambda(f_1 + f_2) \geq \Phi(h) = \Phi(h_1) + \Phi(h_2) \geq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) - 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\Lambda(f_1 + f_2) \geq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.

„$\leq$“: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Es existiert ein $h \in C_c(X)$ mit $|h| \leq f := f_1 + f_2$ und $\Phi(h) \geq \Lambda(f) - \varepsilon$. Wir brauchen h_1 und h_2 zu f_1 und f_2.

Setze $V := \{x \in X : f_1(x) + f_2(x) > 0\}$. Definiere damit

$$h_1(x) := h(x) \cdot \frac{f_1(x)}{(f_1 + f_2)(x)} \quad \text{und} \quad h_2(x) := h(x) \cdot \frac{f_2(x)}{(f_1 + f_2)(x)}$$

für $x \in V$ und $h_i(x) = 0$ für alle $x \notin V$.

Behauptung: Die h_i sind stetig. Beweis der Behauptung: Auf V ist dies klar. Auf $X \setminus \overline{V}$ ist dies auch klar. Die Stetigkeit in den Randpunkten erhält man wie folgt: $\frac{f_1}{f_1+f_2}$ ist beschränkt und wegen $|h| \leq f_1 + f_2$ ist $h = 0$ auf ∂V.

Aus $h = h_1 + h_2$ folgt schließlich

$$\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f) \leq \Phi(h) + \varepsilon = \Phi(h_1) + \Phi(h_2) + \varepsilon \leq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $\Lambda(f_1 + f_2) \leq \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$.

Die beiden Ungleichungen zusammen liefern die Linearität von Λ auf nicht-negativen Funktionen.

Schritt 4. Fortsetzung auf $C_c(X)$. Wir setzten nun Λ auf $C_c(X)$ fort, indem wir

$$\Lambda(f) := \Lambda(f_+) - \Lambda(f_-)$$

für $f = f_+ - f_-$ definieren. Diese Fortsetzung von Λ behält alle Eigenschaften.

Schritt 5. Eindeutigkeit von μ. Seien μ_1, μ_2 zwei Darstellungs-Maße. Für $\mu := \mu_1 - \mu_2$ gilt dann $\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu_1 - \int_X f\, d\mu_2 = \Phi(f) - \Phi(f) = 0$ für $f \in C_0(X)$. Damit folgt auch $\mu = 0$ und somit $\mu_1 = \mu_2$.

Begründung: Die Polarzerlegung liefert die Existenz von $h \in L^1(X, |\mu|)$ mit $|h| = 1$ fast überall und $d\mu = h\, d|\mu|$. Wähle $C_0(X) \ni f_k \overset{k\to\infty}{\to} h$ in $L^1(X, |\mu|)$. Dann ist wegen $\int_X f_k\, d\mu = 0$ auch

$$|\mu|(X) = \int_X d|\mu| = \int_X h\, d\mu = \int_X (h - f_k)\, d\mu = \int_X (h - f_k) \cdot h\, d|\mu| \leq \|h - f_k\|_{L^1(X,|\mu|)} \to 0.$$

Also ist $|\mu| = 0$ und somit $\mu = 0$. $\square$

Teil II.
Erweiterungen und Anwendungen

5. Schwache Konvergenz

5.1. Definitionen und Kompaktheit

Thema und Ergebnis dieses Abschnittes: In $X := L^p(\Omega, \mu)$ besitzt jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge. Genauer: Seien $f_k \in X$ mit $\|f_k\|_{L^p(X,\mu)} \leq C$ (es gebe also ein $C > 0$, so dass $\|f_k\|_{L^p(X,\mu)} \leq C \quad \forall k \in \mathbb{N}$). Dann existiert eine Teilfolge $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und ein $f \in L^p(X, \mu)$, so dass $f_{k_j} \rightharpoonup f$ für $j \to \infty$ (schwach in L^p).

Problem: Obiges gilt nur für reflexive L^p-Räume, also für $p \in (1, \infty)$. Wegen $(L^\infty)' \neq L^1$ ist L^1 nicht reflexiv und die Aussage gilt nicht für $p = 1$.

Im Fall $p = 1$ hilft allerdings der Riesz'sche Darstellungssatz. Er impliziert $\mathcal{M} = (C_0)'$ und damit $L^1 \subset \mathcal{M} = (C_0)'$. Wir können schließen: Ist $f_k \in L^1$ beschränkt, dann existiert eine Teilfolge und ein $\lambda \in \mathcal{M} = (C_0)'$, so dass $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in $\mathcal{M}$.

Im folgenden sei immer X ein Banachraum. Warnung: Damit hat X hier eine andere Bedeutung als in Teil I.

Beispiele für X und die zugehörigen Dualräume $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \{x' : X \to \mathbb{R} : x' \textit{ linear und stetig } \}$.

- $X = L^p(\Omega, \mu)$ für $p \in (1, \infty)$. Dann gilt nach Satz 4.12 für den Dualraum $(L^p)' = L^q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dies gilt auch für $p = 1$.
- $X = L^\infty(\Omega, \mu)$. Dieser Banachraum ist nicht reflexiv und auch nicht separabel.
- $X = C_0(\Omega)$. Dann ist $X' = \mathcal{M} := \{\mu \,|\, \mu \text{ ist ein signiertes Borel-Maß auf } X\}$.

Mit der folgenden Norm ist der Dualraum X' ein Banachraum.

$$\|x'\|_{X'} := \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\leq 1}} |x'(x)|.$$

Dazu gibt es eine **Normkonvergenz**, $x'_k \to x' \Leftrightarrow \|x_k - x\|_{X'} \to 0$. Diese Normkonvergenz wird allerdings praktisch selten verwendet.

Wichtiger sind die schwachen Konvergenzbegriffe (in Räumen und in Dualräumen)

Definition 5.1. *Sei X ein Banachraum und X' der Dualraum. Weiterhin seien x_k eine Folge in X und x'_k eine Folge in X'. Dann definieren wir*

x'_k konvergiert schwach-$*$ gegen $x' \in X'$ genau dann wenn

$$x'_k \overset{*}{\rightharpoonup} x' :\Longleftrightarrow x'_k(x) \to x'(x) \quad \forall x \in X.$$

x_k konvergiert schwach gegen $x \in X$ genau dann wenn

$$x_k \rightharpoonup x :\Longleftrightarrow x'(x_k) \to x'(x) \quad \forall x' \in X'.$$

Für Elemente $\lambda_k \in X'$ gilt $\lambda_k \rightharpoonup \lambda$ (schwach in X') $\Longleftrightarrow \mu(\lambda_k) \to \mu(\lambda)$ für alle $\mu \in X''$. Falls alle Funktionale auf X' gegeben sind durch Elemente von X (durch die zugehörige Auswertungsabbildung: Identifiziere $x \in X$ mit $\mu_x \in X''$ durch $\mu_x(\lambda) := \lambda(x)$ für $\lambda \in X'$), dann stimmen schwache und schwach-* Konvergenz in Dualräumen überein. Im allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall, die schwache Konvergenz ist stärker, denn sie läßt mehr Abbildungen zu: Es gilt '$X \subset X''$'.

Beispiel 5.2. *Sei $X = \ell^2 := \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Ein $x \in X$ schreiben wir als $x = (a^1, a^2, a^3, ...)$. Dann ist*

$$\|x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |a^j|^2.$$

Damit ist X sogar ein Hilbertraum mit $\langle x, y \rangle = \sum_j a^j \cdot b^j$, wobei $y = (b^1, b^2, b^3, ...)$.

Sei $x_k \in X = \ell^2$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = (a_k^1, a_k^2, a_k^3, ...)$. Weiterhin gelte $x_k \rightharpoonup x = (a^1, a^2, a^3, ...)$. Dann ist $a_k^j \to a^j$ für $k \to \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Beweis. Setze $x' = e_j' \in X'$ mit $e_j' : (a^1, a^2, ...) \longmapsto a^j$. Dann gilt $a_k^j = e_j'(x_k) \to e_j'(x) = a^j$ für $k \to \infty$. $\square$

Warnung: Die umgekehrte Implikation gilt nicht! Für $x_k := k \cdot e_k = (0, ..., k, 0, ...) \in X$ konvergiert $a_k^j \overset{k \to \infty}{\to} 0$ für alle j, obwohl $x_k \not\rightharpoonup 0$ gilt. Denn für $x' : (a^1, a^2, ...) \mapsto \sum_{j \in \mathbb{N}} a^j \frac{1}{j}$ gilt $x' \in X'$ und $x'(x_k) = 1$, aber $x'(0) = 0$.

Beispiel. $x_k := e_k = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$.

Behauptung: $x_k \rightharpoonup 0$, obwohl $\|x_k - 0\|_{\ell^2}^2 = \|x_k\|^2 = 1$ gilt, die Folge x_k konvergiert also schwach, aber nicht stark

Beweis der Behauptung: Nach dem Riesz'schen Satz für Hilberträume existiert für alle $x' \in X' = (\ell^2)'$ ein $x \in X$, so dass $x'(y) = \langle x, y \rangle$ für alle $y \in X$.

Sei nun $x' \in X'$ beliebig. Sei dazu $x \in X$ mit $x' = \langle x, . \rangle$. Dieses x ist von der Form $x = (a^1, a^2, a^3, ...)$ für eine Nullfolge a^j. Dann ist

$$x'(x_k) = \langle x, x_k \rangle = \langle x, e_k \rangle = a^k \overset{k \to \infty}{\to} 0.$$

Also gilt $x_k \rightharpoonup 0$.

Weiterhin ist auch $e_k' := \langle x_k, . \rangle \overset{*}{\rightharpoonup} 0$, $\|e_k'\|_{X'} = 1$. Dies ist klar, denn im Hilbertraum stimmen schwach-$*$ und schwache Konvergenz überein.

Wir erinnern an den Satz von Hahn-Banach aus der Funktionalanalysis.

Satz (Hahn-Banach Fortsetzungssatz)**.** *Sei X ein normierter reeller Vektorraum und Y ein linearer Unterraum, $\lambda \in \mathcal{L}(Y, \mathbb{R})$. Dann existiert ein $\tilde{\lambda} \in \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$, so dass $\tilde{\lambda}|_Y = \lambda$ und $\|\tilde{\lambda}\|_{X'} = \|\lambda\|_{Y'}$.*

Bemerkung 5.3.

1. *Starke Konvergenz impliziert schwache Konvergenz.*
2. *Schwache Limiten sind eindeutig.*
3. *Schwach konvergente Folgen sind beschränkt.*

4. Die Norm ist schwach unterhalbstetig, das heißt für

$$x_k \rightharpoonup x \Rightarrow \|x\|_X \le \liminf_k \|x_k\|_X.$$

Beispiel. *In obigem l^2-Beispiel tritt die schwache Unterhalbstetigkeit mit strikter Ungleichung auf: $e_k \in \ell^2$, $e_k \rightharpoonup 0$. Aber $\|0\|_{\ell^2} = 0 \le \lim_k \|e_k\| = 1$.*

Beweis von Bemerkung 5.3. 1. Seien $x_k \to x$ und $x' \in X'$. Dann folgt

$$|x'(x_k) - x'(x)| = |x'(x_k - x)| \le \underbrace{\|x'\|_{X'}}_{=:C} \cdot \underbrace{\|x_k - x\|_X}_{\to 0} \to 0$$

.

2. Sei $x_k \rightharpoonup a$ und $x_k \rightharpoonup b$. Für jedes $x' \in X'$ gilt dann

$$x'(a) \longleftarrow x'(x_k) \to x'(b).$$

Also ist $x'(a-b) = x'(a) - x'(b) = 0$ für alle $x' \in X'$. Mit dem Satz von Hahn-Banach folgert man $a - b = 0$. Denn: Auf $Y := \{\lambda(a-b) \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$ definiert $\lambda : Y \to \mathbb{R}$, $\lambda(a-b) := \|a-b\|$ ein stetiges lineares. Dazu gibt es ein $\tilde{\lambda} =: x'$, mit $\|\tilde{\lambda}\|_{X'} = 1$, aber $\tilde{\lambda}(a-b) = \lambda(a-b) = \|a-b\| \stackrel{!}{=} 0$.

3. Sei $x_k \rightharpoonup x$ in X. Wir konstruieren eine Familie von Funktionalen auf X', die Einsetzabbildungen: $\mu_k \in X''$, $\mu_k(x') := x'(x_k)$.

Für μ_k gilt: Für alle $x' \in X'$ ist

$$\mu_k(x') = x'(x_k) \to x'(x)$$

beschränkt. Also ist $\sup_k \mu_k(x') < \infty$ für alle x'. Der Satz von Banach-Steinhaus (sh. unten) impliziert nun $\sup_k \|\mu_k\|_{X''} < \infty$.

Wähle x'_k mit $x'_k(x_k) = \|x_k\|$, $\|x'_k\| = 1$ (ein solches x'_k existiert nach dem Satz von Hahn-Banach). Also ist

$$\sup_k \|x_k\|_X = \sup_k x'_k(x_k) = \sup_k \mu(x'_k) \le \sup_k \|\mu_k\|_{X''} < \infty.$$

4. Sei $x_k \rightharpoonup x$ in X. Es existiert ein $x' \in X'$ mit $\|x'\| = 1$, $x'(x) = \|x\|$ (Hahn-Banach). Dann ist

$$\|x\| = x'(x) = \lim_k x'(x_k) \le \liminf_k \underbrace{\|x'\|_{X'}}_{=1} \cdot \|x_k\|_X.$$

□

Bemerkung 5.3 gilt auch für die schwach-$*$ Konvergenz.

Satz (Satz von Banach-Steinhaus)**.** *Sei X ein Banachraum, Y normierter Raum, $F \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Dann gilt: Falls für alle $x \in X$ gilt, dass $\sup_{A \in F} \|A \cdot x\| < \infty$, dann gilt sogar auch*

$$\sup_{A \in F} \|A\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1 \\ A \in F}} \|A \cdot x\| < \infty$$

Frage: Wofür benötigt man die schwache Konvergenz? Antwort: Weil man leicht schwache Limiten findet!

Satz 5.4. *Sei X separabel. Dann ist jede abgeschlossene Kugel $\overline{B_R(0)} \subset X'$ schwach-$*$ folgenkompakt.*

Für alle $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X' mit $\|\lambda_k\|_{X'} \leq R$ für alle k existiert eine Teilfolge (λ_{k_ℓ}) und $\lambda \in X'$, so dass $\lambda_{k_\ell} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in X'.

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $a_n \in X$ eine dichte Familie in X (das heißt für alle $x \in X$ existiert eine Teilfolge n_ℓ, so dass $a_{n_\ell} \to x$; dies ist eine mögliche Definition der Seperabilität).

Betrachte für festes n die Folge $\lambda_k(a_n)$ mit $|\lambda_k(a_n)| \leq \|\lambda_k\|_{X'} \cdot \|a_n\|_X \leq R \cdot C$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergente Teilfolge. Nach dem Diagonalverfahren finden wir eine Teilfolge k_j, so dass $\lambda_{k_j}(a_n)$ für alle n gegen den Limes b_n konvergiert.

Definiere λ nun durch $a_n \longmapsto b_n$ und falls $x \in X$ mit $x = \lim_\ell a_{n_\ell}$ (Dichtheit) setze $\lambda(x) := \lim_\ell b_{n_\ell}$.

Zu zeigen:

1. $\lambda \in X'$ ist wohldefiniert
2. es gilt $\lambda_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in X'.

Zu 1.: $a_{n_\ell} \to x$ dann ist a_{n_ℓ} eine Cauchy-Folge, das heißt $\|a_n - a_m\|_X \to 0$ für $n, m \to \infty$ entlang der Teilfolge n_ℓ. Also ist

$$\begin{aligned} \|b_n - b_m\|_R &= \left\| \lim_j \lambda_{k_j}(a_n) - \lim_j \lambda_{k_j}(a_m) \right\|_R \leq \limsup_j \|\lambda_{k_j}(a_n - a_m)\| \\ &\leq \limsup_j \|\lambda_{k_j}\| \cdot \|a_n - a_m\|_X \leq R \cdot \|a_n - a_m\|_X \to 0. \end{aligned}$$

Also sind die b_n Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist λ wohldefiniert (das heißt $\lim_\ell b_{n_\ell}$ existiert und ist unabhängig von der a_{n_ℓ}-Folge).

Für $\lambda \in X'$ ist die Linearität klar. Weiterhin gilt

$$\sup_{\substack{x\in X \\ \|x\|\leq 1}} \lambda(x) = \sup_{\substack{a_n \\ \|a_n\|\leq 1}} \lambda(a_n) = \sup_{a_n} \limsup_j \underbrace{\lambda_{k_j}(a_n)}_{\leq R\cdot\|a_n\|\leq R} \leq R.$$

Zu 2.: Sei $x \in X$ beliebig. Es bleibt $\lambda_{k_j}(x) \to \lambda(x)$ für $j \to \infty$ zu zeigen.

Wähle a_n nahe an x:

$$|\lambda_{k_j}(x) - \lambda(x)| \leq |\lambda_{k_j}(x) - \lambda_{k_j}(a_n)| + |\lambda_{k_j}(a_n) - \underbrace{\lambda(a_n)}_{b_n}| + |\lambda(a_n) - \lambda(x)|.$$

Für $\|a_n - x\|_X$ klein ist der erste und dritte Term klein. Mit j hinreichend groß ist auch der zweite Term klein. □

Wir übertragen nun das Ergebnis auf die schwache Konvergenz.

Satz 5.5. *Sei X reflexiv. Dann ist jede Kugel $\overline{B_R(0)} \subset X$ schwach folgenkompakt.*

Falls $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in X ist, so existiert eine Teilfolge x_{k_ℓ} und $x \in X$, so dass $x_{k_\ell} \rightharpoonup x$ in X.

Beweis. Idee: Die x_k sind in X''. Wähle schwach-$*$ konvergente Teilfolge in $X'' = (X')'$ und interpretiere das Ergebnis in X.

Annahme: X' ist separabel (dies ist nicht notwendig: Verwende im allgemeinen Fall Räume, die durch $(x_k)_k$ definiert sind).

Definiere $Jx_k \in X''$ durch $Jx_k(\lambda) := \lambda(x_k)$ für alle $\lambda \in X'$. Dabei ist

$$\|Jx_k\|_{X''} = \sup\{\underbrace{Jx_k(\lambda)}_{\lambda(x_k)} : \lambda \in X',\ \|\lambda\| \leq 1\} \leq 1 \cdot \|x_k\|$$

beschränkt.

Nach Satz 5.4 existiert ein $x'' \in X''$ und eine Teilfolge k_ℓ, so dass $Jx_{k_\ell} \overset{*}{\rightharpoonup} x''$ in X''. Da X reflexiv ist, existiert ein $x \in X$, mit $x'' = Jx$ (da J surjektiv ist).

Behauptung: $x_{k_\ell} \rightharpoonup x$ in X.

Beweis der Behauptung: Sei $\lambda \in X'$ beliebig. Dann ist

$$\lambda(x_{k_\ell}) = Jx_{k_\ell}(\lambda) \to x''(\lambda) = Jx(\lambda) = \lambda(x).$$

□

Anwendung von Satz 5.4. Ist $X = C_0(\mathbb{R}^n)$ der Grundraum, dann ist der Dualraum $X' = \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, der Raum der signierten Radon-Maße auf $\mathbb{R}^n$. Mit der Norm $\|\mu\|_{\mathcal{M}} := |\mu|(\mathbb{R}^n)$ ist $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ein Banachraum.

Bemerkung. *Der Raum $C_0(\mathbb{R}^n)$ ist separabel, das heißt die schwach $*$-Kompaktheit gilt in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = C_0(\mathbb{R}^n)'$. Gegeben sei eine Folge $\mu_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ mit $\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} := |\mu_k|(\mathbb{R}^n)$ beschränkt. Dann existiert ein Maß $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und eine Teilfolge k_j, so dass $\mu_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, also*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_{k_j} \to \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n).$$

Die schwach-$*$ Konvergenz in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ist die am häufigsten verwendete Konvergenz in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Beispiel. *Sei $x_k \in \mathbb{R}^n$ eine Folge von Punkten. Setze $\mu_k := \delta_{x_k}$. Dann ist*

$$\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} = |\delta_{x_k}|(\mathbb{R}^n) = \delta_{x_k}(\mathbb{R}^n) = 1.$$

Also existiert eine Teilfolge μ_{k_j} und ein Grenzwert μ, so dass $\mu_{k_j} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt also

$$\mu_{k_j}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_{k_j} \overset{j\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu =: \mu(f).$$

Bemerkung.

1. *Es gilt:*

$$\mu = \begin{cases} \delta_x & \text{, falls } x_{k_j} \to x \\ 0 & \text{, falls } |x_{k_j}| \to \infty. \end{cases}$$

2. *Für beschränkte Folgen x_k hat diese Aussage also einen direkten Bezug zum Satz von Bolzano-Weierstraß.*

Wichtiges allgemeineres Beispiel: Dichtefunktionen $u_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} |u_k|\, d\mathcal{L}^n \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$ lassen sich mit Maßen $\mu_k \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ identifizieren. Setze für $A \subset \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

$$\mu_k(A) = \int_A u_k \, d\mathcal{L}^n.$$

Diese Maße erfüllen

$$\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} = |\mu_k|(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} |u_k|\, d\mathcal{L}^n = \|u_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^n)} \leq C,$$

sind also beschränkt. Daher bilden die μ_k eine beschränkte Familie und nach Satz 5.4 existiert eine Teilfolge $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$.

