

# Skalare Erhaltungsgleichungen

**Ben Schweizer**

Kapitel 2 der Vorlesung

Einführung in die Partiellen Differentialgleichungen

Material für das Sommersemester 2021

Version vom 4.5.2021

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Skalare Erhaltungsgleichungen im Eindimensionalen</b>	<b>3</b>
1.1	Charakteristiken . . . . .	3
1.2	Rankine-Hugoniot Bedingung . . . . .	7
1.3	Schockbedingungen und Eindeutigkeit . . . . .	11
1.4	Entropiebedingungen . . . . .	14
1.5	Viskositätsmethode . . . . .	16

# 1 Skalare Erhaltungsgleichungen im Eindimensionalen

## 1.1 Charakteristiken

In diesem Kapitel betrachten wir die Gleichung

$$\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0. \quad (1.1)$$

Die Unbekannte ist eine Funktion  $u : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \mapsto u(x, t)$ . Meist wird die Gleichung mit einer Anfangsbedingung der Form  $u(\cdot, 0) = u_0$  versehen, in diesem Fall ist  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vorgegeben.

Gleichung (1.1) heißt eine Erhaltungsgleichung: Die Größe  $u$  beschreibt eine physikalische Größe mit einer Erhaltungseigenschaft, zum Beispiel Masse, Impuls oder Energie. Die Funktion  $f$  beschreibt den Fluss, also zum Beispiel, wie viel Masse pro Zeit nach rechts transportiert wird. Es wird angenommen, dass der Fluss nur von  $u$  abhängt. Für ein Rechteck  $(a, b) \times (t_1, t_2)$  gilt, dass die Masse zur Zeit  $t_2$  gleich der Masse zur Zeit  $t_1$  ist, plus in das Volumen  $(a, b)$  hineinströmende Masse, also

$$\int_a^b u(\cdot, t_2) - \int_a^b u(\cdot, t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} f(u(b, \cdot)) + \int_{t_1}^{t_2} f(u(a, \cdot)) \quad (1.2)$$

Die differenzielle Form dieses Erhaltungsgesetzes ist gerade (1.1). Dies kann elementar verifiziert werden, indem man (1.2) erst nach  $b$ , dann nach  $t_2$  differenziert.

Der Zusammenhang zwischen (1.1) und (1.2) kann auch mit dem Gauß'schen Satz gesehen werden: Die Terme in (1.2) ergeben zusammen ein Randintegral über  $\partial Q$  für  $Q = (a, b) \times (t_1, t_2)$  mit dem raum-zeitlichen Normalenvektor  $\nu_{x,t}$ ,

$$0 \stackrel{(1.2)}{=} \int_{\partial Q} \begin{pmatrix} f(u) \\ u \end{pmatrix} \cdot \nu_{x,t} \stackrel{(\text{Gauß})}{=} \int_Q \nabla_{x,t} \cdot \begin{pmatrix} f(u) \\ u \end{pmatrix} = \int_Q \partial_t u + \partial_x [f(u)]. \quad (1.3)$$

Da das Rechteck  $Q$  beliebig war, muss (1.1) fast überall gelten.

Wir werden später, um Gleichung (1.1) für unstetige  $u$  ausdrücken zu können, die Formulierung (1.2) verwenden.

**Notation:** In diesem Kapitel werden wir immer Gleichung (1.1) analysieren. Wenn wir von der *Erhaltungsgleichung* sprechen, so ist (1.1) gemeint. Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird als vorgegeben angesehen, wir setzen immer die Glattheit von  $f$  voraus.

## Charakteristiken

Für differenzierbare Funktionen  $f$  lässt sich (1.1) schreiben als

$$\partial_t u + f'(u) \partial_x u = 0. \quad (1.4)$$

Wenn wir einen Weg  $\gamma : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  finden, so dass  $\partial_t \gamma(t) = f'(u(\gamma(t), t))$  gilt, so muss  $u$  entlang des Weges konstant sein. Tatsächlich:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [u(\gamma(t), t)] &= \partial_x u(\gamma(t), t) \partial_t \gamma(t) + \partial_t u(\gamma(t), t) \\ &= f'(u(\gamma(t), t)) \partial_x u(\gamma(t), t) + \partial_t u(\gamma(t), t) = 0. \end{aligned}$$

Wir nennen Wege mit dieser Eigenschaft *Charakteristiken*.

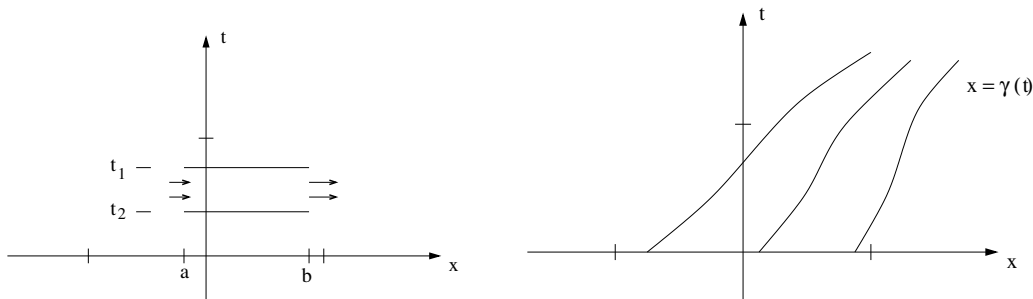


Abbildung 1.1: Links: Illustration des Prinzips der Erhaltungsgleichung entsprechend (1.2): Die Gesamtmasse in  $(a, b)$  zur Zeit  $t_2$  unterscheidet sich von der Gesamtmasse in  $(a, b)$  zur Zeit  $t_1$  durch den Netto-Zufluss durch die Randpunkte  $a$  und  $b$  im Zeitintervall  $(t_1, t_2)$ . Rechts: Idee der Charakteristiken: Entlang von Wegen  $x = \gamma(t)$  in der Raum-Zeit ist die Lösung  $u$  konstant.

