Fourier-Reihen

B. Schweizer[1]

5. Juni 2024

Abstract: Dieser Text fasst in Kürze die wesentlichen Punkte zu Fourierreihen zusammen. Es soll eine Kurzzusammenfassung für Mathematiker sein. Lebesgue-Theorie und elementare Kenntnisse zu Hilberträumen werden vorausgesetzt.

1. Fragestellung

Wir betrachten Funktionen auf dem Intervall $I = [-\pi, \pi]$, also

$$f : I \to \mathbb{C}\,. \tag{1.1}$$

Unser Ziel ist es, eine solche Funktion mit einer geeigneten Familie von Koeffizienten $(c_k)_k$ darzustellen, $c_k \in \mathbb{C}$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$:

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{ikx} \qquad \forall x \in I\,. \tag{1.2}$$

2. Wahl von Hilbertraum und Basisfunktionen

Wir wählen als Grundraum $X := L^2(I, \mathbb{C})$, Skalarprodukt und Norm wählen wir als

$$\langle f, g\rangle_X = \frac{1}{2\pi}\int_I f\,\bar{g}\,, \qquad \|f\|_X^2 = \frac{1}{2\pi}\int_I |f|^2\,. \tag{2.1}$$

Wir betrachten folgende Elemente in X:

$$e_k \in X \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}\,, \qquad e_k : I \to \mathbb{C},\ x \mapsto e^{ikx}\,. \tag{2.2}$$

Wir berechnen

$$\langle e_k, e_l\rangle_X = \frac{1}{2\pi}\int_I e^{ikx}\, e^{-ilx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_I e^{i(k-l)x}\,dx = \delta_{kl}\,. \tag{2.3}$$

Die Elemente $(e_k)_k$ sind also orthonormal in X.

3. Formel für die Koeffizienten

Zur Motivation des Nachfolgenden nehmen wir an, $f \in X$ sei gegeben wie in (1.2) mit Konvergenz der Reihe in $L^2(I)$, also

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall N \geq M :\quad \int_I \left| f(x) - \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ikx}\right|^2 dx < \varepsilon\,. \tag{3.1}$$

[1] Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, Vogelspothsweg 87, D-44227 Dortmund, ben.schweizer@tu-dortmund.de

Wir multiplizieren f mit e_k und erhalten

$$\langle f, e_k\rangle_X = \frac{1}{2\pi}\int_I f(x)e^{-ikx}\,dx = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_I \sum_{l=-N}^{N} c_l\, e^{ilx}e^{-ikx}\,dx$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{l=-N}^{N} c_l\,\delta_{kl} = c_k\,.$$

Die "richtigen" Koeffizienten sind also durch f bestimmt: $c_k = c_k(f) := \langle f, e_k\rangle_X$.

4. Fourierreihe einer Funktion

Wir kehren nun zur ursprünglichen Motivation zurück und betrachten eine beliebige Funktion f, oder, genauer, ein beliebiges Element $f \in X$. Wir *definieren* Koeffizienten durch $c_k := \langle f, e_k\rangle_X$. Zu diesen Koeffizienten betrachten wir die Reihe wie in (1.2),

$$\tilde f := \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e_k \in X\,. \tag{4.1}$$

Lemma 4.1. *Für* $f \in X$ *und* $c_k := \langle f, e_k\rangle_X$ *gilt:*

$$(c_k)_k \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C}) \quad \textit{mit} \quad \|(c_k)_k\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \le \|f\|_X\,. \tag{4.2}$$

Die Reihe in (4.1) *ist konvergent in* X*. Sie definiert also eine Grenzfunktion* $\tilde f$*.*

Beweis. Abschätzung für $(c_k)_k$. Wir definieren f_N als die Partialsumme,

$$f_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e_k\,. \tag{4.3}$$

Nun testen wir f mit f_N und erhalten

$$\langle f, f_N\rangle_X = \langle f, \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e_k\rangle_X = \sum_{k=-N}^{N} \bar c_k\,\langle f, e_k\rangle_X = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2\,.$$