Insofern erhalten wir immerhin (lax gesagt): $u_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ als Maß. Genauer:

$$C_0(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto \int_{\mathbb{R}^n} u_k \cdot f \, d\mathcal{L}^n = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

Beispiel. *Dirac-Folgen Φ_ε erfüllen $\int \Phi_\varepsilon = 1$. Im Maßsinne hat Φ_ε also eine Teilfolge, die schwach-$*$ konvergiert; der Limes dieser Teilfolge (wieder als Φ_ε bezeichnet) ist das Dirac-Maß, $\Phi_\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0$. Allerdings ist der Limes nicht in L^1, insofern können wir keine L^1-Konvergenz erwarten.*

Bemerkung 5.6 (Zwei schwache Konvergenzen treffen aufeinander)**.** *Sei X ein Banach-raum, X' der Dualraum, $x_k \rightharpoonup x$ in X und $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ in X'. Dann gilt*

$$\lambda_k(x_k) \overset{k}{\to} \lambda(x),$$

falls eine Konvergenz stark ist.

Beweis. Sei $x_k \overset{X}{\rightharpoonup} x$, $\lambda_l \to \lambda$ in X'. Dann

$$|\lambda_k(x_k) - \lambda(x)| \leq \underbrace{|\lambda_k(x_k) - \lambda(x_k)|}_{\leq \|\lambda_k - \lambda\|_{X'} \cdot \|x_k\| \to 0} + \underbrace{|\lambda(x_k) - \lambda(x)|}_{\overset{x_k \rightharpoonup x}{\to} 0}$$

da schwach konvergente Folgen beschränkt sind.

Für $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$, $x_k \to x$ rechne

$$|\lambda_k(x_k) - \lambda(x)| \leq \underbrace{|\lambda_k(x_k) - \lambda_k(x)|}_{\leq \|\lambda_k\|_{X'} \cdot \|x_k - x\|_X \to 0} + \underbrace{|\lambda_k(x) - \lambda(x)|}_{\to 0}.$$

□

Beispiel. *Falls beide Konvergenzen schwach sind, kann nichts ausgesagt werden. Man denke an $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ mit $X' \cong \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ und die Folge $x_k = e_k$, $\lambda_k := e_k' : \varphi \mapsto \langle \varphi, e_k \rangle$.*

Dann gilt $x_k \rightharpoonup 0$ und $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$. Aber $\lambda_k(e_k) = 1 \not\to 0$ für $k \to \infty$.

Bemerkung 5.7. *Es gilt die folgende Verschärfung. Sei X separabler Banach-Raum, $x_k \rightharpoonup x$ mit folgender Eigenschaft: für alle $(\lambda_k)_k \in X'$, $\|\lambda_k\|_{X'} \leq C$, $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$ gilt auch $\lambda_k(x_k) \to \lambda(x)$. In diesem Fall gilt $x_k \to x$ (stark).*

Beweis. $y_k := x_k - x \rightharpoonup 0$. Zu zeigen ist: $y_k \to 0$.

Annahme: $y_k \not\to 0$. Dann existiert ein $\lambda_k \in X'$, so dass $\lambda_k(y_k) = \|y_k\| \not\to 0$ und $\|\lambda_k\|_{X'} \leq 1$ für alle k (Satz von Hahn Banach).

Für eine Teilfolge gilt $\lambda_k \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda$.

$$0 \overset{\text{Konstruktion}}{\not\longleftarrow} \lambda_k(y_k) = \lambda_k(x_k - x) = \lambda_k(x_k) - \lambda_k(x) \overset{\text{n.V.}}{\to} \lambda(x) - \lambda(x) = 0.$$

Ein Widerspruch. □

5.2. Schwache Konvergenz in L^p und in $\mathcal{M}$

L^p-Räume: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, μ ein Maß auf Ω und $X = L^p(\Omega, \mu)$. Für $p \in [1, \infty)$ gilt nach Satz 4.12, dass $(L^p(\Omega, \mu))' = L^q(\Omega, \mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $q = \frac{p}{p-1}$ für $p > 1$ und $q = \infty$ für $p = 1$. Im Folgenden werden wir die Abkürzung $L^p := L^p(\Omega, \mu)$ verwenden.

Bemerkung 5.8. *In L^p gilt Folgendes.*

- *Für $p \in [1, \infty)$ gilt*

$$\begin{aligned} u_k \rightharpoonup u \text{ in } L^p \quad &\iff \quad \forall \lambda \in (L^p)' \cong L^q \text{ gilt } \lambda(u_k) \overset{k}{\to} \lambda(u) \\ &\iff \quad \forall v \in L^q(\Omega, \mu) \text{ gilt } \int_\Omega v \cdot u_k \, d\mu \to \int_\Omega v \cdot u \, d\mu. \end{aligned}$$

- *Sei $\|u_k\|_{L^p} \leq C$ für $p \in (1, \infty)$. Dann ist u_k eine beschränkte Folge in einem reflexiven Banachraum. Daher existiert eine Teilfolge und ein Limes $u \in L^p$, so dass $u_k \rightharpoonup u$ in L^p.*

Beispiel. *Das Beispiel einer schwach konvergenten Folge in L^p.*

Sei $u_k(x) = \sin(k \cdot x)$ für $x \in \Omega = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$ mit $\mu = \mathcal{L}^1$.

Dann gilt $u_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} 0$ in L^p für alle $p \in (1, \infty)$.

Beweis. Es gilt $\|u_k\|_{L^p} \leq 1$. Die Kompaktheit liefert die Existenz einer Teilfolge (wieder als u_k bezeichnet) und einen Limes $u \in L^p$, so dass $u_k \overset{k\to\infty}{\rightharpoonup} u$ in L^p. Sei $\Phi \in C^1([0, 2\pi], \mathbb{R})$ eine Testfunktion. Inbesondere ist $|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq C_L \cdot |x - y|$ (Lipschitz-stetig) und $\Phi \in L^q$, also eine zulässige Testfunktion.

Somit gilt

$$\int_0^{2\pi} u_k \cdot \Phi \to \int_0^{2\pi} u \cdot \Phi \text{ für } k \to \infty.$$

Wir wählen Intervalle $I_\ell := (\ell \cdot \frac{2\pi}{k}, (\ell + 1) \cdot \frac{2\pi}{k})$. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} u_k \cdot \Phi = \sum_{\ell=0}^{k-1} \left\{ \int_{I_\ell} u_k(x) \cdot \underbrace{\left[\Phi(x) - \Phi\left(\ell \cdot \frac{2\pi}{k}\right)\right]}_{|\dots| \leq C_L \cdot \frac{2\pi}{k}} + \underbrace{\int_{I_\ell} u_k(x) \cdot \Phi\left(\ell \cdot \frac{2\pi}{k}\right) dx}_{= 0 \text{ lokaler Mittelwert von } u_k} \right\}.$$

Es gilt somit

$$\left| \int_0^{2\pi} u \cdot \Phi \right| \longleftarrow \left| \int_0^{2\pi} u_k \cdot \Phi \right| \leq \sum_{\ell=0}^{k-1} \underbrace{|I_\ell|}_{= \frac{2\pi}{k}} \cdot C_L \cdot \frac{2\pi}{k} \to 0.$$

Also folgt $u = 0$, die Funktionenfolge konvergiert schwach gegen ihren Mittelwert. □

Schwache Konvergenz in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$

Nach Definition bedeutet die schwach-* Konvergenz $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, dass für alle $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

Wir wollen einen verwandten Konvergenzbegriff näher betrachten.

Satz 5.9. *Für (positive) Radon-Maße μ_k, μ auf $\mathbb{R}^n$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ gilt*
$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu.$$

2. *Für alle $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt gilt*
$$\mu(K) \geq \limsup_k \mu_k(K)$$
und für alle $U \subset \mathbb{R}^n$ offen gilt
$$\mu(U) \leq \liminf_k \mu_k(U).$$

3. *Für alle beschränkten Borel-Mengen $B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mu(\partial B) = 0$ gilt*
$$\mu_k(B) \to \mu(B).$$

Ein Beispiel zur Voraussetzung im dritten Punkt: Ist $\mu_k = \delta_{\{\frac{1}{k}\}}$ und $\mu = \delta_0$, sowie $B = (0, 1]$. Dann gilt 1., aber nicht die Konklusion von 3. Tatsächlich ist $\mu(\partial B) \neq 0$.

Beweis. „1. $\Rightarrow$ 2.“ Es gelte $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$ für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset U$ kompakt. Wähle $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, so dass $\begin{cases} f \equiv 1 \text{ auf } K \\ \operatorname{supp}(f) \subset U \end{cases}$ und $0 \leq f \leq 1$. Dann ist

$$\mu_k(U) \geq \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \to \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \geq \mu(K).$$

Nach Anwendung des $\liminf$ ergibt sich

$$\liminf_{k\to\infty} \mu_k(U) \geq \mu(K).$$

Da K beliebig in U gewählt ist, folgt die Behauptung für U wegen der inneren Regularität von Radon-Maßen.

Der Beweis für kompakte Mengen K verläuft analog.

„2. $\Rightarrow$ 3.“ Sei B eine Borel-Menge mit $\mu(\partial B) = 0$.

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\leq \mu(B^0 \cup \partial B) = \mu(B^0) + \underbrace{\mu(\partial B)}_{=0} \leq \liminf_{k\to\infty} \mu_k(B^0) \leq \limsup_{k\to\infty} \mu_k(\overline{B}) \\
&\leq \mu(\overline{B}) = \mu(B^0 \cup \partial B) \leq \mu(B).
\end{aligned}$$

In der obigen Ungleichungskette muss also überall Gleichheit vorliegen. Wegen $\mu_k(B^0) \leq \mu_k(B) \leq \mu_k(\overline{B})$ gilt $\mu_k(B) \to \mu(B)$.

„3. $\Rightarrow$ 1.“ Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp}(f) \subset B_R(0)$ und $M := \|f\|_\infty$. Sei $R > 0$ so gewählt, dass $\mu(\partial B_R(0)) = 0$ gilt.

Es genügt, Behauptung 1. für $f \geq 0$ zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N$, $t_N \geq 2M$ mit $t_j - t_{j-1} \leq \varepsilon$. Setze $B_j := f^{-1}((t_{j-1}, t_j])$. Dann ist jedes B_j eine Borel-Menge und es gilt $B_j \subset B_R(0)$. Die t_j können so gewählt werden, dass $\mu(\partial B_j) \leq \mu(f^{-1}(\{t_{j-1}\})) + \mu(f^{-1}(\{t_j\})) = 0$ für $j \geq 2$ gilt. Es folgt

$$\begin{array}{ccc}
\sum_{j=2}^N t_{j-1} \cdot \mu(B_j) \leq & \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu & \leq \sum_{j=2}^N t_j \cdot \mu(B_j) + t_1 \cdot \mu(B_R(0)). \\
\uparrow & & \uparrow \\
\sum_{j=2}^N t_{j-1} \cdot \mu_k(B_j) \leq & \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k & \leq \sum_{j=2}^N t_j \cdot \mu(B_j) + t_1 \cdot \mu_k(B_R(0))
\end{array}$$

mit $|t_j - t_{j-1}| < \varepsilon$. Also gilt 1. □

Definition 5.10 (Schwache Konvergenz in $\mathcal{M}$)**.** *Für (positive) Radon-Maße μ_k, μ setzen wir*

$$\mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu :\Longleftrightarrow \textit{ Eine der äquivalenten Bedingungen aus Satz 5.9 ist erfüllt.}$$

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad &:\Longleftrightarrow \quad \mu_k \textit{ konvergiert schwach-}* \textit{ in } \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) = (C_0(\mathbb{R}^n))' \\
&\Longleftrightarrow \quad \mu_k(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k \overset{k}{\to} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \quad \forall f \in C_0(\mathbb{R}^n)
\end{aligned}$$

mit der Kompaktheit

$$\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} \leq C \overset{5.4}{\Rightarrow} \text{ es existiert eine Teilfolge und } \mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n) \text{, so dass } \mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu. \tag{5.1}$$

Bemerkung 5.11. *Der Unterschied der beiden Konvergenzbegriffe liegt im Unendlichen. Es gilt*

$$\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \Leftrightarrow \mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu \text{ und } \|\mu_k\|_{\mathcal{M}} = |\mu_k|(\mathbb{R}^n) \leq C. \tag{5.2}$$

Die Kompaktheitsaussage ist:

$$\textit{Falls } \sup_k |\mu_k|(M) < \infty \text{ gilt für alle } M \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt,} \tag{5.3}$$

so existiert eine Teilfolge und ein Grenzmaß $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, so dass $\mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu$ gilt.

Beispiel. *Betrachte $\mathcal{M}(\mathbb{R}) \ni \mu_k := k\delta_k$. Dann gilt für $f \in C_c(\mathbb{R})$ die Konvergenz $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu_k = kf(k) \to 0$ für $k \to \infty$. Es folgt also $\mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu = 0$. Da $|\mu_k|(\mathbb{R}) = k$ jedoch unbeschränkt ist, konvergiert μ_k nicht schwach-$*$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.*

Beweis von Bemerkung 5.11. Die Implikation "$\Rightarrow$" in (5.2) gilt, weil schwach-$*$-konvergente Folgen beschränkt sind.

Bezüglich „$\Leftarrow$" in (5.2): Da μ_k in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist, existiert eine Teilfolge und ein Grenzmaß $\tilde{\mu}$, so dass $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{\mu}$. Da μ und $\tilde{\mu}$ aber angewendet auf $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ dasselbe liefern, sind sie identisch, $\mu = \tilde{\mu}$.

Für die Kompaktheitsaussage betrachten wir die kompakten Mengen $\overline{B_m(0)}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Nach Voraussetzung ist $\mu_k\left(\overline{B_m(0)}\right)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ beschränkt (unabhängig von k) und somit die Einschränkung von μ_k auf $\overline{B_m(0)}$ beschränkt in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Nach (5.1) existieren ein $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ und zu jedem $m \in \mathbb{N}$ eine Teilfolge mit $\mu_k \lfloor \overline{B_m(0)} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \lfloor \overline{B_m(0)}$. Die Diagonalfolge erfüllt $\mu_k \overset{\mathcal{M}}{\rightharpoonup} \mu$.

□

Neue Konvergenzen und neue Sichtweisen

Satz 5.12 (Egoroff)**.** *Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mu(X) < \infty$ und $f_j, f : X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind folgende Aussage äquivalent:*

1. *$f_j \to f$ μ-fast überall für $j \to \infty$*

2. *$f_j \to f$ gleichmäßig auf beliebig großen Mengen. Genauer: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $G_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \setminus G_\varepsilon) \leq \varepsilon$ und*

$$f_j \to f \text{ gleichmäßig auf } G_\varepsilon \text{ für } j \to \infty$$

Beweis. „2. $\Rightarrow$ 1." Wähle zu $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ Mengen $G_{\frac{1}{n}} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \setminus G_{\frac{1}{n}}) \leq \frac{1}{n}$ und $f_j \to f$ gleichmäßig auf $G_{\frac{1}{n}}$. Für $G := \bigcup_n G_{\frac{1}{n}}$. erhalten wir

$$\mu(X \setminus G) = \mu\Big(\underbrace{X \setminus \bigcup_n G_{\frac{1}{n}}}_{\bigcap X \setminus G_{\frac{1}{n}}}\Big) = 0.$$

Außerdem gilt für alle $x \in G$, dass $f_j(x) \to f(x)$.

„1. $\Rightarrow$ 2." Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei weiter $G \in \mathcal{A}$ mit $\mu(X \setminus G) = 0$, $f_j(x) \to f(x)$ für $j \to \infty$ für alle $x \in G$.

Definiere

$$G_{k,n} := \left\{ x \in G : |f_j(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \; \forall j \geq k \right\}.$$

Da f_j, f messbar sind, ist $G_{k,n} \in \mathcal{A}$. Nach Konstruktion gilt $G_{k,n} \subset G_{k+1,n}$ für $n \in \mathbb{N}$ fest.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ behaupten wir

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_{k,n} = G.$$

„$\subset$" ist klar.

„$\supset$" gilt wegen $f_j(x) \to f(x)$ für alle $x \in G$.

Wegen

$$\mu(G_{k,n}) \overset{k\to\infty}{\to} \mu(G) = \mu(X) < \infty$$

existiert für jedes n ein k_n, so dass $\mu(G \setminus G_{k_n,n}) \le \varepsilon \cdot 2^{-n}$ ist. Setze $G_\varepsilon := \bigcap_n G_{k_n,n}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\mu(X \setminus G_\varepsilon) &= \mu\left(X \setminus \bigcap_n G_{k_n,n}\right) = \mu\left(\bigcup_n X \setminus G_{k_n,n}\right) \\
&\overset{\mu(X\setminus G)=0}{=} \mu\left(\bigcup_n G \setminus G_{k_n,n}\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G \setminus G_{k,n}) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon 2^{-n} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Auf G_ε gilt $f_j \to f$ gleichmäßig. Begründung: Sei $\delta > 0$ beliebig. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} \le \delta$. Für $x \in G_\varepsilon$ gilt insbesondere $x \in G_{k_{n_0},n_0}$ und damit

$$|f_j(x) - f(x)| \le \frac{1}{n_0} \le \delta \quad \forall j \ge k_{n_0}.$$

$\square$

Korollar 5.13 (Punktweise Konvergenz und schwache Konvergenz)**.** *Sei $p \in (1,\infty)$. Es konvergiere $u_k \to u$ punktweise fast überall in $\mathbb{R}^n$ mit $\|u_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^n)} \le C$. Dann gilt $u_k \rightharpoonup u$ in $L^p(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^n)$.*

Beweis. Wegen der schwachen Kompaktheit in L^p existieren eine Teilfolge und $\tilde{u}$, so dass $u_k \rightharpoonup \tilde{u}$ in $L^p(\mathbb{R}^n,\mathcal{L}^n)$. Zu zeigen ist: $u = \tilde{u}$.

Seien $\varepsilon > 0$ und $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ beliebig, $B_R = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$ so, dass $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_R(0)$. Nach dem Satz von Egoroff existiert ein $B_\varepsilon \subset B_R$ mit $|B_\varepsilon| < \varepsilon$, so das $u_k \to u$ gleichmäßig auf $B_R \setminus B_\varepsilon$. Wähle $f \in (L^p)' = L^q$ als $f = \chi_{B_R \setminus B_\varepsilon}$. Betrachte nun

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u} \cdot f\varphi \leftarrow \int_{\mathbb{R}^n} u_k \cdot f\varphi = \int_{B_R\setminus B_\varepsilon} u_k \cdot \varphi \to \int_{B_R\setminus B_\varepsilon} u \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f\varphi.$$

Für alle $\delta > 0$ gibt es $\varepsilon > 0$, so dass

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f\varphi - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi \right| < \delta$$

und ebenso für $\tilde{u}$. Tatsächlich gilt $\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot f\varphi - \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_\varepsilon} u \cdot \varphi \to 0$ wegen der Konvergenz $\chi_{B_\varepsilon} \to 0$ in L^q. Also folgt $\int_{\mathbb{R}^n} (u - \tilde{u}) \cdot \varphi = 0$ für alle $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und daher $u = \tilde{u}$.

Es existiert also eine Teilfolge, so dass $u_{k_\ell} \rightharpoonup u$ gilt. Nach dem Lemma ohne Namen folgt die Konvergenz der ganzen Folge. $\square$

Charakterisierung des Fehlers im Lemma von Fatou. Seien $u_k \geq 0$ mit $u_k(x) \to u(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt nach dem Lemma von Fatou.

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \, d\mathcal{L}^n \leq \liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} u_k \, d\mathcal{L}^n.$$

Das Standardbeispiel dazu ist die Funktionenfolge u_k mit $u_k(x) = k$ für $x \in (0, 1/k)$ und $u_k(x) = 0$ sonst. Dann gilt $\int_{\mathbb{R}^n} u_k \, d\mathcal{L}^n = 1$ und $u_k \to 0$ fast überall.

Wir wollen den Limes genauer analysieren. Seien dazu $u_k \geq 0$ mit $u_k(x) \to u(x)$ für fast alle x und $\int u_k \to b \in \mathbb{R}$. Wegen $u_k = |u_k|$ ist $\|u_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ beschränkt. Sei μ_k das Maß zu u_k, das heißt $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot u_k \, d\mathcal{L}^n$. Dann ist $\|\mu_k\|_{\mathcal{M}} \leq \|u_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ beschränkt.

Wegen der Kompaktheit gilt: Für eine Teilfolge und ein $\mu \in \mathcal{M}$ gilt $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$.

Nach dem Lebesgue'schen Zerlegungssatz existieren Maße $\tilde{u} \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ und $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$, so dass $d\mu = \tilde{u} d\mathcal{L}^n + d\lambda$ mit $\lambda \perp \mathcal{L}^n$. Damit ist das Limes-Maß in einen regulären Anteil $\tilde{u}$ und einen singulären Anteil λ zerlegt.

Behauptung 1: Beide Anteile sind positiv, $\lambda \geq 0$ und $\tilde{u} \geq 0$.

Beweis der Behauptung: Wegen $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu_k = \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot u_k \, d\mathcal{L}^n \geq 0$ für alle $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ mit $\varphi \geq 0$ folgt $\mu \geq 0$. Da das Maß λ singulär ist, ist λ auf einer Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{L}^n(A) = 0$ konzentriert. Sei $B \subset A$ eine beliebige Borel-Menge. Dann ist

$$0 \leq \mu(B) = \underbrace{\int_B \tilde{u} \, d\mathcal{L}^n}_{=0} + \lambda(B) \Rightarrow \lambda \geq 0.$$

Sei nun $B \subset \mathbb{R}^n \setminus A$ eine beliebige Borel-Menge. Dann ist

$$0 \leq \mu(B) = \int_B \tilde{u} \, d\mathcal{L}^n + \underbrace{\lambda(B)}_{=0} \Rightarrow \tilde{u} \geq 0.$$

Also folgt Behauptung 1.

Behauptung 2: Es gilt $u \leq \tilde{u}$.

Beweis der Behauptung: Sei $\varepsilon > 0$ und $Q \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige kompakte Menge. Nach dem Satz von Egoroff existiert eine Menge $B \subset Q$ mit $|B| \leq \varepsilon$, so dass $u_k \to u$ gleichmäßig auf $Q \setminus B$.