Ebenso berechnet man $\|f_N\|_X^2 = \langle f_N, f_N\rangle_X = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$. Die Cauchy-Schwarz Ungleichung in X liefert

$$\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 = \langle f, f_N\rangle_X \le \|f\|_X\,\|f_N\|_X \le \|f\|_X \sqrt{\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2}\,.$$

Teilen durch die Wurzel liefert die Abschätzung von (4.2) und damit auch $(c_k)_k \in \ell^2(\mathbb{N},\mathbb{C})$.

Konvergenz der Reihe. Wir vergleichen zwei verschiedene Folgenglieder. Für $N > M$ berechnen wir

$$\|f_N - f_M\|_X^2 = \left\| \sum_{M<|k|\le N} c_k\, e_k \right\|_X^2 = \sum_{M<|k|\le N} |c_k|^2 \to 0$$

für $M \to \infty$. Die Folge f_N ist also eine Cauchy-Folge in X. Wir erhalten, dass die Reihe in X konvergiert, $\tilde f$ ist wohldefiniert. □

Unser Ziel ist damit fast erreicht – bis auf einen wesentlichen Punkt: Wir wissen nicht, ob $\tilde f = f$ gilt.

5. Vollständigkeit

Es ist interessant, den noch offenen Punkt, nämlich $\tilde f \overset{?}{=} f$, mit einer abstrakten Eigenschaft der e_k in Zusammenhang zu bringen.

Definition 5.1 (Vollständigkeit). *Eine orthonormale Familie e_k in einem Hilbertraum X heißt* vollständig, *wenn für jedes $f \in X$ gilt:*

$$\langle f, e_k\rangle_X = 0 \quad \forall k \qquad \Rightarrow \qquad f = 0\,. \tag{5.1}$$

Das Problem, ob die von uns gewählte Familie e_k vollständig ist, verschieben wir noch ein wenig. Zunächst wollen wir feststellen, dass die Vollständigkeit unsere Fragestellung befriedigend beantwortet.

Theorem 5.2 (Hilbertraumkonvergenz). *Sei X ein Hilbertraum und darin $(e_k)_k$ eine vollständige orthonormale Familie. Dann gilt für jedes $f \in X$ die Darstellung*

$$f = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e_k \qquad \text{mit Konvergenz in } X, \quad \text{für } c_k = \langle f, e_k\rangle_X\,. \tag{5.2}$$

Zudem gilt $\|(c_k)_k\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \|f\|_X$ (Bessel'sche Gleichung).

Beweis. In Lemma 4.1 haben wir bereits die Konvergenz der Reihe gegen ein Element $\tilde f$ erhalten. Wir stellen fest, dass

$$\langle f - \tilde f, e_k\rangle = \langle f, e_k\rangle - \langle \tilde f, e_k\rangle = c_k - c_k = 0\,, \tag{5.3}$$

wobei wir einerseits die Definition von c_k und andererseits die Tatsache $\langle \tilde f, e_k\rangle = c_k$ benutzt haben, die aus der X-Konvergenz der Fourierreihe folgt (Rechnung wie in Abschnitt 3). Aus (5.3) folgt wegen der Vollständigkeit $\tilde f = f$. Damit ist (5.2) gezeigt.

Für die Bessel'sche Gleichung rechnen wir

$$\begin{aligned} 0 \longleftarrow \|f - f_N\|_X^2 &= \|f\|_X^2 + \|f_N\|_X^2 - 2\,\mathrm{Re}\langle f, f_N\rangle \\ &= \|f\|_X^2 + \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 - 2\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 = \|f\|_X^2 - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten $\|(c_k)_k\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = \|f\|_X$. □

6. Konvergenzsatz für die konkrete Wahl der $(e_k)_k$

Die Theorie ist befriedigend abgeschlossen, sobald wir für die konkrete Familie $e_k = e^{ikx}$ im Hilbertraum $X = L^2(I)$ die Vollständigkeit der $(e_k)_k$ nachgewiesen haben. Dies geschieht in zwei Schritten. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass für Funktionen $f \in L^2(I)$ mit zusätzlicher Regularität eine punktweise Konvergenz der Fourierreihe vorliegt.

Theorem 6.1 (Konvergenzsatz). *Sei $f \in L^2(I)$ und sei $x_0 \in I$ ein innerer Punkt, in dem die Funktion f eine zusätzliche Regularität hat: Wir nehmen an, dass für eine Zahl $y_0 \in \mathbb{C}$ die Funktion*

$$g(x) := \frac{f(x) - y_0}{x - x_0} \tag{6.1}$$

von der Klasse $g \in L^2(I)$ ist. Dann konvergiert die Fourierreihe aus (4.1) im Punkt x_0 gegen y_0.

Beweis. 1. Vereinfachung. Wir nehmen ohne Einschränkung $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ an. Im allgemeinen Fall muss die Funktion entsprechend in horizontaler und in vertikaler Richtung verschoben werden.

2. Die Funktion h. Wir betrachten eine Funktion, die dasselbe Verhalten hat wie g, aber für Rechnungen besser geeignet ist, nämlich

$$h(x) := \frac{f(x)}{1 - e^{ix}}. \tag{6.2}$$

Der Nenner hat als einzige Nullstelle den Punkt $x = 0$. Um den Punkt $x = x_0 = 0$ herum hat der Nenner als erste Terme der Taylorreihe $1 - e^{ix} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(ix)^j = -ix + O(|x|^2)$. Daher verhält sich $|h(x)|$ für kleine $|x|$ wie $|g(x)|$. Man erhält, dass h ebenfalls die Voraussetzung $h \in L^2(I)$ erfüllt.

3. Ziel. Wir wollen die Konvergenz der Fourierreihe zeigen. Im Punkt $x_0 = 0$ und für $y_0 = 0$ müssen wir also zeigen:

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k = \sum_{k=-N}^{N} c_k\, e^{ik0} \to 0 \quad \text{für } N \to \infty. \tag{6.3}$$

4. Berechnung der Summe. Die Koeffizienten von f bezeichnen wir mit $c_k(f)$, entsprechend die Koeffizienten von $h \in L^2(I)$ mit $c_k(h)$ und die Koeffizienten der Funktion $x \mapsto h(x)\, e^{ix}$ mit $c_k(h\, e^{ix})$. Für letztere gilt die Formel $c_k(h\, e^{ix}) = c_{k-1}(h)$, die sich aus der Integralformel für c_k ergibt. Wir nutzen hier $h \in L^2(I)$ aus.

Wegen $f(x) = h(x)(1 - e^{ix})$ gilt

$$c_k(f) = c_k(h) - c_k(h\, e^{ix}) = c_k(h) - c_{k-1}(h), \tag{6.4}$$

und daher

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k = \sum_{k=-N}^{N} c_k(f) = \sum_{k=-N}^{N} [c_k(h) - c_{k-1}(h)] = c_N(h) - c_{-N-1}(h). \tag{6.5}$$

Wegen $(c_k(h))_k \in \ell^2(\mathbb{N})$ konvergiert dieser Ausdruck gegen Null und der Beweis ist abgeschlossen. □

Eine Bemerkung zu Satz 6.1. Die Voraussetzung an f ist natürlich erfüllt, wenn f Lipschitzstetig ist. Auch eine geeignete Hölderstetigkeit ist ausreichend. Interessant ist aber in jedem Fall, dass die zusätzliche Regularität von f nur in einer Umgebung des fraglichen Punktes vorliegen muss – obwohl ja die Fourier-Koeffizienten von allen Werten von f abhängen.