Ohne Einschränkung sei $(A \cap Q) \subset B$. Approximiere B von außen durch eine offene Menge U mit $B \subset U$ und $|U| \leq 2\varepsilon$. Dann ist $G := Q \setminus U$ kompakt mit $|G| < \infty$. Damit gilt

$$\int_G u \, d\mathcal{L}^n = \limsup_k \underbrace{\int_G u_k \, d\mathcal{L}^n}_{=\mu_k(G)} \overset{5.9}{\leq} \mu(G) = \int_G \tilde{u} \, d\mathcal{L}^n + \underbrace{\lambda(G)}_{=0} = \int_G \tilde{u} \, d\mathcal{L}^n,$$

denn λ lebt auf der Nullmenge A mit $G \cap A = \emptyset$.

Wir folgern $u \leq \tilde{u}$ auf $Q \setminus U$. Da U beliebig kleines Maß hat und Q beliebig war, folgt $u \leq \tilde{u}$ fast überall.

Behauptung 3: Die Ungleichung $u \geq \tilde{u}$ ist im Allgemeinen falsch. Genauer: es gibt u_k wie oben mit $u_k \to 0$ punktweise fast überall aber $u_k \, d\mathcal{L}^n \overset{*}{\rightharpoonup} 1 \, d\mathcal{L}^n$.

Wähle als u_k die Reihe von Balken der Breite $\varepsilon_k = 2^{-k}$ im Abstand $\sqrt{\varepsilon_k}$ mit Höhe $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}}$. Dann ist das Integral

$$\int_0^1 u_k = \text{Anzahl der Balken} \cdot \text{Breite} \cdot \text{Höhe} \approx \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} \cdot \varepsilon_k \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_k}} = 1.$$

Bemerkung 5.14. 1. *Jedes $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ ist eine Distribution. Dies ist wegen $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_0(\mathbb{R}^n)$ klar.*

Dabei verwenden wir die folgende Definition. $\Phi : C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ linear ist eine Distribution, falls die folgende Abschätzung gilt: $\forall K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt existiert ein $\alpha \in \mathbb{N}$, $C > 0$ mit $\Phi(f) \leq C \cdot \|f\|_{C^\alpha}$ für alle f mit supp$(f) \subset K$.

2. *Umgekehrt gilt auch: Jede positive Distribution ist ein Maß.*

Genauer: Sei $\Phi : C_c^\infty(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ eine Distribution mit $\Phi(f) \geq 0$ für alle $f \geq 0$. Dann gibt es ein positives lineares $\Lambda : C_c(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ und ein zugehöriges positives Radon-Maß μ, so dass $\Lambda|_{C_c^\infty} = \Phi$, $\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu$ für alle $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Setze
$$\Lambda(f) := \sup\{\Phi(\varphi) : \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n),\ \varphi \leq f\}$$
für alle $f \in C_c^+$. Die Menge ist nicht leer, da $\varphi \equiv 0$ enthalten ist. Wähle ein $\varphi_0 \in C_c^\infty$ mit $\varphi_0 \geq f$. Dann ist $\Phi(\varphi) \leq \Phi(\varphi_0)$ (Linearität und Positivität). Also existiert das Supremum. Durch Zerlegung eines beliebigen (nicht notwendig positiven) $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ kann Λ zu einem linearen Funktional fortgesetzt werden. □

6. Singuläre Probleme, Young-Maße

6.1. Zwei singuläre gewöhnliche DGL.

Beispiel 1: Sei $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$ und $\Delta = \partial_x^2$. Wir studieren

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \Delta u^\varepsilon + u^\varepsilon &= 1 \text{ in } \Omega \\ u^\varepsilon(0) &= 0 \\ \partial_x u^\varepsilon(1) &= 0 \end{aligned}$$

Wir wollen die Lösung für kleine ε charakterisieren.

Nach dem Maximumprinzip ist $u^\varepsilon \geq 0$ und $u^\varepsilon \leq 1$. Weiterhin ist u^ε monoton wachsend; also ist insbesondere $\partial_x u^\varepsilon \geq 0$.

Für alle $p < \infty$ ist $\int_0^1 |u^\varepsilon|^p = \|u^\varepsilon\|_{L^p}^p \leq 1$ (gleichmäßige L^p-Schranke). Wegen der Kompaktheit in L^p gilt für eine Teilfolge und $\varepsilon \to 0$ und eine $u \in L^p$: $u^\varepsilon \rightharpoonup u$ in $L^p((0,1), \mathbb{R})$.

Behauptung: $u \equiv 1$.

Beweis der Behauptung: Teste die Gleichung mit

$$\eta_\delta(x) := \begin{cases} \frac{x}{\delta} & \text{falls } x \leq \delta \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} 0 \xleftarrow{\varepsilon \to 0} \varepsilon \cdot \underbrace{\frac{u^\varepsilon(\delta)}{\delta}}_{\in [0, \frac{1}{\delta}]} &= \varepsilon \cdot \int_0^\delta \partial_x u^\varepsilon \cdot \frac{1}{\delta} = \varepsilon \cdot \int_0^1 \partial_x u^\varepsilon \cdot \partial_x \eta_\delta \\ &= -\varepsilon \cdot \int_0^1 \Delta u^\varepsilon \cdot \eta_\delta = \int_0^1 (1 - u^\varepsilon) \cdot \eta_\delta \to \int_0^1 (1-u) \cdot \eta_\delta. \end{aligned}$$

Die Randterme fallen jeweils weg. Für $\delta \to 0$ ergibt sich

$$\int_0^1 \underbrace{(1-u)}_{\geq 0} = 0.$$

Also ist $u \equiv 1$.

Weiterhin kann relativ einfach gezeigt werden, dass $\partial_x u^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0$ in $\mathcal{M}([0,1])$, da

$$1 \geq \int \partial_x u^\varepsilon = \int |\partial_x u^\varepsilon|.$$

Beispiel 2: Sei wieder $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}^1$. Diesmal betrachten wir

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \Delta u^\varepsilon + \partial_x u^\varepsilon &= 1 \\ u^\varepsilon(0) &= u^\varepsilon(1) = 0 \end{aligned}$$

Umformulierung: Substituiere $v^\varepsilon := u^\varepsilon(x) - x$. v^ε löst das System

$$\begin{aligned} -\varepsilon \cdot \Delta v^\varepsilon + \partial_x v^\varepsilon &= 0 \\ v^\varepsilon(0) &= 0 \\ v^\varepsilon(1) &= -1. \end{aligned}$$

Nach dem Maximumprinzip ist $v^\varepsilon \in [-1, 0]$ und $\partial_x v^\varepsilon \leq 0$. Insbesondere gilt für eine Teilfolge und $\overline{v} \in L^\infty(\Omega)$, das $v^\varepsilon \rightharpoonup \overline{v}$ in L^p für alle $p < \infty$ konvergiert.

Vermutung: Wegen $\partial_x v^\varepsilon \leq 0$ folgt $\Delta v^\varepsilon \leq 0$ und damit $v^\varepsilon \rightharpoonup 0$.

Behauptung 1: $v^\varepsilon \rightharpoonup \overline{v}$, $\overline{v} = const$ auf $[0, 1]$ für eine Teilfolge.

Beweis der Behauptung: $\|v^\varepsilon\|_\infty \leq 1$. Also ist v^ε beschränkt in L^p für alle p. Für eine Teilfolge gilt also $v^\varepsilon \rightharpoonup \overline{v}$ für ein $\overline{v} \in L^p((0, 1))$.

Wähle $0 \leq a < b < c \leq 1$ und als Testfunktion: $\eta : [0, 1] \to [0, 1]$,

$$\eta(x) := \begin{cases} \frac{1}{b-a} \cdot x - \frac{a}{b-a} & \text{für } a < x < b \\ -\frac{1}{c-b} \cdot x + \frac{c}{c-b} & \text{für } b < x < c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Testen der Gleichung mit η ergibt

$$\varepsilon \cdot \Big[\underbrace{\frac{v^\varepsilon(b) - v^\varepsilon(a)}{b - a} - \frac{v^\varepsilon(c) - v^\varepsilon(b)}{c - b}}_{\text{beschränkt für } \varepsilon \to 0} \Big] = \varepsilon \cdot \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \partial_x \eta = - \int \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta = \int v^\varepsilon \cdot \partial_x \eta.$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\int \overline{v} \cdot \partial_x \eta = 0.$$

Wir folgern, dass $\partial_x \overline{v} = 0$, dass also $\overline{v}$ konstant ist. Dies kann hier auch elementar eingesehen werden:

$$0 = \int \overline{v} \cdot \partial_x \eta = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b \overline{v} - \frac{1}{c - b} \cdot \int_b^c \overline{v} = \fint_{(a,b)} \overline{v} - \fint_{(b,c)} \overline{v}.$$

Also sind alle Mittelwerte identisch.

Nenne den Mittelwert ω. Nach Lemma 4.5 ist $\overline{v}(x) = \omega$ für fast alle x.

Behauptung 2: Es gilt $\overline{v} = 0$ und $v^\varepsilon \rightharpoonup 0$ für jede Folge $\varepsilon \to 0$.

Beweis der Behauptung: Wähle als Testfunktion $\eta(x) := 1 - x$. Dann ist

$$\underbrace{\varepsilon \cdot \int_0^1 \partial_x v^\varepsilon \cdot \underbrace{\partial_x \eta}_{=-1}}_{=1} + \varepsilon \cdot \partial_x v^\varepsilon(0) \cdot \underbrace{\eta(0)}_{=1} + \underbrace{\int \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta}_{\circledast} = 0.$$

Da die Randwerte Null sind, folgt für das letzte Integral:

$$\circledast = - \int v^\varepsilon \cdot \partial_x \eta = \int v^\varepsilon \overset{L^2}{\rightharpoonup} \int_0^1 \overline{v} = \omega.$$

Also ist
$$\varepsilon + \varepsilon \cdot \underbrace{\partial_x v^\varepsilon(0)}_{\leq 0} + \underbrace{\int v^\varepsilon}_{\leq 0} = 0.$$

Damit ist $|\omega| \longleftarrow |\int v^\varepsilon| \leq \varepsilon$, also $\omega = 0$.

Behauptung 3: Mit $\mu = -\delta_{\{1\}}$ gilt $\partial_x v^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}([0,1])$.

Beweis der Behauptung: Wegen $\partial_x v^\varepsilon \leq 0$ ist
$$\int_0^1 \partial_x v^\varepsilon = -1,$$
das heißt $\partial_x v^\varepsilon$ ist beschränkt in $L^1((0,1))$. Damit sind die zugehörigen Maße beschränkt (μ^ε mit $d\mu^\varepsilon = \partial_x v^\varepsilon \, d\mathcal{L}^1$ oder $\mu^\varepsilon(A) = \int_A d\mu^\varepsilon = \int_A \partial_x v^\varepsilon$).

Kompaktheit: Für eine Teilfolge gilt $\mu^\varepsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$ in $\mathcal{M}$. Wähle eine Testfunktion $\eta \in C^1([0,1])$. Dann ist
$$\underbrace{-\eta(1)}_{\text{Randterm}} - \underbrace{\int v^\varepsilon \cdot \partial_x \eta}_{v^\varepsilon \rightrightarrows 0 \; 0} = \int \partial_x v^\varepsilon \cdot \eta = \int \eta \, d\mu^\varepsilon \to \int \eta \, d\mu.$$

Also $\langle \mu, \eta \rangle = -\eta(1)$, das heißt $\mu = -\delta_{\{1\}}$.

Bemerkung (Der Exponent 1 ist die natürliche Wahl)**.** *Sei*
$$u : \mathbb{R} \to [0,1], u_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{x}{\varepsilon} & , 0 < x < \varepsilon \\ 1 & , x \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Dann ist
$$\partial_x u^\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & , x < \varepsilon \\ 0 & , x \geq \varepsilon. \end{cases}$$

Also ist
$$\int \partial_x u^\varepsilon = 1 \Rightarrow \|\partial_x u^\varepsilon\|_{L^1} \leq 0.$$

Für $p > 1$ ist somit
$$\int |\partial_x u^\varepsilon|^p) \int_0^\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^p = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^p} = \varepsilon^{1-p} \to \infty.$$

Insbesondere gilt $\|\partial_x u^\varepsilon\|_{L^p} \to \infty$.

Bemerkung (Skalieren)**.** *Wir hatten $-\varepsilon \cdot \partial_x^2 u^\varepsilon + u^\varepsilon = 1$, $u^\varepsilon(0) = 0$.*

Mit der neuen Koordinaten $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$ ein. Dann ist $v^\varepsilon(y) = u^\varepsilon(\sqrt{\varepsilon} \cdot y) = u^\varepsilon(x)$.

Dieses v^ε erfüllt das Anfangswertproblem
$$-\partial_y^2 v^\varepsilon(y) + v^\varepsilon(y) = 1, \qquad v^\varepsilon(0) = 0, .$$

Das ε kommt durch $\partial_y v^\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) = 0$ ins Spiel.

6.2. Young-Maße

Wir beginnen mit einem Beispiel in dem wir eine explizit gegebene Folge schnell oszillierender Funktionen u_k analysieren. Wir konstruieren $u_k : \Omega = [0,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (0,1)$. Setze

$$h(y) = \begin{cases} a & \text{für } y \in \mathbb{Z} + [0,\lambda) \\ b & \text{für } y \in \mathbb{Z} + [\lambda, 1) \end{cases}$$

und

$$u_k(x) := h(k\ x).$$

Die Folge u_k hat die folgenden Eigenschaften:

1. Die Folge u_k ist beschränkt in L^∞ und in L^p. Ohne Einschränkung (Wahl einer Teilfolge) gelte $u_k \rightharpoonup u$ in $L^p([0,1])$.

2. Die Folge u_k nimmt nur die Werte a und b an, und zwar a im Anteil λ aller Punkte und b im Anteil $1-\lambda$ aller Punkte.

3. Der schwache Limes erfüllt $u(x) = \lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b$ für fast alle x. Dies folgt leicht, indem man die Definition der schwachen Konvergenz ausnutzt.

Young-Maße werden deshalb eingeführt, weil der schwache Limes der Funktionenfolge uns wenig Information über die Funktionenfolge liefert. Lediglich die Information über Mittelwerte von u_k wird extrahiert (die mittlere Höhe von u_k ist $\lambda \cdot a + (1-\lambda) \cdot b$). Insbesondere können aus der Grenzfunktion die Zahlen a und b nicht rekonstruiert werden. Das Young-Maß wird diese Information enthalten. Das Young-Maß kodiert, welche Werte wie oft angenommen werden.

Für das angegebene Beispiel erhält man mit der Theorie der Young-Maße folgendes Ergebnis: Die Folge u_k erzeugt ein Young-Maß ν_x von der Form

$$\nu_x = \lambda\ \delta_{\{a\}} + (1-\lambda)\ \delta_{\{b\}}\,.$$

Dies ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß, es gibt die Verteilung der Werte von u_k an: Mit der Wahrscheinlichkeit λ finden wir den Wert a vor, mit der Wahrscheinlichkeit $1-\lambda$ den Wert b.

Um näher an die Definition des Young-Maßes zu kommen, kann man die Situation auch so beschreiben: Wir bestimmen für beliebige eine beliebige Funktion $f \in C_0(\mathbb{R})$ den Limes von

$$\int_\Omega f(u_k(x))\, dx\,.$$

Die Werte von f in den Punkten a und b können beliebig gewählt werden, zum Beispiel $f(a) = 1$ und $f(b) = 0$. Dann liefert uns der Limes des obigen Ausdrucks eine Information darüber, wie oft der Wert a angenommen wird.

Der Limes ist eine Funktion, die von der stetigen Funktion f abhängt. Wir werden schreiben

$$\int_\Omega f(u_k(x))\, dx \to \int_\Omega \int_\mathbb{R} f(p)\, d\nu_x(p)\, dx\,.$$

Im Falle der obigen Funktion erwarten wir

$$\int_\Omega f(u_k(x))\,dx \to \int_\Omega \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)\,dx\,,$$

also $\nu_x = \lambda\ \delta_{\{a\}} + (1-\lambda)\ \delta_{\{b\}}$ wie oben behauptet.

Wir wollen zusätzlich auch eine makroskopische x-Abhängigkeit auflösen. Wir erinnern an die bereits bewiesenen Beziehungen $(L^1)' = L^\infty$ und $(C_0(\mathbb{R}))' = \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Im Folgenden werden wir auch (ohne Beweis) die folgende Kombination verwenden: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))' = L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R})). \tag{6.1}$$

Zur Notation: Ein Element $f \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))$ ist eine Abbildung $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x,.) \in C_0(\mathbb{R})$, wobei $\int_\Omega \|f(x,.)\|_\infty\,dx < \infty$ erfüllt ist. Für $\nu \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}))$ ist, für fast alle x das Maß $\nu(x,.) = \nu_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Satz 6.1 (Definition und Existenz von Young-Maßen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar, $|\Omega| < \infty$. Eine Folge messbarer Funktionen $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ sei gegeben. Dann existiert eine Teilfolge $k \to \infty$ und ein $\nu \in L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R})$ (das von u_k erzeugte Young-Maß) mit folgenden Eigenschaften:*

1. *ν_x ist ein positives Maß auf $\mathbb{R}$ für fast alle $x \in \Omega$ und es gilt*

$$\|\nu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbb{R})} = \int_\mathbb{R} d\nu_x \le 1\,.$$

2. *Für alle $f \in C_0(\mathbb{R})$ und beliebiges $p \in [1,\infty)$ gilt: $f(u_k(.)) \rightharpoonup \bar f$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$, wobei die Grenzfunktion $\bar f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch*

$$\bar f(x) = \int_\mathbb{R} f(p)\,d\nu_x(p) = \int_\mathbb{R} f\,d\nu_x\,.$$

Beweis. Schritt 1. Wir identifizieren die Funktion u_k mit einem Dirac-Maß ν^k im Raum $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R})) = (L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R})))'$, also $\nu^k_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ für alle $x \in \Omega$. Die Identifikation geschieht vermöge

$$\nu^k_x := \delta_{\{u_k(x)\}}.$$

Mit dieser Wahl gilt $\|\nu^k_x\|_\mathcal{M} = 1$ für alle x, also auch $\|\nu^k\|_{L^\infty(\Omega,\mathcal{M})} \le 1$. Der Raum $X := L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))$ ist separabel (ohne Beweis), daher sind beschränkte Kugeln in X' schwach-$*$-folgenkompakt. Wir können schließen, dass ν^k hat eine Teilfolge besitzt und einen Limes ν, so dass $\nu^k \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ in $L^\infty(\Omega, \mathcal{M}(\mathbb{R}))$.

Behauptung: Das Maß ν hat die gewünschten Eigenschaften. Dabei ist die Nichtnegativität klar, die Unterhalbstetigkeit der Norm liefert auch $\|\nu\| \le 1$. Damit ist 1. bereits überprüft.

Schritt 2. Wir betrachten eine beliebige Testfunktion $f \in C_0(\mathbb{R})$. Zunächst stellen wir fest, dass die Folge $f(u_k(.))$ beschränkt ist und daher (nach Wahl einer Teilfolge) einen Grenzwert besitzt. Wir gehen zu der Teilfolge über und bezeichnen den Grenzwert mit $\bar f$, so dass $f(u_k(.)) \rightharpoonup \bar f$ in $L^p(\Omega)$.

Für eine Lokalisierungsfunktion $\varphi = \varphi(x)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ bilden wir die folgende Funktion auf $\Omega \times \mathbb{R}$:

$$(f \otimes \varphi)(x,p) := f(p) \cdot \varphi(x)\,.$$

Diese Funktion ist im Raum $f \otimes \varphi \in L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}))$. Daher gilt im Limes $k \to \infty$

$$\int_\Omega \overline{f}(x)\,\varphi(x)\,dx \longleftarrow \int_\Omega f(u^k(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \underbrace{\nu_x^k}_{=\delta_{\{u^k(x)\}}} (f(.)\,\varphi(x))\,dx$$

$$\overset{\text{Wirkung von}}{\underset{L^\infty\mathcal{M}\text{ auf }L^1C_0}{=}} \nu^k(f \otimes \varphi) \longrightarrow \nu(f \otimes \varphi) = \int_\Omega \int_\mathbb{R} f\,d\nu_x \cdot \varphi(x)\,dx.$$

Da φ beliebig war, gilt $\bar{f}(x) = \int_\mathbb{R} f\,d\nu_x$ für fast alle x. Da diese Grenzfunktion durch ν bestimmt ist, konvergiert die ursprüngliche Teilfolge und der Satz ist bewiesen. □

Satz 6.2 (Werte im Unendlichen)**.** *Die Situation sei wie in Satz 6.1. Dann gilt*

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \left|\left\{x \in \Omega : |u^k(x)| > M\right\}\right| = 0$$

genau dann, wenn $\|\nu_x\| = 1$ *für fast alle* $x \in \Omega$ *gilt.*

Beweis. Vorüberlegung: Für eine positive Zahl $M \in \mathbb{R}$ betrachten wir Testfunktionen $f_M \in C_0(\mathbb{R})$ mit Werten in $[0,1]$ und der Eigenschaft

$$f_M(p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |p| \le M \\ 0 & \text{falls } |p| \ge M+1 \end{cases}$$

Mit diesen Funktionen liefert der Ausdruck

$$\int_\Omega f_M(u^k(x))\,dx$$

eine Information über die Menge der Punkte x mit $|u^k(x)| \le M$. Weiterhin kennen wir den Limes des obigen Ausdrucks, denn nach Satz 6.1 gilt, für $k \to \infty$,

$$\int_\Omega f_M(u^k(x))\,dx \to \int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M\,d\nu_x\,dx\,.$$

Schritt 1. Wir zeigen hier, dass die Mengenabschätzung die Aussage über die Maßnorm liefert. Wir starten mit der Ungleichung

$$\int_\Omega f_M(u^k(x))\,dx \ge \left|\left\{x \in \Omega : u^k(x) \le M\right\}\right| = |\Omega| - \left|\left\{x \in \Omega : u^k(x) > M\right\}\right|\,.$$

Wir bilden den Limes Inferior über alle k und erhalten

$$\int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M\,d\nu_x\,dx \ge \liminf_{k\to\infty} \left(|\Omega| - \left|\left\{x \in \Omega : u^k(x) > M\right\}\right|\right)\,.$$

Nun bilden wir den Limes $M \to \infty$. Auf der rechten Seite entsteht nach Voraussetzung die Zahl $|\Omega|$, wir finden also

$$\lim_{M\to\infty} \int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M \, d\nu_x \, dx = |\Omega| \,.$$

Wegen $\int_\mathbb{R} f_M \, d\nu_x \leq 1$ für fast alle x erhalten wir

$$\lim_{M\to\infty} \int_\mathbb{R} f_M \, d\nu_x = 1$$

für fast alle x. Damit ist $\|\nu_x\| \geq 1$ gezeigt.