Corollar 6.2 (Konvergenz für Lipschitz-Funktionen)**.** *Ist $f : I \to \mathbb{C}$ Lipschitzstetig auf I, so konvergiert die Fourierreihe von f in jedem inneren Punkt $x \in I$ gegen $f(x)$. Zudem konvergiert die Fourierreihe in $L^2(I)$ gegen f.*

Beweis. Theorem 6.1 impliziert die punktweise Konvergenz $f_N \to f$. Lemma 4.1 liefert eine Grenzfunktion $\tilde{f}$, so dass $f_N \to \tilde{f}$ in $L^2(I)$ gilt. Die starke Konvergenz impliziert punktweise fast überall Konvergenz für eine Teilfolge. Es muss also $\tilde{f} = f$ fast überall gelten. Dies zeigt $f_N \to f$ in $L^2(I)$. □

7. Vollständigkeit für die konkrete Wahl der $(e_k)_k$

Wir betrachten wieder die Familie $(e_k)_k$, die gegeben ist durch die Funktionen $x \mapsto e^{ikx}$ in $X = L^2(I)$. Um die Vollständigkeit der Familie zu beweisen, reicht uns die Konvergenzeigenschaft aus Corollar 6.2 aus.

Theorem 7.1 (Vollständigkeit). *Im Raum X ist die Familie e_k vollständig.*

Beweis. Wir müssen eine Funktion $f \in X = L^2(I)$ betrachten, die orthogonal auf allen e_k ist,

$$\langle f, e_k \rangle_X = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,. \tag{7.1}$$

Wir wollen zeigen, dass $f = 0$ gilt.

Wir wählen eine Folge $\varepsilon = \varepsilon_j \searrow 0$ und approximieren f mit Lipschitz-stetigen Funktion f^ε, also $f^\varepsilon \to f$ in $L^2(I)$. Wir nutzen hier die Dichtheit glatter Funktionen in $L^2(I)$.

Die Konvergenz $f^\varepsilon \to f$ in $L^2(I)$ impliziert, dass auch die Fourierkoeffizienten von f und von f^ε ähnlich sind. Da die Fourierkoeffizienten von f wegen (7.1) verschwinden gilt

$$\|(c_k(f^\varepsilon))_k\|_{\ell^2}^2 = \|(c_k(f^\varepsilon))_k - (c_k(f))_k\|_{\ell^2}^2 = \|(c_k(f^\varepsilon - f))_k\|_{\ell^2}^2 \le \|f^\varepsilon - f\|_X^2 \to 0\,, \tag{7.2}$$

wobei wir Lemma 4.1 verwendet haben.

Nach diesen Vorbereitungen schätzen wir die Norm von f mit einer Dreiecksungleichung ab:

$$\|f\|_X \le \|f - f^\varepsilon\|_X + \|f^\varepsilon - f_N^\varepsilon\|_X + \|f_N^\varepsilon - 0\|_X\,.$$

Für großes j, also kleines $\varepsilon > 0$, ist der erste Term und der dritte Term klein. Für den ersten Term ist dies klar, denn so ist die Folge f^ε gewählt. Für den dritten Term berechnen wir

$$\|f_N^\varepsilon\|_X \le \|(c_k(f^\varepsilon))_k\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \to 0$$

wegen (7.2).

Für eine beliebige Fehlerschranke $\eta > 0$ wählen wir also $\varepsilon = \varepsilon_j$ so, dass der erste Term und der dritte Term beide kleiner sind als $\eta/3$. Für das feste ε und hinreichend große N gilt, dass auch der zweite Term kleiner ist als $\eta/3$, was aus Corollar 6.2 folgt. Damit ist für beliebiges $\eta > 0$ gezeigt, dass $\|f\|_X < \eta$. Dies liefert $f = 0$. $\square$

8. Gleichmässige Konvergenz

In den vorigen Abschnitten haben wir die Konvergenz der Fourierreihe für zwei Konvergenzbegriffe nachgewiesen:

- $f_N \to f$ in $X = L^2(I)$, falls $f \in X$ (siehe Theorem 5.2 und Theorem 7.1)
- $f_N \to f$ punktweise fast überall, falls f Lipschitzstetig (siehe Theorem 6.1)

Wir wollen dies ergänzen mit:

- $f_N \to f$ gleichmäßig in $(-\pi, \pi)$, falls $f \in H^1(I)$

Damit ist genauer gemeint, dass f_N gleichmäßig gegen einen Repräsentanten von f konvergiert.

In diesem Skript wollen wir den Sobolevraum $H^1(I)$ nicht verwenden, weil dieser Raum in der Analysis 3 noch nicht vorkommt. Wir formulieren daher den nachfolgenden Satz für stückweise C^1-Funktionen. Wer den Sobolevraum kennt, kann dem Beweis ansehen, dass nur $f \in H^1(I)$ verwendet wird.

Theorem 8.1 (Gleichmäßige Konvergenz)**.** *Die stetige Funktion $f : I \to \mathbb{C}$ sei periodisch, es gelte also $f(\pi) = f(-\pi)$, und die Funktion sei stückweise stetig differenzierbar. Dann konvergiert die Fourierreihe gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Wir verwenden die Fourierkoeffizienten von f, also $(c_k(f))_k$, und Fourierkoeffizienten von $f' = \partial_x f$, also $(c_k(f'))_k$. Die Definition der Koeffizienten liefert mit einer partiellen Integration, dass $|c_k(f')| = |k|\,|c_k(f)|$.

Die Funktion f' ist stückweise stetig und daher insbesondere in $L^2(I)$. Lemma 4.1 liefert $(c_k(f'))_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Es gilt also $(|k|\,|c_k(f)|)_k \in \ell^2(\mathbb{Z})$, insbesondere ist die Folge beschränkt. Es gibt also eine Konstante $C > 0$, so dass, für $k \neq 0$,

$$|c_k(f)| \leq \frac{C}{|k|}\,.$$

Für die Partialsummen gilt daher, für beliebiges $N \geq M > 0$ und beliebiges $x \in I$,

$$|f_N(x) - f_M(x)| = \left|\sum_{M<|k|\leq N} c_k(f)\, e^{ikx}\right|^2 \leq \sum_{M<|k|\leq N} |c_k(f)|^2 \leq \sum_{M<|k|\leq N} \frac{C^2}{|k|^2}\,.$$

Da die Folge $|k|^{-2}$ summierbar ist, konvergiert dieser Ausdruck gegen 0 für $M \to \infty$. Da die gefundene Schranke unabhängig von x ist, ist die Konvergenz der Partialsummen eine gleichmäßige Konvergenz. □

9. Abschliessende Bemerkungen, Literatur

Ich bin ein großer Fan der Analysis Reihe von Forster. Die Darstellung von Fourier-Reihen in [1] hat für mich den Nachteil, dass sie gewisse Konvergenzen verschiedener Reihen in $\mathbb{C}$ ausnutzt. Man muss hier relativ viel nachlesen, um einen geschlossenen Beweis für die Vollständigkeit zu haben.

Wir benutzen hier einen Zugang, der auch in [2] benutzt wird. Dieser Beweis hat den Vorteil, dass man klar sieht, wie die lokale Regularität von f die punktweise Konvergenz impliziert – und daraus ergibt sich die Vollständigkeit. Im Buch wird jedoch relativ viel zwischen abstraktem Hilbertraum und Funktionenraum gewechselt, zudem kommt es dem Autor auch auf stärkere Aussagen an. Man kann die hier vorliegende Darstellung als eine Verschlankung von [2] sehen.

References

[1] O. Forster. *Analysis 1.* Grundkurs Mathematik. Vieweg-Teubner, Wiesbaden, 2011. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen.

[2] W. Walter. *Analysis 2.* Springer Berlin Heidelberg, 2002.