Schritt 2. Wir zeigen nun die umgekehrte Implikation. Wir starten wieder mit der Vorüberlegung, diesmal mit der Ungleichung

$$\int_\Omega f_M(u^k(x)) \, dx \leq \left|\left\{x \in \Omega : u^k(x) \leq M+1\right\}\right| \leq |\Omega| - \left|\left\{x \in \Omega : u^k(x) > M+1\right\}\right| \,.$$

Wir bilden den Limes inferior über alle k und erhalten

$$\int_\Omega \int_\mathbb{R} f_M \, d\nu_x \, dx \leq |\Omega| - \limsup_k \left|\left\{x \in \Omega : u^k(x) > M+1\right\}\right| \,.$$

Nun bilden wir den Limes $M \to \infty$. Wegen $\|\nu_x\|_\mathcal{M} = 1$ für fast alle x gilt $\int_\mathbb{R} f_M \, d\nu_x \to 1$ für fast alle x und daher (majorisierte Konvergenz) konvergiert die linke Seite gegen $|\Omega|$. Der Ausdruck auf der rechten Seite liefert die Behauptung über das Maß der Menge großer Werte. □

Korollar 6.3 (Young-Maß für L^1-beschränkte Folgen)**.** *Die Situation sei wie in Satz 6.1. Falls die Folge u^k beschränkt ist, also $\|u^k\|_{L^1(\Omega)} \leq C$, so gilt $\|\nu_x\| = 1$ für fast alle x.*

Beweis. Wir setzen $G_k := \{x \in \Omega | \; |u^k(x)| > M\}$. Dann gilt

$$M\,|G_k| \leq \int_{G_k} \left|u^k\right| \leq \int_\Omega \left|u^k\right| \leq C \,.$$

Es gilt also $\sup_k |G_k| \leq \frac{C}{M}$. In Konsequenz gilt $\lim_{M\to\infty} \sup_k |G_k| = 0$. Satz 6.2 ist anwendbar und liefert $\|\nu_x\| = 1$ für fast alle x. □

Ein Variationsproblem mit Mikroskala

Beispiel 6.4. *Wir betrachten das Energiefunktional*

$$I(u) := \int_0^1 |u|^2 + \left(1 - |\partial_x u|^2\right)^2$$

für $u : \Omega = (0,1) \to \mathbb{R}$. Dazu sei u^k eine Minimalfolge, das heißt $I(u^k) \to \inf(I)$.

Analyse des Funktionals. Die Integranden sind nicht-negativ, es gilt also $I \geq 0$. Für die Funktion $u \equiv 0$ gilt $\int |u|^2 = 0$ und $\partial_x u \equiv 0$, also $I(u) = 1$.

Wir betrachten eine Funktion, die aus einem Zacken besteht: Für $u = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ gilt $1 - |\partial_x u|^2 = 0$ und daher ist $I(u) < 1$. Insbesondere ist $u \equiv 0$ kein Minimierer von I.

Wir können eine Funktionenfolge u^m konstruieren, in der u^m viele (nämlich m) Zacken hat, alle mit Steigungen ± 1 und kleiner Höhe der Ordnung $O(1/m)$. Die Folge liefert $I(u^m) \to 0$, es gilt also $\inf(I) = 0$. Da für jedes u die Positivität $I(u) > 0$ gilt gibt es keinen Minimierer. Das Infimum ist kein Minimum.

Analyse der Minimalfolge. Wir betrachten nun eine Minimalfolge u^k mit $I(u^k) \to 0$. Aufgrund des ersten Integranden gilt $u^k \to 0$ in $L^2(\Omega)$, aufgrund des zweiten Integranden ist $\partial_x u^k$ beschränkt in $L^4(\Omega)$. In diesem Raum gilt schwache Konvergenz für eine Teilfolge, also $\partial_x u^k \rightharpoonup 0$ in $L^4(\Omega)$ (der Limes ist bestimmt, denn er muss mit dem Distributionslimes $\partial_x 0 = 0$ übereinstimmen).

Die Folge der Ableitungen $U_k := \partial_x u^k$ ist beschränkt in $L^4(\Omega)$. Also erzeugt U_k ein Young-Maß ν mit $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ für fast alle $x \in \Omega$.

Wir wählen nun als Testfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p \longmapsto (1 - |p|^2)^2$ (eigentlich eine abgeschnittene Version davon, damit $f \in C_0(\mathbb{R})$ erfüllt ist, aber wir wollen diesen technischen Punkt hier nicht vorführen). Weiterhin sei $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ eine beliebige Abschneidefunktion.

Nach Satz 6.1 gilt

$$0 \xleftarrow{L^1} \left(1 - \left|\partial_x u^k\right|^2\right)^2 = \left(1 - |U_k|^2\right)^2 = f(U_k) \overset{L^p}{\rightharpoonup} \overline{f}$$

für $\overline{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(p)\, d\nu_x(p)$. Damit erhalten wir

$$\int_{\mathbb{R}} f(p)\, d\nu_x(p) = 0$$

für fast alle x. Da f nur in ± 1 verschwindet, muss ν_x konzentriert sein auf der Menge $\{+1, -1\}$. Das Maß ν_x kann daher nur die Form haben:

$$\nu_x = \lambda(x) \cdot \delta_{\{+1\}} + \mu(x) \cdot \delta_{\{-1\}} \,.$$

Wegen $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ gilt $\mu(x) = 1 - \lambda(x)$, also

$$\nu_x = \lambda(x) \cdot \delta_{\{+1\}} + (1 - \lambda(x)) \cdot \delta_{\{-1\}} \,.$$

Wir wählen nun als Testfunktion $f(p) = p$ (im formal korrekten Beweis eine abgeschnittene Version davon). Dann ist

$$\overline{f} \leftharpoonup f(U_k) = U_k = \partial_x u^k \rightharpoonup 0$$

mit

$$\overline{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(p)\, d\nu_x(p) = \int_{\mathbb{R}} p\, d\nu_x(p) = 1 \cdot \lambda(x) + (-1) \cdot (1 - \lambda(x)) = 2 \cdot \lambda(x) - 1.$$

Insgesamt folgt also $\lambda(x) = \frac{1}{2}$ für fast alle x.

Ergebnis: Falls u^k also eine Folge ist mit $I(u^k) \to 0$, dann erzeugt $\partial_x u^k$ das Young-Maß

$$\nu_x = \frac{1}{2}\,\delta_{\{+1\}} + \frac{1}{2}\,\delta_{\{-1\}}.$$

Interpretation: Jede Minimialfolge muss die Eigenschaft haben, dass im Limes nur Ableitungen ± 1 vorkommen, und zwar auf der Hälfte des Gebietes $+1$ und auf der Hälfte des Gebietes -1.

Nachtrag zur Beschränktheit der Ableitungen in $L^4(\Omega)$: Für u mit beschränkter Energie $I(u)$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\|\partial_x u\|_{L^4}^4 - \frac{1}{2}\,c_0\,|\Omega| \le \frac{1}{2} \int \left(|\partial_x u|^4 - c_0\right) &\overset{!}{\le} \int \left(1 - |\partial_x u|^2\right)^2 \\ &\le \int |u|^2 + \left(1 - |\partial_x u|^2\right)^2 = I(u)\,, \end{aligned}$$

also die Beschränktheit in L^4. Zur Behauptung „!“: Es existiert ein c_0, so dass $\frac{1}{2} \cdot p^4 \le (1 - |p|^2)^2 + \frac{1}{2} c_0$ für alle $p \in \mathbb{R}$ gilt.

7. Feine Eigenschaften von Funktionen

7.1. Ableitungen von Maßen und Lebesgue-Punkte

Wir betrachten hier nur die Ableitung bezüglich des Lebesgue-Maßes $m := \mathcal{L}^n$. Ableitungen bezüglich anderer Maße können ganz analog untersucht werden.

Definition 7.1 (Dichte von Maßen bezüglich anderer Maße). *Sei μ ein signiertes Radon-Maß auf $\mathbb{R}^n$ und $m = \mathcal{L}^n$. Wir betrachten die Kugel $B_r(x)$ mit Radius $r > 0$ um $x \in \mathbb{R}^n$ und definieren*

$$(Q_r\mu)(x) := \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))} = \fint_{B_r(x)} d\mu = \frac{\int d\mu}{\int dm} \,.$$

Weiterhin setzen wir

$$(D\mu)(x) := \lim_{r\to 0}(Q_r\mu)(x) \,,$$

falls dieser Limes existiert.

Beispiel (Rekonstruktion einer stetigen Dichtefunktion). *Sei μ das Maß $d\mu = f\,dm$ für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, also $\mu(A) := \int_A f\,dm$. Dann gilt*

$$(Q_r\mu)(x) = \frac{\int_{B_r(x)} f}{\int_{B_r(x)} 1} = \fint_{B_r(x)} f \to f(x) \,,$$

und daher $(D\mu)(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Begründung: Für $y \in B_r(x)$ gilt $f(y) = f(x) + \psi(y)$ mit $\sup_{y\in B_r(x)} |\psi(y)| \overset{r\to 0}{\to} 0$. Daher

$$\fint_{B_r(x)} f(y)\,dy = \underbrace{\fint_{B_r(x)} f(x)\,dy}_{=f(x)} + \underbrace{\fint_{B_r(x)} \psi(y)\,dy}_{\to 0} \,.$$

Unser Ziel ist die folgende Aussage:

> Auch für $f \in L^1$ gilt für das Maß $d\mu = f\,dm$ die Aussage $(D\mu)(x) = f(x)$, zumindest für *fast* alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Die Implikation ist dann: Sei μ signiertes Radon-Maß, $m = \mathcal{L}^n$ das Lebesgue-Maß, und μ sei absolut stetig, also $\mu \ll m$. Nach dem Satz von Radon-Nikodym gilt $d\mu = f\,dm$ für ein $f \in L^1(m)$. Die Radon-Nikodym-Ableitung $f = \frac{d\mu}{dm}$ erfüllt also $f = \lim_{r\to 0} Q_r\mu = D\mu$ fast überall.

Zum Erreichen unseres Zieles benötigen wir die Maximalfunktion:

Definition 7.2 (Maximalfunktion). *Sei μ ein (positives) Borel-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Wir definieren*

$$M\mu \;:\; \mathbb{R}^n \to [0,\infty], \quad M\mu(x) := \sup_{r>0} Q_r\mu(x).$$

Die Funktion $M\mu$ heißt die Maximalfunktion zum Maß μ.

Für $f \in L^1$ und $d\mu = f\,dm$ setzen wir $Mf := M\mu$. Falls μ ein signiertes Radon-Maß ist, so setzen wir $M\mu := M|\mu|$.

Proposition 7.3. *Sei μ ein Borel-Maß. Dann ist $M\mu$ unterhalbstetig und insbesondere messbar.*

Beweis. Sei $\lambda > 0$ ein Wert und $E = E_\lambda := \{x | M\mu(x) > \lambda\}$. Unser Ziel ist, zu zeigen, dass E offen ist.

Sei dazu $x \in E$ ein beliebiger Punkt. Es existiert ein Radius $r > 0$, so dass $Q_r\mu(x) = \frac{\mu(B_r(x))}{m(B_r(x))} =: t > \lambda$. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass $(r+\delta)^n < r^n \cdot \frac{t}{\lambda}$ erfüllt ist.

Wir behaupten, dass $B_\delta(x) \subset E$. Sobald dies gezeigt ist, haben wir die Offenheit von E nachgewiesen. Für einen beliebigen Punkt $y \in B_\delta(x)$ gilt $B_r(x) \subset B_{r+\delta}(y)$. Also können wir rechnen:

$$\mu(B_{r+\delta}(y)) \geq \mu(B_r(x)) = t \cdot m(B_r(x)) = t \cdot \left(\frac{r}{r+\delta}\right)^n \cdot m(B_{r+\delta}(x)) > \lambda \cdot m(B_{r+\delta}(y)).$$

Wir schließen, dass $M\mu(y) > \lambda$ gilt, also $y \in E$. □

Beispiel. *Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion*

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-1,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$Mf(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (-1,0) \\ \frac{1}{2\cdot(x+1)} & \text{für } x \geq 0 \\ \frac{1}{2\cdot|x|} & \text{für } x \leq -1. \end{cases}$$

Das Beispiel zeigt insbesondere, dass die Funktion Mf im allgemeinen nur unterhalbstetig, aber nicht stetig ist.

Lemma 7.4 (Ein Überdeckungssatz). *Sei $W \subset \mathbb{R}^n$ überdeckt mit endlich vielen Kugeln, $W \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i}(x_i)$. Dann existiert eine Teilmenge $S \subset \{1,2,...,N\}$ der Indexmenge, so dass für diese Teilmenge S und die vergrößerten Kugeln $\hat{B}_j := B_{3r_j}(x_j)$ gilt:*

1. *$B_{r_i}(x_i) \cap B_{r_j}(x_j) = \emptyset$ für alle $i \neq j$, $i,j \in S$.*

2. *$W \subset \bigcup_{j\in S} \hat{B}_j$ und insbesondere*

$$m(W) \leq 3^n \sum_{j\in S} m(B_{r_j}(x_j))\,.$$

Die Aussage "insbesondere" folgt aus der Streckungseigenschaft des Lebesgue-Maßes aufgrund der Tatsache, dass die kleineren Kugeln disjunkt sind. Die vergrößerten Kugeln werden normalerweise nicht disjunkt sein.

Beweis. Wir können annehmen, dass die (endlich vielen) Radien angeordnet sind: $r_1 \geq r_2 \geq ... \geq r_N$. Wir wollen nun die Kugeln mit Überlapp aussortieren. Dazu setzen wir

$$\begin{aligned} j_1 &:= 1 \\ j_2 &:= \min\{j > j_1 | B_j \cap (B_{j_1}) = \emptyset\} \\ &\vdots \\ j_{k+1} &:= \min\{j > j_k | B_j \cap (B_{j_1} \cup ... \cup B_{j_k}) = \emptyset.\} \end{aligned}$$

Dieses Verfahren bricht ab, wenn keine dijunkte Kugel mehr gefunden wird. Das Verfahren endet auf jeden Fall nach endlich vielen Schritten, da die Anzahl $N < \infty$ endlich ist. Für die Indexmenge $S = \{j_1, j_2, ...\}$ ist die Disjunktheit aus Eigenschaft 1 nach Konstruktion erfüllt.

Für den Nachweis von Eigenschaft 2 sei $y \in W$ ein beliebiger Punkt. Da die kleinen Kugeln eine Überdeckung liefern, gilt $y \in B_{r_i}(x_i)$ für ein i. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Fall 1: $i = j_k$ für ein k. In diesem Fall gilt $y \in B_{r_i}(x_i) \subset \hat{B}_{j_k}$. Der Punkt y wird also wieder durch eine Kugel getroffen.
Fall 2: $i \neq j_k$ für alle k. Dann wurde die im Auswahlverfahren die Kugel B_i nicht ausgewählt; das bedeutet, dass $B_i \cap (B_{j_1} \cup ... \cup B_{j_k}) \neq \emptyset$ für alle $j_k < i$ gilt. Also gilt $B_i \cap B_j \neq \emptyset$ für ein $j = j_k < i$. Da der Radius der j-Kugel größer ist, $r_j \geq r_i$, umfasst die dreifache j-Kugel die i-Kugel, $\hat{B}_j \supset B_i = B_{r_i}(x_i) \ni y$.
In beiden Fällen gilt $y \in \bigcup_k \hat{B}_{j_k}$ und das Lemma ist bewiesen. □

Satz 7.5 (Abschätzung der Maximalfunktion)**.** *Sei μ ein signiertes Maß, $M\mu$ sei die Maximalfunktion, $\lambda > 0$ ein Parameter. Dann gilt*

$$m\left(\{x | M\mu(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda} 3^n \|\mu\|.$$

Auf der rechten Seite steht die Totalvariation von μ, $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R}^n)$.

Beweis. Die Menge $E := \{M\mu > \lambda\}$ ist offen nach Proposition 7.3. In der Menge E sei $K \subset E$ eine beliebige kompakte Teilmenge. Wir wollen das Volumen $|K|$ abschätzen.
Für alle $x \in K$ ist $M\mu(x) > \lambda$, also existiert ein Radius $r = r(x)$, so dass $|\mu|(B_r(x)) > \lambda \cdot m(B_r(x))$. Die $B_r(x)$ für $x \in K$ überdecken K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung $K \subset \bigcup_{i=1}^N B_{r_i}(x_i)$, $r_i = r(x_i)$.
Der Überdeckungssatz 7.4 liefert eine Teilmenge $S \subset \{1, 2, ..., N\}$, so dass

$$m(K) \leq 3^n \sum_{j \in S} m(B_{r_j}(x_j)) \leq 3^n \frac{1}{\lambda} \sum_{j \in S} |\mu| \underbrace{(B_{r_j})}_{\text{disjunkt}} \leq 3^n \frac{1}{\lambda} \|\mu\|.$$

Wegen der inneren Regulatitätseigenschaft von Radon-Maßen gilt $m(E) = \sup\{m(K) | K \subset E, K \text{ kompakt}\}$ und damit die Behauptung. □

Definition 7.6 (Schwach-L^1). *Für $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar schreiben wir $f \in$ weak-$L^1(\Omega)$, falls für ein $C > 0$ gilt*

$$|\{|f| > \lambda\}| \leq C\frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0\,.$$

Bemerkung. *1.) $f \in L^1 \Rightarrow f \in$ weak-L^1.*

Beweis: Sei $0 < \lambda$ beliebig. Dann gilt

$$|\{|f| > \lambda\}| = \int_{\{|f|>\lambda\}} 1 \leq \int_{\{|f|>\lambda\}} \frac{|f|}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega |f| = \frac{1}{\lambda}\|f\|_{L^1}\,.$$

2.) Der Raum weak-L^1 ist nicht identisch mit L^1.

Beweis: Auf $\Omega = (0,\infty)$ betrachten wir $f(x) = \frac{1}{x}$. Dann ist $f \notin L^1$. Aber es gilt $|(0, \frac{1}{\lambda})| = |\{f > \lambda\}| = \frac{1}{\lambda}$, also ist $f \in$ weak-L^1.

3.) Für $f \in L^1$ ist die Maximalfunktion Mf in weak-L^1.

Beweis: Satz 7.5. Als Konstante kann $C = 3^n\|f\|_{L^1}$ gewählt werden.

Definition 7.7 (Lebesgue-Punkte). *Sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann heißt $x \in \Omega$ ein schwacher Lebesgue-Punkt, falls*

$$\fint_{B_r(x)} f \to f(x) \text{ für } r \to 0.$$

Der Punkt x heißt Lebesgue-Punkt, falls

$$\fint_{B_r(x)} |f - f(x)| \to 0 \text{ für } r \to 0.$$

Einfache Übung: Jeder Lebesgue-Punkt ist ein schwacher Lebesgue-Punkt.

Der nachfolgende Satz ist einer der beiden zentralen Sätze dieses Abschnittes. Die Idee des Beweises ist wie folgt: Ist $\|f\|_{\text{weak}-L^1} \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ so ist $|\{|f| > \lambda\}| = 0$ für alle $\lambda > 0$. Dann ist $\{|f| > 0\} = \bigcup_{\lambda=\frac{1}{k}}\{|f| > \lambda\}$ eine Nullmenge, also $f = 0$ fast überall.

Satz 7.8 (Lebesgue-Punkte). *Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ gilt: Fast alle Punkte sind Lebesgue-Punkte.*

Beweis. Ohne Einschränkung sei $\Omega = \mathbb{R}^n$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Setze

$$(T_r f)(x) := \fint_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\,dy \quad \text{ und } \quad Tf(x) := \limsup_{r\to 0}(T_r f)(x).$$

Wir wollen zeigen: $Tf = 0$ fast überall. Sobald dies gezeigt ist, ist der Satz bewiesen.

Zu f und beliebigem $\varepsilon > 0$ finden wir eine Funktion $g \in C(\mathbb{R}^n)$, so dass die Differenz $h := f - g$ klein ist, $\|h\|_{L^1} \leq \varepsilon$ (Dichtheit stetiger Funktionen in L^1). Dann gilt auch

$$|T_r f(x)| = \left|\fint |g - g(x) + h - h(x)|\right| \leq |(T_r g)(x)| + |(T_r h)(x)|\,.$$

Wegen der Stetigkeit von g gilt $T_r g(x) \to 0$ für $r \to 0$. Also ist $Tf(x) \leq Th(x)$. Weiterhin ist nach Definition von T_r

$$|T_r h(x)| \leq |h(x)| + \left| \fint_{B_r(x)} h \right|,$$

also $Th(x) \leq |h|(x) + Mh(x)$.

Sei nun $\lambda > 0$ beliebig. Aufgrund der obigen Ungleichungen implizieren $|h(x)| \leq \lambda/2$ und $\left| \fint_{B_r(x)} h \right| \leq \lambda/2$ zusammen $|T_r h(x)| \leq \lambda$. Es gelten daher die Mengeninklusionen

$$\{|Tf| > \lambda\} \subset \{|Th| > \lambda\} \subset \left\{ |h| > \frac{\lambda}{2} \right\} \cup \left\{ Mh > \frac{\lambda}{2} \right\}.$$

Wir bilden das Maß der Menge und erhalten

$$\begin{aligned} \Big| \{|Tf| > \lambda\} \Big| &\leq \left| \left\{ |h| > \frac{1}{2}\lambda \right\} \right| + \left| \left\{ |Mh| > \frac{1}{2}\lambda \right\} \right| \\ &\leq \|h\|_{L^1} \frac{2}{\lambda} + 3^n \|h\|_{L^1} \frac{2}{\lambda} = C \frac{1}{\lambda} \|h\|_{L^1} = \frac{C\varepsilon}{\lambda} \end{aligned}$$

mit $C = 2(1 + 3^n)$. Wir können $\varepsilon > 0$ in Abhängigkeit von λ klein wählen. Wir schließen, dass für beliebiges $\lambda > 0$ die Menge $\{|Tf| > \lambda\}$ ein verschwindendes Maß haben muss. Also gilt $Tf = 0$ fast überall. □

Bemerkung (Nachtrag betreffend nur lokale Integrierbarkeit und beschränkte Mengen)**.** *Für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ (nur lokal integrierbar) gilt $f\mathbf{1}_{B_R(0)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Unser Beweis zeigt, dass fast alle Punkte in $B_R(0)$ Lebesgue-Punkte für f sind. Indem wir die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{R \in \mathbb{N}}$ bilden, finden wir, dass fast alle Punkte des $\mathbb{R}^n$ Lebesgue-Punkte sind.*

Beispiel. *Sei $f = \mathbf{1}_{(0,\infty)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann sind alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Lebesgue-Punkte.*

Korollar 7.9. *Sei $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Dann erfüllen fast alle $x \in \Omega$*

$$\fint_{B_r(x)} |f - f(x)|^p \overset{r \to 0}{\to} 0.$$

Beweis. Behauptung: Für alle x und alle $t > s \geq 0$ gilt $|t - s|^p \leq t^p - s^p$.

Beweis der Behauptung: Für $t = s$ stimmt die Behauptung. Für $t > s$ ist

$$\partial_t[|t - s|^p] = p \cdot (t - s)^{p-1} \leq p \cdot t^{p-1} = \partial_t[t^p - s^p].$$

Wir betrachten nun die Funktion $g := |f|^p$ von der Klasse $g \in L^1$. Nach unserem Satz sind fast alle $x \in \Omega$ Lebesgue-Punkte von g. Sei nun x ein Lebesgue-Punkt von g. Dann gilt

$$\fint_{B_r(x)} |f - f(x)|^p \overset{\text{Beh}}{\leq} \fint_{B_r(x)} \big| |f|^p - |f(x)|^p \big| = \fint_{B_r(x)} |g - g(x)| \to 0.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Wir wollen abschließend nochmals die Anwendung unseres Satzes über Lebesgue-Punkte auf Maße erwähnen: Sei $\mu << m$ absolut stetig bezüglich des Lebesgue Maßes. Dann gilt $d\mu = f\, dm$ für ein $f \in L^1$ nach dem Satz von Radon-Nikodym. Fast jeder Punkt x ist Lebesgue-Punkt von f. In diesen Punkten gilt nach Definition von $D\mu$ die Relation $D\mu = f$.

Man überlege sich für Maße μ mit singulärem Anteil die folgenden Aussagen: Es sei $d\mu = f\ dm + d\nu$ mit $f\ dm \ll dm$ und $d\nu \perp dm$. Dann gilt trotzdem $D\mu(x) = f(x)$ für m-fast alle x. Weiterhin, falls $\nu \geq 0$, so ist $D\mu(x) = \infty$ für ν-fast alle x.

7.2. Punktweises Differenzieren von Funktionen

Wir betrachten Sobolevfunktionen $f \in W^{1,p}$. Wir erinnern, was dies bedeutet: Für alle Richtungen $i = 1, ..., n$ ist die Distributionsableitung $\partial_i f$ von der Klasse $\partial_i f \in L^p$. Genauer bedeutet dies, dass ein $g_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $g_i = \partial_i f$ im Distributionssinn, also, für alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$-\int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \partial_i \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} g_i \cdot \varphi.$$

Unsere Frage: Gilt dann für $x \in \Omega$ der Grenzübergang

$$\frac{f(x + h\, e_i) - f(x)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \partial_i f(x),$$

zumindest für fast alle x? Unser Ziel ist der Beweis des Rademacher Theorems, wonach dies gilt, falls $p = \infty$. Wir werden sehen, dass sogar $p > n$ ausreicht.

Idee des Beweises: Der Grenzübergang ist möglich in den Lebesgue-Punkten von ∇f.

Wir benutzen den Satz von Morrey (eine der Sobolev-Einbettungen), wonach gilt:

$$W^{1,p} \hookrightarrow C^{0,\alpha} \text{ für } p > n,\ \alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0\,.$$

Es existiert also eine stetige Einbettung des linken Raumes in den rechten. Die Zahl $k - \frac{n}{p}$ wird als Sobolev-Index von $W^{k,p}$ bezeichnet. Sie entspricht der (gebrochenen) Differenzierbarkeitsordnung der Funktion. Wir wollen erinnern, dass die C^α-Norm die Summe aus dem C^α-typischen Term ist (wie im Satz unten) und der Supremumsnorm. Ähnlich ist die $W^{1,p}$-Norm die Summe aus der L^p-Norm des Gradienten (wie im Satz unten) und der L^p-Norm der Funktion. Normalerweise lassen sich (zumindest in beschränkten Gebieten) diese "Normen niedrigerer Ordnung" leicht kontrollieren. Insofern ist die folgende Abschätzung die zentrale Aussage der Morrey-Einbettung.

Satz (Morrey)**.** *Sei $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Dann hat f einen stetigen Repräsentanten und es gilt*

$$|f(x) - f(y)| \leq Cr^\alpha \left(\int_{B_{2r}(x)} |\nabla f|^p \right)^{\frac{1}{p}} = Cr^\alpha \|\nabla u\|_{L^p(B_{2r}(x))}$$

für alle $y \in B_r(x)$. Dabei ist $\nabla f = (\partial_1 f, ..., \partial_n f)$ der distributionelle Gradient und die Konstante $C > 0$ hängt nicht von f ab.

Satz 7.10 (Satz von Morrey im 1-dimensionalen Raum)**.** *Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $p > 1$. Dies bedeutet, dass die distributionelle Ableitung*

$$\langle \partial_x u \rangle(\varphi) = -\int_a^b u \cdot \partial_x \varphi$$

für alle $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ dargestellt werden kann mit einem $v \in L^p(\Omega)$, dass also $\langle \partial_x u \rangle(\varphi) = \int_a^b v \cdot \varphi$ für alle $\varphi \in C_c^1(\Omega)$. Dann hat u einen stetigen Repräsentanten mit

$$|u(x) - u(y)| \leq C r^{(p-1)/p} \|\nabla u\|_{L^p(B_{2r}(x))}$$

für alle $y \in B_r(x)$.

Beweis des eindimensionalen Satzes. Wie im n-dimensionalen setzen wir $\alpha = 1 - \frac{1}{p}$.

Schritt 1. Abschätzung für glatte Funktionen. Sei $u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Für $x, y \in \Omega = (a,b)$ ist

$$\begin{aligned}
|u(y) - u(x)| &= \left| \int_x^y \partial_x u(t)\, dt \right| && \text{(ohne Einschränkung sei } y > x\text{)} \\
&\leq \left(\int_x^y |\partial_x u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_x^y 1^q \right)^{\frac{1}{q}} && \text{(Hölderungleichung mit } \partial_x u \in L^p,\ q = \frac{p}{p-1}\text{)} \\
&\leq \left(\int_{B_r(x)} |\partial_x u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot r^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Die Morrey-Abschätzung gilt also mit $C = 1$.

Schritt 2. Jedes $u \in W^{1,p}$ hat einen stetigen Repräsentanten, für diesen gilt die Abschätzung für alle x, y. Wir verwenden $u_\varepsilon(x) := u * \Phi_\varepsilon$ für eine Folge $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$. Aus der Theorie der Sobolevräume ist bekannt, dass u_ε stark gegen u konvergiert. Insbesondere gilt für eine geeignete Folge $\varepsilon_k \to 0$

1. $u_\varepsilon \to u$ in $W^{1,p}$,

2. Für fast alle x gilt $u_\varepsilon(x) \to u(x)$.

Insbesondere ist u_ε eine Cauchy-Folge in $W^{1,p}$, es gilt $\|u_\varepsilon - u_\delta\|_{W^{1,p}} \to 0$ für $\varepsilon, \delta \to 0$. Sei $x_0 \in \Omega$ ein Punkt mit $u_\varepsilon(x_0) \to u(x_0)$. Unsere Abschätzung liefert

$$|(u_\varepsilon - u_\delta)(y) - \underbrace{(u_\varepsilon - u_\delta)(x_0)}_{\to 0}| \leq C r^\alpha \underbrace{\|u_\varepsilon - u_\delta\|_{W^{1,p}}}_{\to 0}.$$

Wir schließen, dass $u_\varepsilon(y)$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist; für alle y existiert ein $\tilde{u}(y)$, so dass $u_\varepsilon(y) \to \tilde{u}(y)$ für $\varepsilon \to 0$. Wegen der Konvergenz $u_\varepsilon \to u$ punktweise fast überall gilt $\tilde{u} = u$ fast überall.

Nun verwenden wir nochmals die Abschätzung.

$$|\underbrace{u_\varepsilon(y)}_{\to \tilde{u}(y)} - \underbrace{u_\varepsilon(x)}_{\to \tilde{u}(x)}| \leq C r^\alpha \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^p}$$

für alle x, y, also auch

$$|\tilde{u}(y) - \tilde{u}(x)| \leq C r^\alpha \|\nabla u\|_{L^p}$$

für alle x, y. Insbesondere ist $\tilde{u}$ stetig. $\square$

Hinweis: Nur in der Abschätzung (Schritt 1) wurde $n = 1$ ausgenutzt.

Definition 7.11 ($C^{0,1}$-Funktionen und $W^{1,\infty}$-Funktionen)**.** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir erinnern an zwei Definitionen.*

1. *u ist Lipschitzstetig $:\Longleftrightarrow u \in C^{0,1}(\Omega) :\Longleftrightarrow$ es existiert ein $C > 0$ (die Lipschitz-Konstante, $C = \|u\|_{\mathrm{Lip}}$), so dass*

$$|u(y) - u(x)| \le C\,|y - x| \quad \forall x, y \in \Omega.$$

2. *$u \in W^{1,\infty}(\Omega) :\Longleftrightarrow u \in L^\infty(\Omega)$ und es existiert $\nabla u \in L^\infty(\Omega)$ mit*

$$-\int_\Omega u \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega (\nabla u) \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

Satz 7.12 ($C^{0,1}$-Funktionen und $W^{1,\infty}$-Funktionen)**.** *Es gilt*

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) = C^{0,1}(\mathbb{R}^n).$$

Genauer gilt: $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Umgekehrt existiert für jedes $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ ein Repräsentant $\tilde{u}$ mit $\tilde{u} \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$.

Bemerkung. *$C^{0,1} \hookrightarrow W^{1,\infty}$ ist erstaunlich, da die Definition von $C^{0,1}$ keine Forderung an die Ableitungen stellt. Umgekehrt ist $W^{1,\infty} \hookrightarrow C^{0,1}$ formal die Morrey-Einbettung mit $p = \infty$.*

Beweis. Schritt 1. Die Einbettung $W^{1,\infty} \hookrightarrow C^{0,1}$.

Sei $u \in W^{1,\infty}$ mit Distributionsgradient $\nabla u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Auf jeder beschränkten Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist die Funktion $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega)$ für jedes $p \ge 1$. Wir wählen ein $p > n$ und schließen aus der Morrey-Einbettung, dass u einen stetigen Repräsentanten hat (den wir mit u bezeichnen) und dass dieser Lipschitz-stetig ist.

Weiterhin erfüllen die regularisierten Funktionen

$$u_\varepsilon := u * \Phi_\varepsilon \to u$$

im Raum $W^{1,p}(\Omega)$, also auch in $C^\alpha(\Omega)$ für $\alpha = 1 - n/p$, insbesondere punktweise. Wir bemerken außerdem

$$\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\infty} = \|\nabla u * \Phi_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \|\nabla u\|_{L^\infty}\,,$$

weil Glättungen Konvexkombinationen von Werten benutzen. Beide Informationen zusammen liefern (wir nutzen aus, dass u_ε klassisch differenzierbar ist)

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x)| \xleftarrow[\varepsilon \to 0]{} |u_\varepsilon(y) - u_\varepsilon(x)| &= \left| \int_0^1 \underbrace{\nabla u_\varepsilon(x + t \cdot (y - x))}_{\le \|\nabla u\|_{L^\infty}} \cdot (y - x)\, dt \right| \\ &\le \|\nabla u\|_{L^\infty} \cdot |y - x|. \end{aligned}$$

Der Repräsentant u ist also Lipschitzstetig.

Schritt 2. Die Einbettung $C^{0,1} \hookrightarrow W^{1,\infty}$.

Sei $u \in C^{0,1}(\mathbb{R}^n)$ Lipschitzstetig. Wir müssen die Distributionsableitung von u untersuchen. Sei dazu $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
-\partial_i\langle u\rangle(\varphi) &\overset{\text{Def.}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \partial_i \varphi \\
&= \lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \cdot \frac{\varphi(x+he_i) - \varphi(x)}{h}\, dx \\
&= \lim_{h\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{u(x-he_i) - u(x)}{h}}_{|\ldots| \le \|u\|_{\mathrm{Lip}}} \cdot \varphi(x)\, dx\,.
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir im letzten Schritt eine Variablentransformation $y = x + h \cdot e_i$ verwendet. Die Distributionsableitung erfüllt daher

$$
|\langle \partial_i u\rangle(\varphi)| \le \|u\|_{\mathrm{Lip}} \cdot \|\varphi\|_{L^1}\,.
$$

Wir schließen, dass $\partial_i u \in (L^1(\mathbb{R}^n))'$ (das Funktional kann erweitert werden zu einem stetigen Funktional auf L^1). Nach Satz 4.12 kann das Funktional dargestellt werden mit einer Funktion in L^∞, es gilt $\partial_i u \in L^\infty$. Genauer: es existiert ein $v_i \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, so dass

$$
-\int_{\mathbb{R}^n} u \cdot \partial_i \varphi =: \partial_i\langle u\rangle(\varphi) = \int v_i \cdot \varphi
$$

für alle φ. Dies ist aber aber gerade die Bedingung für $u \in W^{1,\infty}$. □

Bemerkung. *Der Satz gilt lokal:* $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega) = C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Für beschränkte Lipschitz-Gebiete* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *gilt auch* $W^{1,\infty}(\Omega) = C^{0,1}(\Omega)$ *und die Normen können gegeneinander abgeschätzt werden.*

Satz 7.13 ($W^{1,p}$-Funktionen sind differenzierbar)**.** *Sei* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ *mit* $p > n$. *Dann gilt für den stetigen Repräsentanten von* u *und für fast alle* x:

$$
|u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x)| = \mathbf{o}(|y-x|)
$$

für $y \to x$. *Dies bedeutet, dass* u *klassisch differenzierbar ist in* x *mit Ableitung* $\nabla u(x)$.

Beweis. Die Morrey Einbettung 7.2 liefert einen Repräsentanten $u \in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ für $\alpha = 1 - \frac{n}{p} > 0$. Wegen $\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ können wir die Aussage über Lebesgue-Punkte aus Satz 7.8 (beziehungsweise Korollar 7.9) verwenden: Für fast alle x gilt

$$
⨍_{B_r(x)} |\nabla u - \nabla u(x)|^p \to 0 \text{ für } r \to 0.
$$

Sei x so ein Punkt. Setze $v(y) := u(y) - u(x) - \nabla u(x) \cdot (y - x)$. Zu zeigen ist $|v(y)| = \mathbf{o}(|y - x|)$. Wir verwenden nacheinander (a) die Morrey-Abschätzung (b) die Definition von Mittelwerten (c) Einsetzen von ∇v (d) die Aussage für Lebesgue-Punkte von oben.

Die Konstante C variiert von Zeile zu Zeile.

$$\begin{aligned}
|v(y)| &\leq |v(y) - v(x)| \leq Cr^{\alpha} \cdot \left(\int_{B_{2r}(x)} |\nabla v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= Cr^{1-\frac{n}{p}} \cdot r^{\frac{n}{p}} \left(\fint_{B_{2r}(x)} |\nabla v|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= Cr^1 \left(\fint_{B_{2r}} |\nabla u - \nabla u(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \mathbf{o}(r).
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz gezeigt. $\square$

Als Korollar erhalten wir den Satz von Rademacher.

Satz 7.14 (Rademacher)**.** *Lipschitzfunktionen sind fast überall differenzierbar.*

Beweis. $C^{0,1}_{\text{loc}} = W^{1,\infty}_{\text{loc}} \hookrightarrow W^{1,p}_{\text{loc}}$. $\square$

Bemerkung. *Wir weisen auf Folgendes hin. Eine Funktion kann gleichzeitig fast überall differenzierbar sein und auch distributionell differenzierbar. Die beiden Ableitungen müssen allerdings nicht übereinstimmen.*

Ein Beispiel ist die charakteristische Funktion eines Intervalles, deren Ableitung fast überall existiert und verschwindet, während die distributionelle Ableitung aus zwei Dirac-Maßen unterschiedlichen Vorzeichens besteht.

8. Hausdorff-Maße

Motivation: Wir wollen niederdimensionale Maße auf $\mathbb{R}^n$ definieren. Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ und $s \in [0, n]$ soll gelten:

$$0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \text{ ist eine } s\text{-dimensionale Menge in } \mathbb{R}^n.$$

Für $s \notin \mathbb{N}$ ist dabei zunächst nicht klar, was mit der Dimension gemeint ist, wir werden sie mit dem Hausdorff-Maß definieren. Unser Ziel muss sein: Es gilt die Identität $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$ für $A \subset \mathbb{R}^n$.

8.1. Definition und elementare Eigenschaften

Wir beginnen mit der Definition für ganzzahlige Dimension s.

Definition 8.1 (Hausdorff-Maß)**.** *Sei $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s \in \mathbb{N}$ und $0 < \delta \leq \infty$. Setze*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \middle| A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta \right\}.$$

Hierbei ist ω_s das Volumen der s-dimensionalen Einheitskugel, also $\omega_s = \mathcal{L}^s(B_1(0))$. Weiterhin können wir wegen $\mathcal{H}^s_{\delta_1}(A) \geq \mathcal{H}^s_{\delta_2}(A)$ für $\delta_1 \leq \delta_2$ setzen:

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

Die Abbildung $\mathcal{H}^s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ heißt das s-dimensionale Hausdorff-Maß auf $\mathbb{R}^n$.

Wir beginnen mit einigen elementaren Beispielen.

Punktmenge in $\mathbb{R}^1$. Sei $s = 1$ und $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Dann gilt $\mathcal{H}^1(A) = 0$. Beweis: Es genügt, $C_j = \{j\}$ zu wählen. Das Beispiel zeigt, dass man abzählbare Vereinigungen in der Definition von $\mathcal{H}^s_\delta$ verwenden sollte.

Strecke in $\mathbb{R}^1$. Sei $s = 1$ und $A = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Dann ist

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_j \operatorname{diam}(C_j) \middle| A \subset \bigcup_j C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta \right\}.$$

Wir unterteilen A in N abgeschlossene Teilintervalle I_j mit $|I_j| = \delta$. Dies ist mit $N \leq \frac{1}{\delta} + 1$ Intervallen möglich. Es gilt daher

$$\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq \sum_{j=1}^{N} |I_j| = N \cdot \delta \leq \left(\frac{1}{\delta} + 1 \right) \cdot \delta \to 1.$$

Also gilt $\mathcal{H}^1(A) \leq 1$. Man kann auch zeigen, dass es keine bessere Überdeckung gibt; dies liefert $\mathcal{H}^1(A) = 1$.

Strecke in $\mathbb{R}^2$. Sei $s = 1$ und $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Strecke im $\mathbb{R}^2$. Überdecke A mit δ-Kugeln wie zuvor: $A \subset \bigcup_{j=1}^N B_j^\delta(x_j)$, $N \sim \frac{1}{\delta}$. Damit ist $\mathcal{H}^1_\delta(A) \leq 1 + \mathbf{O}(\delta)$. Wieder gilt $\mathcal{H}^1(A) \leq 1$. "Die Dimension der Umgebung wird nicht gesehen!"

Eindimensionales Maß einer Fläche. Sei $A = [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Will man A mit Mengen vom Diameter δ überdecken, so benötigt man $O(\delta^{-2})$ solche Mengen. Daher ist das eindimensionale Maß $\mathcal{H}^1_\delta(A) \sim \delta\,\delta^{-2} = \delta^{-1}$. Der Limes $\delta \to 0$ liefert $\mathcal{H}^1(A) = \infty$, das eindimensionale Maß einer zweidimensionalen Menge ist unendlich.

Halbkreisbogen in $\mathbb{R}^2$. Sei $s = 1$ und $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0,\ x^2 + y^2 = 1\}$. Setze $x_k := e^{i\delta k\pi}$ für $k = 0, 1, ..., N$, $N = \mathbf{O}(\frac{1}{\delta})$. Die Mengen C_k sollen jeweils das Bogenstück zwischen x_k und x_{k+1} überdecken. Dann gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{diam}(C_k) &= |x_{k+1} - x_k| = \underbrace{\left|e^{i\delta k\pi}\right|}_{=1} \cdot \left|e^{i\delta\pi} - 1\right| \stackrel{\text{Taylor}}{=} \left|i\delta\pi + \frac{(i\delta\pi)^2}{2} + ...\right| \\ &= \sqrt{(\pi\delta)^2 + \frac{(\delta\pi)^4}{4}} + \mathbf{o}(\delta) = \pi\delta + \mathbf{o}(\delta)\,. \end{aligned}$$

Wir schließen

$$\sum_{k=1}^N \operatorname{diam}(C_k) = \frac{1}{\delta} \cdot \pi\delta + \mathbf{o}(1) \to \pi.$$

Hausdorff-Maße und Funktionale. Sei $\mu_1 = \mathcal{H}^1 \lfloor S^1$, das heißt $\mu_1(A) = \mathcal{H}^1(A \cap S^1)$. Dann ist $\mu_1 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2) = C_0(\mathbb{R}^2)'$. Das zugehörige lineare Funktional auf stetigen Funktionen ist $L_{\mu_1} : C_0(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$,

$$L\mu_1(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\, d\mu_1 = \int_{S^1} \varphi\, d\mathcal{H}^1 = \int_{S^1} \varphi\, dS.$$

Sei $\mu_r = \mathcal{H}^1 \lfloor \partial B_r(0)$. Dann gilt $\mu_r \stackrel{*}{\rightharpoonup} \mu_1$ für $r \to 1$, da

$$\mu_r(\varphi) = \int_{\partial B_r(0)} \varphi\, d\mathcal{H}^1 \to \int_{\partial B_1(0)} \varphi\, d\mathcal{H}^1 = \mu_1(\varphi)$$

für alle $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^2)$ gilt.

Interpretation: $\partial B_r(0)$ konvergiert gegen $\partial B_1(0)$ im Sinne der zugehörigen Maße.

Eine partielle Differentialgleichung

Wir betrachten ein niederdimensionales Objekt, die eindimensionale Linie $\Gamma := \mathbb{R} \times \{0\}$ in $\mathbb{R}^2$. Zu einer glatten Gewichtsfunktion $\lambda : \Gamma \to \mathbb{R}$ definieren wir das Maß $\mu = \lambda\, \mathcal{H}^1 \lfloor \Gamma$, also

$$\int_{\mathbb{R}^2} \varphi\, d\mu = \int_\Gamma \lambda(x)\varphi(x)\, d\mathcal{H}^1(x).$$

Nun wollen wir eine partielle Differentialgleichung betrachten, in der die rechte Seite ein Maß ist, nämlich

$$\Delta u = \mu \,. \tag{8.1}$$

Diese Gleichung ist im Distributionssinn zu verstehen und identisch zu

$$\int_{\mathbb{R}^2} u \cdot \Delta\varphi = \int_\Gamma \lambda \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2).$$

Wir wollen nun erarbeiten, was die Gleichung in klassischer Schreibweise fordert. Sei dazu $n = (0,1)^\top$ der Normalenvektor von Γ. Wir nehmen an, dass die Lösung u glatt genug ist, so dass alle vorkommenden Ausdrücke wohldefiniert sind.

Testfunktionen mit $\operatorname{supp}(\varphi) \cap \Gamma = \emptyset$ liefern $\Delta u = 0$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$.

Allgemeine Testfunktionen φ liefern

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \lambda \cdot \varphi &= -\int_{\mathbb{R}^2\setminus\Gamma} \nabla u \cdot \nabla\varphi + \int_\Gamma \underbrace{(u\ \nabla\varphi \cdot n|_+ - u\ \nabla\varphi \cdot n|_-)}_{=\nabla\varphi\cdot n\cdot[u]} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\Gamma} \Delta u\ \varphi - \int_\Gamma \underbrace{[\nabla u \cdot n]}_{:=\nabla u\cdot n|_+ - \nabla u\cdot n|_-} \varphi + \int_\Gamma [u]\ \nabla\varphi \cdot n.
\end{aligned}$$

mit $[u] := u_+ - u_-$. Das erste Integral verschwindet. In den anderen Integralen können φ und $\partial_n\varphi$ unabhängig voneinander variiert werden. Also ist die PDE (8.1) äquivalent zu

$$\begin{cases} \Delta u &= 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \\ [\nabla u \cdot \varphi] &= -\lambda & \text{auf } \Gamma \\ [u] &= 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

Die physikalische Interpretation ist eine singuläre Quelle auf Γ, die einen Sprung in der Flussrate bewirkt.

Gebrochenes Hausdorff-Maß

Wir wollen nun Definition 8.1 auf nicht ganzzahlige Dimensionen erweitern. Dazu sei $0 \le s \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir ersetzen lediglich in Definition 8.1 die Zahl $\omega_s = \mathcal{L}^s(B_1(0))$ durch

$$\alpha(s) := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\,,$$

wobei $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^{s-1}\,dx$ für $0 < s < \infty$ die Gamma-Funktion ist. Insbesondere gilt $\alpha(n) = \omega_n$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass wir für ganzzahlige Dimension die alte Definition wiederfinden.

Satz 8.2 (Das Hausdorff-Maß ist ein Borel-Maß)**.** *$\mathcal{H}^s$ ist ein Borel-Maß. Genauer gilt: $\mathcal{H}^s$ ist ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$ und die Borel-Mengen sind messbar. Es gilt die Regularität, dass zu jedem $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel-Menge $B \supset A$ existiert mit $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$.*

Der Satz liefert, dass $\mathcal{H}^s$ ein Borel-Maß ist. Allerdings ist $\mathcal{H}^s$ (für $s < n$) kein Radon-Maß.

Erinnerung. *Wir erinnern an Definition 3.1 von Radon-Maßen: Borel-Maße sind Radon-Maße, falls die Bedingungen (R1)-(R3) erfüllt sind.*

Weiterhin erinnern wir an Korollar 3.6: Positive Borel-Maße μ auf $\mathbb{R}^n$ mit $\mu(K) < \infty$ für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ (Eigenschaft (R3)) sind Radon-Maße.

Wir hatten oben ein Beispiel mit $n = 2$ und $s = 1$. Das Rechteck $Q := [0,1] \times [0,1]$ erfüllt $\mathcal{H}^1(Q) = \infty$. Tatsächlich: Um den Quader Q mit Quadraten C_j der Seitenlänge δ zu überdecken, benötigt man die Anzahl $N \sim \left(\frac{1}{\delta}\right)^2$. Für diese Überdeckung gilt

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{diam}(C_j) \sim N \cdot \delta \sim \frac{1}{\delta} \overset{\delta \to 0}{\to} \infty\,.$$

Da keine wesentlich bessere Überdeckung möglich ist, gilt $\mathcal{H}^1(Q) = \infty$.

Die kompakte Menge $Q \subset \mathbb{R}^2$ beweist, dass das Maß $\mathcal{H}^1$ die Bedingung (R3) nicht erfüllt. Daher ist $\mathcal{H}^1$ kein Radon-Maß auf $\mathbb{R}^2$.

Auch Bedingung (R2) ist durch $\mathcal{H}^1$ auf $\mathbb{R}^2$ nicht erfüllt: Für das Intervall $M = [0,1] \times \{0\}$ ist das Maß jeder offenen Umgebung unendlich, obwohl das Maß von M endlich ist.

Beweis von Satz 8.2. Schritt 1. $\mathcal{H}^s$ ist ein äußeres Maß. Wir müssen die drei Eigenschaften (A1)–(A3) aus Definition 1.5 von äußeren Maßen überprüfen. Die Abbildungseigenschaften (A1) und die Monotonie (A2) sind per Definition erfüllt. Es bleibt die Subadditivität (A3) zu zeigen.

Sei dazu $\{A_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Familie von Mengen, wir wollen das Maß der Vereinigung der A_k studieren. Für jede der Mengen A_k wählen wir eine Überdeckung wie in der Definition des Hausdorff-Maßes, $A_k \subset \bigcup_{j=1}^\infty C_j^k$ mit $\operatorname{diam}(C_j^k) \le \delta$. Für eine Fehlervorgabe $\varepsilon > 0$ wählen wir die Mengen $(C_j^k)_j$ so gut, dass das Hausdorff-Maß von A_k bis auf einen Fehler $\varepsilon 2^{-k}$ realisiert wird.

Die Vereinigung über alle j und alle k überdeckt dann die Vereinigung der A_k, die Familie $\left\{C_j^k\right\}_{j,k=1}^\infty$ überdeckt $\bigcup_{k=1}^\infty A_k$. Also gilt auch

$$\mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \le \sum_{k=1}^\infty \sum_{j=1}^\infty \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j^k)}{2}\right)^s \le \sum_{k=1}^\infty \left[\mathcal{H}_\delta^s(A_k) + \varepsilon 2^{-k}\right] = \varepsilon + \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}_\delta^s(A_k)\,.$$

Da ε beliebig war, erlaubt dies weiterhin auch eine Abschätzung des Hausdorff-Maßes:

$$\mathcal{H}^s\left(\bigcup_k A_k\right) \underset{\delta \to 0}{\longleftarrow} \mathcal{H}_\delta^s\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}_\delta^s(A_k) \le \sum_{k=1}^\infty \mathcal{H}^s(A_k).$$

Dies zeigt die Subadditivität von $\mathcal{H}^s$.

Schritt 2. $\mathcal{H}^s$ ist Borel-Maß. Wir zeigen diese Eigenschaft mit dem Caratheodory-Kriterium aus Proposition 3.3. Seien dazu $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{dist}(A,B) > 0$. Zu zeigen ist

$$\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B).$$

Wir wählen zunächst $\delta > 0$ mit $\delta < \frac{1}{4}\operatorname{dist}(A,B)$. Sei nun dazu eine beliebige Überdeckung von $A \cup B$ gegeben durch $A \cup B \subset \bigcup_k C_k$ mit $\operatorname{diam}(C_k) \le \delta$.

Zu $(C_j)_j$ definieren wir nun Indexmengen, die jeden Index j entweder der Menge A oder der Menge B zuordnen: $\mathcal{A} := \{j | C_j \cap A \neq \emptyset\}$, $\mathcal{B} := \{j | C_j \cap B \neq \emptyset\}$. Damit gilt $A \subset \bigcup_{j \in \mathcal{A}}$ und $B \subset \bigcup_{i \in \mathcal{B}} C_i$. Nach Konstruktion ist $C_j \cap C_i = \emptyset$ für $j \in \mathcal{A}$ und $i \in \mathcal{B}$ und daher

$$\begin{aligned}
&\sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \\
&\qquad = \sum_{j \in \mathcal{A}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s + \sum_{i \in \mathcal{B}} \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_i)}{2} \right)^s \\
&\qquad \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B) \,.
\end{aligned}$$

Da die Überdeckung $(C_j)_j$ beliebig war, schließen wir $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$ für $0 < \delta < \frac{1}{4} \operatorname{dist}(A, B)$. Im Limes $\delta \to 0$ finden wir also auch $\mathcal{H}^s(A \cup B) \geq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$.

Nach Schritt 1 gilt auch „$\leq$" (denn $\mathcal{H}^s$ ist ein äußeres Maß). Wir erhalten also die Gleichheit $\mathcal{H}^s_\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^s_\delta(A) + \mathcal{H}^s_\delta(B)$. Damit ist das Caratheodory-Kriterium nachgewiesen und die Borel-Eigenschaft ist gezeigt.

Schritt 3. Regularität des Hausdorff-Maßes. Der Durchmesser hat die Eigenschaft $\operatorname{diam}\left(\overline{C}\right) = \operatorname{diam}(C)$ für jede Teilmenge $C \in \mathbb{R}^n$. Durch Übergang auf abgeschlossene Überdeckungen kann daher $\mathcal{H}^s_\delta$ auch charakterisiert werden als

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \middle| A \subset \bigcup_j C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta,\ C_j \textit{ abgeschlossen} \right\}.$$

Wir betrachten nun eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Wegen der Monotonie in δ gilt dann auch $\mathcal{H}^s_\delta(A) < \infty$ für alle $\delta > 0$. Wir finden daher eine Familie von Überdeckungen $\{C^k_j\}_{j=1}^\infty$, $k \in \mathbb{N}$, C^k_j abgeschlossen mit $\operatorname{diam}\left(C^k_j\right) \leq \frac{1}{k}$, so dass $A \subset \bigcup_j C^k_j$ und

$$\sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C^k_j)}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k} \,.$$

Mit Hilfe dieser Familie von Überdeckungen können wir nun die folgenden Mengen betrachten: $A_k := \bigcup_j C^k_j$ und $B := \bigcap_k A_k$. Dann ist nach Konstruktion (als abzählbare Vereinigung beziehungsweise abzählbarer Schnitt solcher Mengen) die Menge B eine Borel-Menge.

Wir wollen nun noch zeigen, dass die Borel-Menge $B \supset A$ dasselbe Maß hat, wie A. Zunächst stellen wir fest, dass wegen $A \subset A_k$ für alle k auch $A \subset B$ gilt. Wegen der Monotonieeigenschaft gilt also auch $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$. Andererseits können wir mit der obigen Familie von Überdeckungen für $k \to \infty$ rechnen:

$$\mathcal{H}^s(B) \longleftarrow \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(B) \leq \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C^k_j)}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_{\frac{1}{k}}(A) + \frac{1}{k} \to \mathcal{H}^s(A),$$

also auch $\mathcal{H}^s(B) \leq \mathcal{H}^s(A)$. □

Satz 8.3 (Elementare Eigenschaften)**.** *Es gilt:*

1. *$\mathcal{H}^0$ ist das Zählmaß, das heißt $\mathcal{H}^s(A) =$ Anzahl der Elemente von A*

2. $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ *auf* $\mathbb{R}$

3. $\mathcal{H}^s = 0$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *für alle* $s > n$.

4. $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ *für alle* $\lambda > 0$, $A \subset \mathbb{R}^n$.

5. $\mathcal{H}^s(L(A)) = \mathcal{H}^s(A)$ *für* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, L *affine Isometrie, das heißt* $|Lx| = |x|$.

Beweis. Wir zeigen Eigenschaft 2. Sei dazu $A \subset \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Nach Definition des (äußeren) Lebesgue-Maßes gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^1(A) &= \inf\left\{ \sum_j \operatorname{diam}(C_j) \,\middle|\, A \subset \bigcup_j C_j \right\} \\
&\leq \inf\left\{ \sum_j \operatorname{diam}(C_j) \,\middle|\, A \subset \bigcup_j C_j,\ \operatorname{diam}(C_j) \leq \delta \right\} = \mathcal{H}^1_\delta(A)\,.
\end{aligned}$$

Limesbildung $\delta \to 0$ liefert $\mathcal{L}^1(A) \leq \mathcal{H}^1(A)$.

Andererseits ist $I_k := [k\,\delta, (k+1)\,\delta]$, $k \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \delta$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \leq \operatorname{diam}(C_j)$. Daher ist

$$\mathcal{L}^1(A) \geq \inf\left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \operatorname{diam}(C_j \cap I_k) \,\middle|\, A \subset \bigcup C_j \right\} \geq \mathcal{H}^1_\delta(A)\,.$$

Zusammen folgt $\mathcal{L}^1(A) = \mathcal{H}^1_\delta(A)$ für alle $\delta > 0$ und alle $A \subset \mathbb{R}^n$. Also folgt $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ auf $\mathbb{R}$ (nach Einschränkung auf Lebesgue-messbare Mengen).

Die Eigenschaften 1, 3, 4 und 5 sind einfach nachzuweisen (als Übung). □

Die Hausdorff-Dimension

Lemma 8.4. *Sei* $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < t < \infty$. *Dann gilt*

1. *Falls* $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, *dann ist* $\mathcal{H}^t(A) = 0$

2. *Falls* $\mathcal{H}^t(A) > 0$, *dann ist* $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

Beweis. Sei $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, $\delta > 0$. Wähle eine Überedeckung $A \subset \bigcup_j C_j$, $\operatorname{diam}(C_j) \leq \delta$ mit

$$\sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1 \leq \mathcal{H}^s(A) + 1.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \sum_j \alpha(t) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^t \\
&= \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \sum_j \alpha(s) \left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2} \right)^s \cdot (\operatorname{diam}(C_j))^{t-s} \\
&\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} 2^{s-t} \underbrace{\delta^{t-s}}_{\overset{t>s}{\to} 0} \cdot \underbrace{(\mathcal{H}^s(A) + 1)}_{\text{beschränkt}} \to 0.
\end{aligned}$$

Aussage 2 ist äquivalent zu Aussage 1. □

Definition 8.5 (Hausdorff-Dimension)**.** *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt die Zahl*

$$\dim_{\mathcal{H}}(A) := \inf\{0 \leq s < \infty \,|\, \mathcal{H}^s(A) = 0\}$$

die Hausdorff-Dimension der Menge $A \subset \mathbb{R}^n$.

Bemerkung. *Für $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt*

1. $\dim_{\mathcal{H}}(A) \leq n$
2. *Sei $s = \dim_{\mathcal{H}}(A)$ die Hausdorff-Dimension von A. Dann gilt $\mathcal{H}^t(A) = 0$ für alle $t > s$ und $\mathcal{H}^t(A) = \infty$ für alle $t < s$. Es gilt $\mathcal{H}^s(A) \in [0, \infty]$, wobei auch die Grenzfälle möglich sind.*

8.2. Isodiametrische Ungleichung und $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$

Ziel: Wir wollen zeigen, dass das n-dimensionale Hausdorff-Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ mit dem Lebesgue-Maß übereinstimmt, also $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$.

Ein wichtiges Zwischenziel auf dem Weg dahin ist die isodiametrische Ungleichung:

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2} \right)^n$$

für alle $A \subset \mathbb{R}^n$. Also: Das Maß einer Menge ist höchstens so groß, wie das Maß einer Kugel von demselben Diameter. Die Idee des Beweises ist, die beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ durch eine symmetrische Menge A^* zu ersetzen (symmetrisch zum Ursprung).

Bemerkung. *Die isodiametrische Ungleichung kann nicht elementar geometrisch bewiesen werden, denn eine Menge A ist nicht notwendigerweise in einer Kugel vom Durchmesser* $\operatorname{diam}(A)$ *enthalten.*

Das gleichseitige Dreieck ist ein Gegenbeispiel.

Die Steiner–Symmetrisierung

Notation: Sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit $|a| = 1$ ein Richtungsvektor. Dieser Vektor definiert eine Ebene senkrecht zu a,

$$E_a := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

Weiterhin können wir für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ eine Gerade durch x definieren als

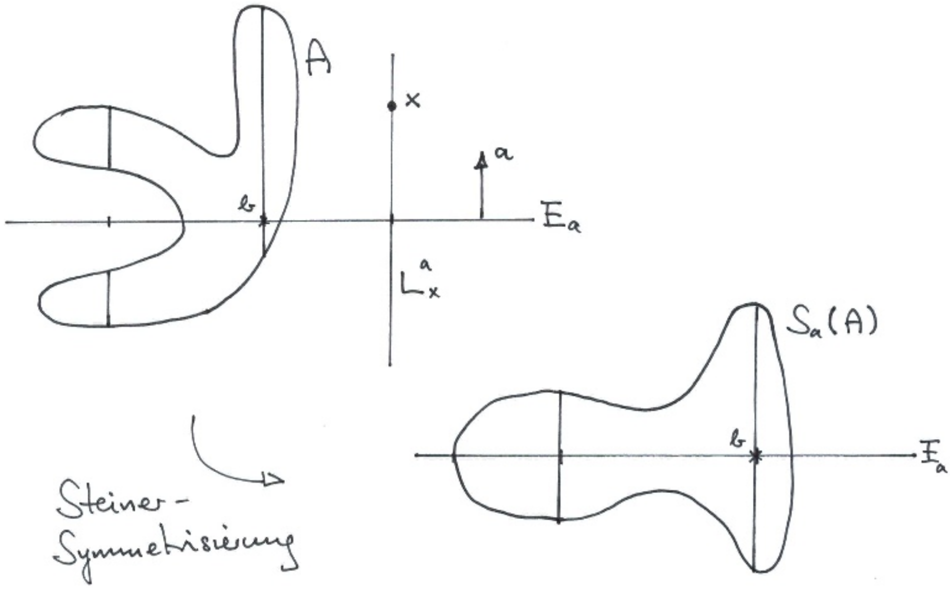
$$L_x^a \quad := \quad \{t \cdot a + x \,|\, t \in \mathbb{R}\}.$$

Die orthogonale Projektion auf die Ebene E_a ist $P_a : x \mapsto x - \langle x, a \rangle a$.

Definition 8.6 (Steiner-Symmetrisierung)**.** *Sei $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$S_a(A) := \bigcup_{\substack{b \in E_a \\ A \cap L_b^a \neq \emptyset}} \left\{ ta + b \,\middle|\, |t| \leq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_b^a) \right\}$$

die Steiner–Symmetrisierung von A bezüglich der Ebene E_a.



Lemma 8.7 (Eigenschaften der Steiner–Symmetrisierung)**.** *Die Steiner-Symmetrisierung lässt das Volumen der Menge unverändert und lässt den Diameter nicht wachsen. In Formeln:*

1. $\operatorname{diam}(S_a(A)) \leq \operatorname{diam}(A)$

2. *Ist A $\mathcal{L}^n$-messbar, so auch $S_a(A)$ und es gilt* $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$

Beweis. Zu 1. Sei $\operatorname{diam}(A) < \infty$ und ohne Einschränkung A abgeschlossen. Wir betrachten beliebige Punkte $x, y \in S_a(A)$. Wir denken dabei an zwei Punkte, die den Diameter annähernd realisieren, $\operatorname{diam}(S_a(A)) \leq |x - y| + \varepsilon$.

Zu den beiden Punkten x und y betrachten wir die Projektionen $\bar{x} = P_a x$ und $\bar{y} = P_a y$. Zusätzlich betrachten wir den E_a-Abstand des äußersten rechten und linken Punktes in $A \cap L_x^a$:

$$\begin{aligned} r_x &= \sup\{t \,|\, ta + \bar{x} \in A\}, \\ l_x &= \inf\{t \,|\, ta + \bar{x} \in A\}. \end{aligned}$$

Ebenso r_y und l_y zum Punkt y. Ohne Einschränkung sei $r_x - l_y \geq r_y - l_x$, ansonsten vertauschen wir x und y.

Wir können nun rechnen

$$\begin{aligned} r_x - l_y &\geq \frac{1}{2}(r_x - l_y) + \frac{1}{2}(r_y - l_x) = \frac{1}{2}(r_x - l_x) + \frac{1}{2}(r_y - l_y) \\ &\geq \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_x^a) + \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_y^a) \\ &\geq |\langle x, a\rangle| + |\langle y, a\rangle| \geq |\langle x - y, a\rangle|\,, \end{aligned}$$

die letzte Zeile wegen $x, y \in S_a(A)$. Mit dieser Vorbereitung erhalten wir für den Abstand zwischen x und y die Abschätzung

$$\begin{aligned}|x-y|^2 &= |\bar{x}-\bar{y}|^2 + |\langle x-y, a\rangle|^2 \le |\bar{x}-\bar{y}|^2 + (r_x - l_y)^2 \\ &= |(\bar{x}+r_x a) - (\bar{y}+l_y a)|^2 \le (\operatorname{diam}(A))^2 .\end{aligned}$$

Da x und y in $S_a(A)$ beliebig waren, ist Behauptung 1. gezeigt.

Zu 2. Die Volumeneigenschaft ist im Wesentlichen eine Konsequenz aus dem Satz von Fubini. Sei ohne Einschränkung $a = e_n = (0, ..., 0, 1)$ (dies ist keine Einschränkung, denn $\mathcal{L}^n$ ist invariant unter Rotationen). Die Ebene E_a ist dann $E_a = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\} \equiv \mathbb{R}^{n-1}$.

Wir definieren $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ als die Höhenfunktion zu $S_a(A)$, also $f(x) := \frac{1}{2}\mathcal{H}^1(A \cap L_x^a)$. Das Hausdorffmaß von $A \cap L_x^a$ stimmt mit dem der Menge $A_x := \{y \in \mathbb{R} | (x, y) \in A\} \subset \mathbb{R}$ überein (das Hausdorff-Maß ist rotationsinvariant und sieht den Grundraum nicht). Wegen $\mathcal{L}^1 = \mathcal{H}^1$ auf $\mathbb{R}$ (siehe Eigenschaft 2 in Satz 8.3) gilt dann auch $2f(x) = \mathcal{H}^1(A \cap L_x^a) = \mathcal{H}^1(A_x) = \mathcal{L}^1(A_x)$.

Der Satz von Fubini liefert, dass f $\mathcal{L}^{n-1}$-messbar ist, und dass das Maß von A durch hintereinander ausgeführte Integration bestimmt werden kann. Wir verwenden die eindimensionale Mengen $A_x := \{y \in \mathbb{R} | (x, y) \in A\}$ und $(S_a(A))_x := \{y \in \mathbb{R} | (x, y) \in S_a(A)\}$ und rechnen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}^1(A_x)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} 2f(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \mathcal{L}^1((S_a(A))_x)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x) = \mathcal{L}^n(S_a(A)) .\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Isodiametrische Ungleichung

Mit dem äußeren Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$ gilt:

Satz 8.8 (Isodiametrische Ungleichung)**.** *Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ erfüllen*

$$\mathcal{L}^n(A) \le \alpha(n) \left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2} \right)^n . \tag{8.2}$$

Beweis. Sei $\operatorname{diam}(A) < \infty$ und $\{e_1, ..., e_n\}$ die Standard-Basis von $\mathbb{R}^n$. Setze $A_1 := S_{e_1}(A)$, $A_2 := S_{e_2}(A_1)$ und so weiter bis zu $A^* := A_n := S_{e_n}(A_{n-1})$.

Schritt 1. A^* ist symmetrisch zum Ursprung. Die Menge A_1 ist nach Konstruktion symmetrisch bezüglich E_{e_1}. Sei nun $1 \le k < n$ und A_k symmetrisch bzgl. $E_{e_1}, ..., E_{e_k}$. Dann ist $A_{k+1} = S_{e_{k+1}}(A_k)$ symmetrisch bezüglich $E_{e_{k+1}}$. Wir wollen noch einsehen, dass die vorher erzielten Symmetrien nicht zerstört werden.

Dazu sei $1 \le j \le k$ fest gewählt. Es sei $S_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ die Spiegelung an der Ebene E_{e_j}. Ein Punkt $b \in E_{e_{k+1}}$ sei beliebig gewählt. Aus $S_j(A_k) = A_k$ folgt

$$\mathcal{H}^1\left(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}\right) = \mathcal{H}^1\left(A_k \cap L_{S_j \cdot b}^{e_{k+1}}\right) .$$

Also ist $\{t | b + t \cdot e_{k+1} \in A_{k+1}\} = \{t | S_j \cdot b + t \cdot e_{k+1} \in A_{k+1}\}$ und daher auch $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$. Da dies für alle $1 \le j \le k$ gilt folgt, dass $A^* = A_n$ bezüglich $E_{e_1}, ..., E_{e_n}$ symmetrisch ist.

Die Hintereinanderausführung aller Spiegelungen ist die Punktspiegelung $x \mapsto -x$. Insbesondere ist die Menge $A^* = A_n$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

Schritt 2. $\mathcal{L}^n(A^*) \leq \alpha(n)\left(\operatorname{diam}(A^*)/2\right)^n$. Für jeden Punkt $x \in A^*$ ist auch $-x \in A^*$ nach Schritt 1. Daher gilt $\operatorname{diam}(A^*) \geq 2 \cdot |x|$ für jedes $x \in A^*$. Wir schließen, dass $A^* \subset B_r(0)$ gilt mit $r := \frac{\operatorname{diam}(A^*)}{2}$. Es gilt also $\mathcal{L}^n(A^*) \leq \mathcal{L}^n(B_r(0))$.

Schritt 3. $\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n)\left(\operatorname{diam}(A)/2\right)^n$. Der Abschluss $\bar{A}$ ist $\mathcal{L}^n$-messbar. Wir können daher Lemma 8.7 auf $\bar{A}$ anwenden und erhalten

$$\mathcal{L}^n\left(\left(\bar{A}\right)^*\right) = \mathcal{L}^n\left(S_{e_n}\left(\left(\bar{A}\right)_{n-1}\right)\right) = \mathcal{L}^n\left(\left(\bar{A}\right)_{n-1}\right) = \dots = \mathcal{L}^n(S_{e_1}\left(\bar{A}\right) = \mathcal{L}^n\left(\bar{A}\right).$$

Weiterhin ist $\operatorname{diam}\left(\bar{A}^*\right) \leq \operatorname{diam}\left(\bar{A}\right)$. Also gilt auch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A) &\leq \mathcal{L}^n\left(\bar{A}\right) = \mathcal{L}^n\left(\left(\bar{A}\right)^*\right) \overset{\text{Schritt 2}}{\leq} \alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam}\left(\bar{A}\right)^*}{2}\right)^n \\ &\leq \alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam}\left(\bar{A}\right)}{2}\right)^n \leq \alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}\right)^n.\end{aligned}$$

Damit ist die isodiametrische Ungleichung gezeigt. □

$\mathcal{H}^n$ ist das äußere Lebesgue-Maß

Satz 8.9. *Es gilt $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ auf $\mathbb{R}^n$.*

Gemeint ist in diesem Satz das äußere Lebesgue-Maß $\mathcal{L}^n$ und das äußere Maß $\mathcal{H}^n$. Für beliebige Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$ gilt die Gleichheit $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$.

Beweis. Schritt 1. $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$ *für alle* $A \subset \mathbb{R}^n$. Sei dazu $\delta > 0$ beliebig. Wähle $A \subset \bigcup_j C_j$, $\operatorname{diam}(C_j) \leq \delta$. Nach Satz 8.8 ist

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_j \mathcal{L}^n(C_j) \leq \sum_j \alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam}(C_j)}{2}\right)^n.$$

Infimumsbildung ergibt

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n_\delta(A).$$

Limesbildung für $\delta \to 0$ ergibt die Behauptung.

Schritt 2. $\mathcal{H}^n$ *ist absolut stetig bezüglich* $\mathcal{L}^n$. Wir werden sogar mehr zeigen: Für eine Konstante C_n gilt die Abschätzung

$$\mathcal{H}^n_\delta(A) \leq C_n \mathcal{L}^n(A) \tag{8.3}$$

für alle Mengen $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir können die Konstante explizit angeben: Wir wählen $C_n := \alpha(n)\left(\sqrt{n}/2\right)^n$ so, dass für Würfel $Q \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\alpha(n)\left(\frac{\operatorname{diam}(Q)}{2}\right)^n = C_n \mathcal{L}^n(Q).$$

Mit dieser Konstante gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\le \inf\left\{ \sum_j \alpha(n)\left(\frac{\mathrm{diam}(Q_j)}{2}\right)^n \middle| Q_j \text{ Würfel, } A \subset \bigcup_j Q_j,\ \mathrm{diam}(Q_j) \le \delta \right\} \\
&= \inf\left\{ \sum_j C_n \mathcal{L}^n(Q_j) \middle| Q_j \text{ Würfel, } A \subset \bigcup_j Q_j,\ \mathrm{diam}(Q_j) \le \delta \right\} \\
&= C_n \mathcal{L}^n(A) \qquad \text{(nach Definition des äußeren Lebesgue-Maßes).}
\end{aligned}$$

Für $\delta \to 0$ folgt die Abschätzung (8.3) auch für $\mathcal{H}^n$. Es gilt insbesondere auch die Absolutstetigkeit.

Schritt 3. *$\mathcal{H}^n(A) \le \mathcal{L}^n(A)$ für alle $A \subset \mathbb{R}^n$.* Seien dazu $\delta > 0$ und $\varepsilon_L > 0$ beliebige (kleine) Parameter. Nach Konstruktion des Lebesgue-Maßes können wir A mit Würfeln wie folgt überdecken: $A \subset \bigcup_j Q_j$ für Würfel Q_j mit $\mathrm{diam}(Q_j) < \delta$ und $\sum_j \mathcal{L}^n(Q_j) \le \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon_L$.

Wir verwenden hier das folgende Lemma:

Lemma 8.10. *Für festes $i \in \mathbb{N}$ und den Quader Q_i existiert eine Familie von Kugeln $\{B^i_k\}_{k=1}^\infty \subset Q_i$, so dass B^i_k disjunkte abgeschlossene Kugeln sind mit $\mathrm{diam}(B^i_k) \le \delta$ und*

$$\mathcal{L}^n\left(Q_i \setminus \bigcup_k B^i_k\right) = 0\,. \tag{8.4}$$

Das Lemma kann bewiesen werden durch Auffüllen von offenen Mengen durch abgeschlossene disjunkte Kugeln. Es ist eine Folgerung aus dem Vitali-Überdeckungssatz.

Wir setzen nun den Beweis von Satz 8.9 fort. Nach Schritt 2 folgt aus (8.4) auch $\mathcal{H}^n_\delta\left(Q_i \setminus \bigcup_k B^i_k\right) = 0$. Dies erlaubt die Rechnung

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n_\delta(A) &\le \sum_j \mathcal{H}^n_\delta(Q_j) = \sum_j \mathcal{H}^n_\delta\left(\bigcup_k B^j_k\right) \\
&\le \sum_{j,k} \mathcal{H}^n_\delta(B^j_k) \le \sum_{j,k} \alpha(n)\left(\frac{\mathrm{diam}(B^j_k)}{2}\right)^n = \sum_{j,k} \mathcal{L}^n(B^j_k) \\
&= \sum_j \mathcal{L}^n\left(\bigcup_k B^j_k\right) = \sum_j \mathcal{L}^n(Q_j) \le \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon_L.
\end{aligned}$$

Wir haben dabei nacheinander verwendet: (a) Subadditivität von $\mathcal{H}^n_\delta$ (vergleiche den Beweis von Satz 8.2), (b) obiges Lemma 8.10, (c) wieder die Subadditivität von $\mathcal{H}^n_\delta$, (d) die Definition des δ-Hausdorff-Maßes (die Kugeln liefern eine Überdeckung), (e) das Lebesgue-Maß von Kugeln, (f) Disjunktheit der Kugeln, (g) wieder Lemma 8.10 und schließlich (h) die Wahl der Quader.

Da ε_L beliebig war, gilt $\mathcal{H}^n_\delta(A) \le \mathcal{L}^n(A)$. Im Limes $\delta \to 0$ erhalten wir die Behauptung des Satzes. $\square$

Beispiel 8.11 (Dimension der Cantor-Menge). *Sei $C \subset [0,1]$ die Cantor-Menge. Die Menge C ist selbstähnlich: Mit den skalierten Kopien $C_1 := \frac{1}{3}C$ und $C_2 := \frac{2}{3} + \frac{1}{3}C$ gilt $C = C_1 \cup C_2$.*

Für eine Dimension $s \in \mathbb{R}$, $s > 0$ gilt daher

$$\mathcal{H}^s(C) = \mathcal{H}^s(C_1 \cup C_2) = 2\mathcal{H}^s\left(\frac{1}{3}C\right) \overset{8.3}{=} 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \mathcal{H}^s(C)\,.$$

Es muss also entweder $\mathcal{H}^s(C) = 0$ oder $\mathcal{H}^s(C) = \infty$ gelten, oder die Dimension erfüllt $2(\frac{1}{3})^s = 1$. Die letztere Bedingung kann umgerechnet werden in $s\ln(\frac{1}{3}) = \ln(\frac{1}{2})$ oder auch $s = \ln(2)/\ln(3) \in (0,1)$. Tatsächlich kann gezeigt werden, dass die Dimension der Cantormenge gegeben ist durch

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\,.$$

9. Der Raum BV

Die uns gut vertrauten Funktionenfamilien sind die

- C^α-Familie: $C^{k,\alpha}$ (Hölder-stetige Funktionen)
- L^p-Familie: $W^{k,p}$ (Lebesgue-messbare Funktionen)

Die L^p-Räume für $p \in (1,\infty)$ haben gute Eigenschaften: Sie sind separabel und reflexiv und daher gut geeignet in der Analysis von Partiellen Differentialgleichungen. Für die Grenzfälle gehen jedoch Eigenschaften verloren: L^∞ ist nicht separabel, L^1 ist nicht reflexiv. Es gilt zwar $(L^1)' = L^\infty$, aber eben auch $(L^\infty)' \neq L^1$.

In manchen Anwendungen (z.B. bei der Verwendung des Young-Maßes) erhält man allerdings aus dem Problem nur eine Kontrolle der L^1-Norm (zum Beispiel von einer Lösungsfolge). In diesem Fall ersetzt man oft den Raum L^1 durch $\mathcal{M}$, also durch den Raum der signierten Radon-Maße. Dies hat den Vorteil, dass beschränkte Folgen konvergente Teilfolgen (und insbesondere einen Limes) besitzen.

Analog wollen wir nun den Raum $W^{1,1}$ ersetzen. Der Ersatz wird mit BV bezeichnet, BV steht für "beschränkte Variation". Der Raum hat sehr gute Eigenschaften, die relativ einfach aus den Eigenschaften von Maßen gefolgert werden können:

- BV ist ein Banachraum, es gilt $W^{1,1} \subset BV$
- Jede beschränkte Folge in BV besitzt eine Teilfolge mit Limes $u \in BV$
- Glatte Funktionen sind dicht in BV

Zur Vorbereitung wollen wir feststellen, dass vektorwertige Maße wie skalarwertige Maße behandelt werden können.

Bemerkung 9.1. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^m) &:= \mathcal{M}(\Omega)^m \overset{(1)}{=} C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)' \\ &\overset{(2)}{=} \{(\mu_1,...,\mu_m) : \exists \mu \in \mathcal{M}(\Omega) \textit{ positiv und } \sigma \in L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^m,\mu) \textit{ mit } d\mu_i = \sigma_i \, d\mu\}\,.\end{aligned}$$

Beweis. (1) Für $\varphi \in C_0(\Omega,\mathbb{R}^m)$ setze $\langle(\mu_1,...,\mu_m),\varphi\rangle := \sum_{j=1}^m \langle \mu_j,\varphi_j\rangle$ und für $\psi \in C_0(\Omega,\mathbb{R})$ sei $\langle \mu_j,\psi\rangle := \langle \mu,\psi\cdot e_i\rangle$.

(2) Die Inklusion „$\supset$" ist klar. Zur Inklusion „$\subset$": Sei $(\mu_1,...,\mu_m) \in \mathcal{M}(\Omega,\mathbb{R}^m)$. Setze $\mu := \sum_{j=1}^m |\mu_j|$. Dann ist $\mu_j \ll \mu$. Nach dem Satz von Radon-Nikodym existiert ein $\sigma_j \in L^1(\mu)$ $\mu_j = \sigma_j \cdot \mu$ (genauer $d\mu_j = \sigma_j \, d\mu$)

Sei $E \subset \Omega$ eine Testmenge. Dann ist

$$⨍_E \sigma_j = \frac{1}{\mu(E)} \cdot \int_E \sigma_j \, d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \cdot \int_E d\mu_j = \frac{\mu_j(E)}{\mu(E)} \in [-1,1]$$

wegen $\mu(E) \geq |\mu_j|(E) \geq \mu_j(E)$. Da E beliebig war nimmt nach Lemma 4.5 die Funktion σ_j nur Werte in $[-1,1]$ an und ist insbesondere in L^∞. $\square$

9.1. Definitionen und BV im Eindimensionalen

Definition 9.2. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir definieren den Banachraum der Funktionen beschränkter Variation durch*

$$\mathrm{BV}(\Omega) := \left\{ u \in L^1(\Omega) \,|\, \nabla u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^n) \right\}$$

mit der Norm

$$\|u\|_{\mathrm{BV}} := \|u\|_{L^1} + \|\nabla u\|_{\mathcal{M}}.$$

Bemerkungen zur Definition: 1.) Die Norm $\|\mu\|_{\mathcal{M}} = |\mu|(\Omega)$ ist die Totalvariation. 2.) ∇u ist der distributionelle Gradient, also die Distribution mit

$$\langle \nabla u, \varphi \rangle = -\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi)\, d\mathcal{L}^n$$

für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. 3.) Mit dem Ausdruck $\nabla u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ wird in der Definition gefordert, dass $L := \nabla u : C_c(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ zu einem stetigen linearen Funktional $L : C_0(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden kann. 4.) Die Menge $\mathrm{BV}(\Omega)$ ist tatsächlich ein Banachraum. Betreffend die Vollständigkeit von BV bemerken wir, dass für eine Cauchy-Folge u_k in $\mathrm{BV}(\Omega)$ die Folge u_k eine Cauchy-Folge in $L^1(\Omega)$ ist und die Folge ∇u_k eine Cauchy-Folge im Raum der Maße $\mathcal{M}(\Omega)$ ist. Entsprechend sind diese beiden Folgen konvergent, für die Limiten u und v erhält man $\nabla u = v$, weil beide Folgen auch im Distributionssinn konvergieren.

Bemerkung 9.3. *Eine äquivalente Beschreibung des Raumes* BV *kann mit der Variation*

$$V_\Omega(u) := \sup \left\{ \int_\Omega u\, div(\varphi) \,\middle|\, \varphi \in C_c^1(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}$$

angegeben werden. Es gilt

$$\mathrm{BV}(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \,|\, V_\Omega(u) < \infty \right\}.$$

Beweis. „$\subset$“ Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ eine Testfunktion mit $\|\varphi\|_\infty \le 1$. Dann gilt

$$\int_\Omega u \operatorname{div}(\varphi) = -\int_\Omega \nabla u \cdot \varphi \le \|\nabla u\|_{\mathcal{M}} \|\varphi\|_\infty \le \|\nabla u\|_{\mathcal{M}}.$$

„$\supset$“ Sei $u \in L^1(\Omega)$ eine Funktion mit

$$\sup \left\{ \int u \operatorname{div}(\varphi) \,\middle|\, \varphi \in C_c^1,\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\} < \infty\,. \tag{9.1}$$

Wegen $u \in L^1(\Omega)$ existiert $\nabla u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ist

$$L(\varphi) := \langle \nabla u, \varphi \rangle \overset{\text{Def.}}{=} -\int u \operatorname{div}(\varphi).$$

Also liefert (9.1)

$$\sup \{ L(\varphi) \,|\, \varphi \in C_c^\infty,\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \} < \infty.$$

Diese Abschätzung impliziert, dass L erweitert werden zu einem stetigen linearen Funktional $L : C_0(\Omega, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$.

Wir wollen dieses allgemeine Prinzip im konkreten Fall vorführen: Sei $\varphi_0 \in C_0$ ein Element, für das wir $L(\varphi_0)$ definieren wollen. Wir approximieren und finden $C_c^\infty \ni \varphi_k \xrightarrow{C_0} \varphi_0 \in C_0$. Es gilt

$$|L\varphi_k - L\varphi_\ell| = |L(\varphi_k - \varphi_\ell)| \le C_L \|\varphi_k - \varphi_\ell\|_\infty \to 0.$$

Die Werte $L\varphi_k$ sind eine Cauchy-Folge, also konvergent, und L kann durch $L\varphi_0 := \lim_k L\varphi_k$ fortgesetzt werden zu $L \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^n)' = \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. $\square$

Bemerkung 9.4. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen*

$$\begin{aligned} \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega) := \Big\{ u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \,|\, &\forall K \subset \Omega \textit{ kompakt gilt:} \\ &\sup \left\{ \int_\Omega u\, \mathit{div}(\varphi) \,\middle|\, \varphi \in C_c^1(K),\ \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\} < \infty \Big\} \\ = \{ u | u\eta \in \mathrm{BV}(\Omega)\ \forall \eta \in C_c^\infty(\Omega) \} & \end{aligned}$$

Beispiel 9.5. *Es gilt $W^{1,1}(\Omega) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$. Für alle $p \in [1, \infty]$ gilt $W^{1,p}(\Omega) \subset \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Beweis. Für $u \in W^{1,1}(\Omega)$ gilt $\partial_{x_i} u \in L^1(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$, also $u \in BV(\Omega)$. Falls alle Ableitungen von der Klasse $\partial_i u \in L^p(K)$ sind für alle kompakten Teilmengen $K \subset \Omega$, so gilt $\partial_i u \in \mathcal{M}(K)$, also $u \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. $\square$

Mit Hilfe von BV-Funktionen können wir nun ein geometrisches Objekt einführen: Den Umfang einer Menge E.

Definition 9.6 (Endlicher Perimeter)**.** *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$. Wir sagen, dass E einen endlichen Perimeter besitzt, falls die Funktion $\chi_E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \textit{für } x \in E \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

eine $\mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$-Funktion ist. Ähnlich definiert man: E hat einen lokal-endlichen Perimeter, falls $\chi_E \in \mathrm{BV}_{\mathrm{loc}}$ gilt.

Beispiel 9.7. *Sei $E \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte Menge mit Lipschitz-Rand, und $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \langle \nabla \chi_E, \varphi \rangle = -\langle \chi_E, \nabla \cdot \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \nabla \cdot \varphi = -\int_E \nabla \cdot \varphi \\ &\overset{\text{Gauß}}{=} -\int_{\partial E} n \cdot \varphi = \langle -n\, \mathcal{H}^{n-1} \lfloor \partial E, \varphi \rangle \end{aligned}$$

mit dem äußeren Normalenvektor n auf ∂E. Diese Rechnung liefert uns den Gradienten von χ_E, nämlich

$$\nabla \chi_E = -n \cdot \mathcal{H}^{n-1} \lfloor \partial E\,,$$

und insbesondere $\nabla \chi_E \in \mathcal{M}$. Die Menge E hat also einen endlichen Perimeter.

Wir bemerken, dass das Maß $\nabla \chi_E$ sowohl Rand als auch Normalenvektor kodiert.

Der Raum BV im Eindimensionalen

Hier sei stets $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}^1$. Betrachte Funktionen $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, das heißt $\mu := \partial_x u \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R})$.

Ein einfaches Beispiel: Sei

$$u(x) = a \cdot x + b \cdot H_c(x) \quad \text{mit} \quad H_c(y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y \geq c \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\partial_x u = a + b \cdot \delta_c$ (oder: $\mu = a\,\mathcal{L}^1 + b\,\mathcal{H}^0 \lfloor \{c\}$).

Dieses Beispiel suggeriert, dass die typischen BV-Funktionen stückweise glatte Funktionen sind, zusätzlich können Sprünge auftreten. Dass allerdings die Ableitung auch andere Anteile enthalten kann, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 9.8 (Cantor-Teil der Ableitung)**.** *Sei $C \subset [0,1]$ die Cantor-Menge, $C = \bigcap_k E_k$ in der natürlichen Konstruktion. In jedem Konstruktionsschritt können wir das Cantor-Maß der k-ten Stufe betrachten,*

$$\mu_k = \frac{\chi_{E_k}}{|E_k|}\,\mathcal{L}^1 = \frac{1}{|E_k|}\mathcal{L}^1 \lfloor E_k$$

mit $\|\mu_k\|([0,1]) = 1$. Wegen der Kompaktheit von $\mathcal{M}$ in der schwach- Topologie finden wir ein Grenzmaß μ mit $\mu_k \overset{*}{\rightharpoonup} \mu$. Dieses Grenzmaß heißt das Cantor-Maß. Es ist konzentriert auf C (also ist $\mu \perp \mathcal{L}^1$) mit $\mu([0,1]) = 1$.*

Da C überabzählbar ist, ist μ ist nicht die abzählbare Summe von Dirac-Maßen.

Cantor-Funktion: *Sei $F : [0,1] \to [0,1]$ monoton wachsend der gleichmäßige Limes der $F_k(x) = \mu_k([0,x])$. Für die Distributionsableitung gilt dann $\partial_x F = \mu \in \mathcal{M}$. Insbesondere ist $F \in \mathrm{BV}((0,1))$. Die Ableitung ist aber nicht eine Kombination von glatten Anteilen mit Sprüngen.*

Ausblick: Mit SBV bezeichnet man den Raum "special BV", den Raum der Funktionen in BV ohne Cantor-Teil in der Ableitung.

Zur weiteren Klärung der Notation: $\mu_k \in \mathcal{M}$ hat die Dichte $f_k(x) = \frac{\chi_{E_k}(x)}{|E_k|}$, das heißt $d\mu_k = f_k\, d\mathcal{L}^1$. Dann ist

$$F_k(x) = \mu_k([0,x]) = \int_0^x d\mu_k = \int_0^x f_k\, d\mathcal{L}^1 = \int_0^x f_k\, q$$

Damit ist $F_k' = f_k$. Weiterhin ist

$$F'\mathcal{L}^1 \overset{*}{\leftharpoondown} F_k'\mathcal{L}^1 = f_k\,\mathcal{L}^1 \overset{*}{\rightharpoonup} \mu.$$

Lemma 9.9 (Extraktion des Sprünge-Anteils)**.** *Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, $\Omega = (a,b)$. Dann gibt es eine Funktion $s : \Omega \ni z \mapsto s(z) \in \mathbb{R}$, so dass für alle $z \in \Omega$ gilt*

$$⨍_z^{z+\varepsilon} u - ⨍_{z-\varepsilon}^{z} u \to s(z) \text{ für } \varepsilon \to 0$$

und mit

$$\sum_{z \in \Omega} |s(z)| < \infty.$$

Insbesondere ist $s(z) = 0$ bis auf abzählbar viele Stellen.

Beweis. Wähle als Testfunktion die Hütchenfunktion

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \frac{z-x}{\varepsilon} & \text{für } x \in (z-\varepsilon, z] \\ 1 - \frac{x-z}{\varepsilon} & \text{für } x \in (z, z+\varepsilon) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt (Satz von der majorisierten Konvergenz beziehungsweise äußere und innere Regularität von μ)

$$s(z) := \mu(\{z\}) \longleftarrow \langle \mu, \eta_\varepsilon \rangle = \langle \partial_x u, \eta_\varepsilon \rangle = -\langle u, \partial_x \eta_\varepsilon \rangle = \fint_z^{z+\varepsilon} u - \fint_{z-\varepsilon}^{z} u.$$

Hierbei ist

$$\partial_x \eta_\varepsilon = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon} & \text{in } (z, z+\varepsilon) \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{in } (z-\varepsilon, z) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für alle Punktmengen $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abzählbar und disjunkt gilt

$$\sum_k |s(z_k)| = \sum_k |\mu(\{z_k\})| = |\mu| \left(\bigcup_k \{z_k\} \right) \leq |\mu|(\Omega) < \infty,$$

da μ ein beschränktes Radon-Maß ist.

Zum Beweis: Für ein Maß $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ gilt $\|\mu\| < \infty$ und daher ist

$$\mathcal{A} := \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) \neq 0\}$$

abzählbar. Es gibt nur endlich viele x mit $|\mu(x)| > 1$, endlich viele x mit $|\mu(x)| > \frac{1}{2}$, usw. Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen die **Atome** von μ. □

Satz 9.10. *Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$, $\Omega = (a, b)$. Dann gibt es Repräsentanten u_ℓ und u_r von u mit u_ℓ (u_r) links- (rechts-) stetig, $u_r(x) \neq u_\ell(x)$ in abzählbar vielen Punkten x und $\sum_{x\in\Omega} |u_r - u_\ell|(x) < \infty$.*

Beweis. Wähle $x_0 \in \Omega$ mit

$$\begin{cases} x_0 \text{ ist Lebesgue-Punkt von } u \text{ und} \\ \mu(\{x_0\}) = 0, \text{ also kein Atom für } \partial_x u. \end{cases}$$

Setze

$$u_r(x) := \begin{cases} u(x_0) + \mu([x_0, x]) & \text{für } x \geq x_0 \\ u(x_0) - \mu((x, x_0]) & \text{für } x < x_0. \end{cases}$$

Wähle

$$\eta_\varepsilon(z) := \begin{cases} \frac{z-(x_0-\varepsilon)}{2\varepsilon} & \text{für } z \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \\ 1 & \text{für } z \in [x_0+\varepsilon, x] \\ \frac{x+\varepsilon-z}{\varepsilon} & \text{für } z \in (x, x+\varepsilon] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also ist

$$\mu([x_0, x]) \longleftarrow \langle \partial_x u, \eta_\varepsilon \rangle = -\langle u, \partial_x \eta_\varepsilon \rangle = \fint_x^{x+\varepsilon} u - \underbrace{\fint_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} u}_{\to u(x_0)},$$

denn x_0 ist kein Atom. Damit gilt

$$\fint_x^{x+\varepsilon} u \to u_r(x).$$

1. Sei x Lebesgue-Punkt und $\mu(\{x\}) = 0$ (dies sind fast alle x)
   Dort ist

   $$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \underbrace{\fint_x^{x+\varepsilon} u}_{\to u_r(x)} = \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \cdot \underbrace{\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} u}_{\to u(x)} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left\{ \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_x^{x+\varepsilon} u - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{x-\varepsilon}^{x} u \right\}}_{\overset{9.9}{\to} 0}.$$

   Also ist $u_r = u$ fast überall. Damit ist u_r Repräsentant von u.

2. u_r rechtsstetig:

   $$u_r(x+\delta) - u_r(x) \overset{x \geq x_0}{=} \mu([x_0, x+\delta]) - \mu([x_0, x]) = \mu(\underbrace{(x, x+\delta]}_{=: A_\delta}) \to 0,$$

   denn $\bigcap_{\delta > 0} A_\delta = \emptyset$.

Für $x > x_0$ bilde $u_\ell(x) = u(x_0) + \mu([x_0, x))$. Dann ist $u_r(x) - u_\ell(x) = \mu(\{x\})$. □

Satz 9.11 (Charakterisierung von BV in 1D)**.** *Sei* $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$. *Definiere*

$$\mathrm{BV}_{1D}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid \textit{Abschätzung } (9.2) \textit{ gilt}\},$$

wobei

$$\sup \left\{ \sum_k |u(x_{k+1}) - u(x_k)| : a \leq x_1 < x_2 < ... < x_n \leq b \right\} < \infty. \tag{9.2}$$

Dann ist $\mathrm{BV}_{1D}(\Omega) = \mathrm{BV}(\Omega)$ *in dem Sinne, dass*

1. $\mathrm{BV}_{1D}(\Omega) \subset \mathrm{BV}(\Omega)$ *und*
2. *alle* $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ *haben einen Repräsentanten in* $\mathrm{BV}_{1D}(\Omega)$.

Beweisskizze. „$\subset$“ Wähle zu $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ den Repräsentanten u_ℓ (linksstetig). Sei (x_k) beliebig. Setze $I_k := (x_k, x_{k+1})$. Dann ist

$$\sum_k |u_\ell(x_{k+1}) - u_\ell(x_k)| = \sum_k |\mu([x_k, x_{k+1}))| \leq |\mu|(\Omega) \leq \|\mu\|.$$

„$\supset$“ Sei $u : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit (9.2).

Behauptung 1: u hat rechtstetigen Repräsentanten.

Beweis der Behauptung 1: Für ein Widerspruchsargument nehmen wir an, dass in einem Punkt x_0 gilt $\limsup_{s\downarrow x_0} u(x) \neq \liminf_{x\downarrow x_0} u(x)$. Dann gibt es rechts von x_0 unendliche Oszillationen, im Widerspruch zu (9.2).

Wir setzen nun $u(x_0) = \lim_{x\downarrow x_0} u(x)$ in jedem Punkt x_0. Dies ist tatsächlich ein Repräsentant, denn (9.2) schließt aus, dass es eine überabzählbare Zahl von Sprungpunkten gibt.

Behauptung 2: u ist „gleichmäßig rechtsstetig", das heißt für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in (a,b)$ gilt $|u(x+y) - u(x)| < \varepsilon$ für alle $y \in (0,\delta)$.

Beweis von Behauptung 2: Kompaktheit.

Ziel: $\partial_x u \in \mathcal{M}$ bzw. $\partial_x u : C_0((a,b)) \to \mathbb{R}$ stetig.

Sei $\varphi_\infty \in C_0((a,b))$, wir approximieren mit Funktionen $\varphi_m \to \varphi_\infty$ in $\|.\|_\infty$ (also gleichmäßig), mit φ_m stückweise affin.

Zu zeigen: $\langle \partial_x u, \varphi_m - \varphi_\ell \rangle \to 0$ für $m, \ell \to \infty$. Schreibe $\varphi := \varphi_m - \varphi_\ell \overset{C^0}{\to} 0$. Dann hat φ Stützstellen x_j, das heißt φ ist affin auf (x_j, x_{j+1}). Wähle feinere Unterteilung von (a,b) mit Stützstellen z_k und $I_k := (z_k, z_{k+1})$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\langle \partial_x u, \varphi \rangle &\overset{\varphi\in W^{1,1}}{=} -\langle u, \partial_x \varphi \rangle = -\sum_k \int_{I_k} u \cdot \partial_x \varphi = -\sum_k \int_{I_k} u \cdot \frac{\varphi(z_{k+1}) - \varphi(z_k)}{z_{k+1} - z_k} \\
&= -\sum_k (\varphi(z_{k+1}) - \varphi(z_k)) \cdot \underbrace{⨍_{I_k} u}_{\substack{=u(z_k)+\mathbf{O}(\varepsilon) \\ \text{Rechtstetigkeit}}} \\
&\overset{\substack{\text{partielle} \\ \text{Integration}}}{=} \sum_k \varphi(z_k) \cdot (u(z_k) - u(z_{k-1})) + \mathbf{O}(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Also ist

$$|\langle \partial_x u, \varphi \rangle| \le \underbrace{\|\varphi\|_{L^\infty}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sum_k |u(z_k) - u(z_{k-1})|}_{\overset{(9.2)}{\le} C} + \mathbf{O}(\varepsilon).$$

□

9.2. Approximation und Kompaktheit

Satz 9.12 (L^1-Grenzfunktion ist in BV)**.** *Sei $u_k \in \mathrm{BV}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$. Dann gilt*

$$\|u\|_{\mathrm{BV}} \le \liminf_{k\to\infty} \|u_k\|_{\mathrm{BV}}. \tag{9.3}$$

Falls $\|u_k\|_{\mathrm{BV}} \le C$ gilt, so ist $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$.

Beweis. Sei $\varphi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\|\varphi\|_\infty \le 1$. Wir betrachten

$$\langle \nabla u, \varphi \rangle \overset{\text{Def}}{=} -\int_\Omega u \, \nabla \cdot \varphi = -\lim_{k\to\infty} \underbrace{\int_\Omega u_k \, \nabla \cdot \varphi}_{(*)}.$$

Es gilt

$$|(*)| = |\langle \nabla u_k, \varphi \rangle| \leq \|\nabla u_k\|_{\mathcal{L}(C_0,\mathbb{R})} \cdot \|\varphi\|_\infty \overset{\text{Riesz}}{=} \|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}} \cdot \|\varphi\|_\infty \leq \|u_k\|_{\mathrm{BV}} \cdot \|\varphi\|_\infty.$$

Dies liefert die Unterhalbstetigkeit (9.3). Insbesondere wirkt ∇u stetig auf allen $C_0(\Omega)$-Funktionen und ist daher ein Maß. Also gilt auch $u \in BV(\Omega)$. □

Satz 9.13 (Approximierbarkeit). *Sei $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$. Dann existiert eine approximierende Folge $u_k \in C^\infty(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ und*

$$\nabla u_k \rightharpoonup \nabla u \quad \textit{schwach-* im Raum } \mathcal{M}(\Omega)\,. \tag{9.4}$$

Zusätzlich konvergiert die Norm,

$$\|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}}(\Omega) \to \|\nabla u\|_{\mathcal{M}}(\Omega)\,. \tag{9.5}$$

Bemerkung 9.14. *Man muss sehr vorsichtig bei der Interpretation der Funktionen sein. Für eine glatte Funktion $f \in C_c^\infty$ ist einerseits ∇f der Gradient, also die vektorwertige Funktion der Ableitungen. Andererseits identifizieren wir ∇f auch mit der Distribution $\nabla f : \varphi \to \int \nabla f \cdot \varphi$, also einem Maß $\nabla f \in \mathcal{M}$. Der aus der Analysis-II bekannte Gradient ∇f ist die Dichte des Maßes ∇f bezüglich des Lebesgue-Maßes.*

Beweis von Satz 9.13. Siehe Evans-Gariepy. Die Schwierigkeit ist der Rand von Ω, was den Beweis technisch macht. Wir beweisen hier den Satz nur für $\Omega = \mathbb{R}^n$, wodurch die Randproblematik vermieden wird.

Sei $u \in \mathrm{BV}(\mathbb{R}^n)$, das heißt $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $\nabla u \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$. Wir wählen eine glatte Funktion $\Phi_1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_1 = 1$ und konstruieren eine Diracfolge durch $\Phi_k(x) := k^n\, \Phi_1(k\,x)$. Die approximierenden Funktionen definieren wir mit Hilfe der Faltung als

$$u_k(x) = (u * \Phi_k)(x) := \int u(x-y) \cdot \Phi_k(y)\, dy.$$

Dann gilt $u_k \to u$ in $L^1(\mathbb{R}^n)$ aufgrund der Lebesgue-Theorie und $u_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Die Konvergenz der Gradienten im Distributionssinn folgt nach allgemeinen Prinzipien der Distributionstheorie. Es lässt sich aber sogar die Norm der Gradienten abschätzen: Für beliebiges $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\begin{aligned} \langle \nabla u_k, \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}^n} u_k\ \nabla \cdot \varphi = -\int_{\mathbb{R}^n} (u * \Phi_k)\ \mathrm{div}(\varphi) \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} u\ (\mathrm{div}(\varphi) * \Phi_k) = -\int_{\mathbb{R}^n} u\ \mathrm{div}(\varphi * \Phi_k) = \langle \nabla u, \varphi * \Phi_k \rangle. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$\|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}} = \sup \{ \langle \nabla u_k, \varphi \rangle\, | \varphi \in C_0(\Omega),\ \|\varphi\|_\infty \leq 1 \} \leq \|\nabla u\|_{\mathcal{M}}$$

wegen $\langle \nabla u_k, \varphi \rangle = \langle \nabla u, \varphi * \Phi_k \rangle \leq \|\nabla u\|_{\mathcal{M}}$. Damit ist hinsichtlich der Konvergenz (9.5) bereits die Relation $\limsup_k \|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}} \leq \|\nabla u\|_{\mathcal{M}}$ gezeigt. Die umgekehrte Aussage, nämlich $\liminf_k \|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}} \geq \|\nabla u\|_{\mathcal{M}}$, wurde in Satz 9.12 gezeigt. Damit ist (9.5) verifiziert.

Wir wollen nun die Konvergenz der Gradienten im Raum der Maße zeigen. Sei dazu $\varphi \in C_0(\Omega)$ eine beliebige Testfunktion. Eine Fehlerschranke $\varepsilon > 0$ sei beliebig vorgegeben. Wir wählen eine Approximation $\varphi_1 \in C_c^1(\Omega)$ mit $\|\varphi_1 - \varphi\|_\infty$ hinreichend klein. Dann ist

$$\begin{aligned}
&|\langle \nabla u_k, \varphi\rangle - \langle \nabla u, \varphi\rangle| \\
&\quad \leq |\langle \nabla u_k, \varphi - \varphi_1\rangle| + |\langle \nabla u, \varphi - \varphi_1\rangle| + |\langle \nabla u_k - \nabla u, \varphi_1\rangle| \\
&\quad \leq \underbrace{\|\nabla u_k\|_{\mathcal{M}}}_{\leq C} \cdot \underbrace{\|\varphi - \varphi_1\|_\infty}_{\text{klein}} + \|\nabla u\|_{\mathcal{M}} \cdot \underbrace{\|\varphi - \varphi_1\|_\infty}_{\text{klein}} + \underbrace{\langle \nabla u, \underbrace{\varphi_1 * \Phi_k - \varphi_1}_{\overset{L^\infty}{\to} 0}\rangle}_{\overset{k\to\infty}{\to} 0} \leq \varepsilon,
\end{aligned}$$

falls φ_1 geeignet und k hinreichend groß. Damit gilt (9.4). $\square$

Warnung: Man kann durch Glättung keine normkonvergente Funktionenfolge erzeugen. Wir überlegen uns das mit dem folgenden Beispiel.

Beispiel (Keine Normkonvergenz). *Sei $\Omega = \mathbb{R}$. Betrachte $u := \chi_{(0,1)} \in \mathrm{BV}(\mathbb{R})$ mit $\nabla u = \delta_{\{0\}} - \delta_{\{1\}}$. Sei $C^\infty \ni u_k \to u$ in L^1 eine Glättung und k groß. Dann ist*

$$\underbrace{\|\nabla u_k - \nabla u\|_{\mathcal{M}}}_{=4} \not\to 0.$$

Satz 9.15 (Kompaktheit). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Sei u_k eine Funktionenfolge mit $\|u_k\|_{\mathrm{BV}(\Omega)} \leq C$. Dann existiert ein $u \in \mathrm{BV}(\Omega)$ und eine Teilfolge mit $u_k \to u$ in $L^1(\Omega)$.*

Beweis. Wir approximieren zunächst die Folgenglieder u_k und wählen $g_k \in C^\infty(\Omega)$ mit $\|u_k - g_k\|_{L^1} \leq \frac{1}{k}$ und $\|\nabla g_k\|_{L^1} = \|\nabla g_k\|_{\mathcal{M}} \leq C + 1$ gemäß Satz 9.13. Damit ist die Folge $g_k \in W^{1,1}(\Omega)$ beschränkt.

Wir verwenden nun die Kompaktheit der Einbettung $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$. Sie impliziert, dass es eine Teilfolge und eine Funktion $u \in L^1$ gibt, so dass $g_k \to u$ in $L^1(\Omega)$ für $k \to \infty$. Dann gilt auch $\|u_k - u\|_{L^1} \leq \|u_k - g_k\|_{L^1} + \|g_k - u\|_{L^1} \to 0$, also $u_k \to u$ in L^1.

Die Kompaktheitsaussage für Maße aus Bemerkung 5.11 impliziert, dass für ein Grenzmaß μ die Gradienten konvergieren, $\nabla g_k \rightharpoonup \mu$ in $\mathcal{M}$, wobei das Grenzmaß (wegen distributioneller Konvergenz) als $\mu = \nabla u$ identifiziert werden kann. Dies zeigt $u \in BV(\Omega)$. $\square$

Index