**Definition 1.1** (Charakteristik). Für einen Startpunkt  $y \in \mathbb{R}$  betrachten wir eine Lösung  $\gamma_y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  der Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \gamma_y(t) &= f'(u_0(y)), \\ \gamma_y(0) &= y. \end{aligned}$$

Eine solche Kurve  $\gamma_y$  heißt eine Charakteristik der Gleichung.

**Bemerkung 1.2.** Die Charakteristiken aus Definition 1.1 sind affin lineare Funktionen, nämlich

$$\gamma_y(t) = y + t f'(u_0(y)). \quad (1.5)$$

**Bemerkung 1.3.** Für  $f \in C^2$  sind differenzierbare Lösungen  $u$  von (1.1) entlang aller Charakteristiken  $\gamma \in C^1$  konstant.

*Beweis.* Wir rechnen wie zuvor, müssen allerdings mit dem Argument von  $f'$  vorsichtig sein,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [u(\gamma(t), t)] &= \partial_x u(\gamma(t), t) \partial_t \gamma(t) + \partial_t u(\gamma(t), t) \\ &= f'(u_0(y)) \partial_x u(\gamma(t), t) - f'(u(\gamma(t), t)) \partial_x u(\gamma(t), t) \\ &= (f'(u_0(y)) - f'(u(\gamma(t), t))) g(t). \end{aligned}$$

In dieser Gleichung fassen wir  $g(t) := \partial_x u(\gamma(t), t)$  als fixiert auf.

Ergebnis: Die Funktion  $v : t \mapsto u(\gamma(t), t)$  erfüllt eine gewöhnliche Differentialgleichung, für die auch die konstante Funktion  $\tilde{v} : t \mapsto u_0(y)$  eine Lösung ist. Der Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen liefert  $v = \tilde{v}$ , also  $u(\gamma(t), t) = u_0(y)$  und damit die Behauptung.  $\square$

Der nachfolgende Satz besagt, dass man zu jedem  $(x, t)$ , falls  $t$  nicht zu groß ist, einen Ursprungspunkt  $y$  findet, so dass die Charakteristik, die in  $y$  startet, zur Zeit  $t$  gerade in  $x$  ist. Damit lassen sich Lösungen konstruieren.

**Satz 1.4** (Konstruktion von Lösungen mit Charakteristiken). *Für  $f \in C_b^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  und stetig differenzierbare Anfangswerte  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Klasse  $u_0 \in C_b^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  gilt: Es existiert ein  $T > 0$ , so dass die Abbildung*

$$\Gamma : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \times (0, T), \quad (y, t) \mapsto (\gamma_y(t), t) \quad (1.6)$$

*bijektiv und differenzierbar ist. Durch  $u(x, t) := u_0(y)$  mit  $\gamma_y(t) = x$  ist eine Lösung von (1.1) auf dem Zeitintervall  $(0, T)$  gegeben.*

*Beweis.* Wir fixieren  $t > 0$  und betrachten die erste Komponente von  $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ , also  $h := \Gamma_1(\cdot, t) : y \mapsto y + t f'(u_0(y))$ . Die Ableitung von  $h$  ist  $\partial_y h(y) = 1 + t f''(u_0(y)) u_0'(y)$ . Da sowohl  $f''$  als auch  $u_0'$  beschränkt sind, kann  $T$  so klein gewählt werden, dass für alle  $t < T$  gilt:  $\partial_y h(y) > 0$ . Mit dieser Wahl ist  $h = \Gamma_1(\cdot, t)$  streng monoton wachsend für alle  $t < T$ , also invertierbar.

Die Abbildung  $u(x, t) := u_0(y)$  erfüllt  $u(\gamma_y(t), t) = u_0(y)$ . Differenzieren nach  $t$  liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_x u(\gamma_y(t), t) \partial_t \gamma_y(t) + \partial_t u(\gamma_y(t), t) = f'(u_0(y)) \partial_x u(\gamma_y(t), t) + \partial_t u(\gamma_y(t), t) \\ &= f'(u(x, t)) \partial_x u(x, t) + \partial_t u(x, t) = \partial_x [f(u(x, t))] + \partial_t u(x, t). \end{aligned}$$

Damit ist die Gleichung nachgewiesen.  $\square$

## Die Burgers Gleichung

Wir betrachten nun ein wichtiges Beispiel für (1.1), die Burgers Gleichung. Sie ist gegeben durch  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , also die Gleichung  $\partial_t u + \partial_x [u^2/2] = 0$ . Falls die Regularität die Differentiation zulässt, lautet die Gleichung

$$\partial_t u + u \partial_x u = 0. \quad (1.7)$$

**Globale Lösungen der Burgers Gleichung.** Wir betrachten die Burgers Gleichung (1.7) mit speziellen Anfangswerten. Für eine Zahl  $x_0 > 0$  setzen wir

$$u_0(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ \frac{x}{x_0} & \text{für } x \in (0, x_0), \\ 1 & \text{für } x \geq x_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Für diese Anfangswerte können die Charakteristiken global angegeben werden, sie schneiden sich nicht, entsprechend kann eine globale Lösung von (1.7) konstruiert werden.

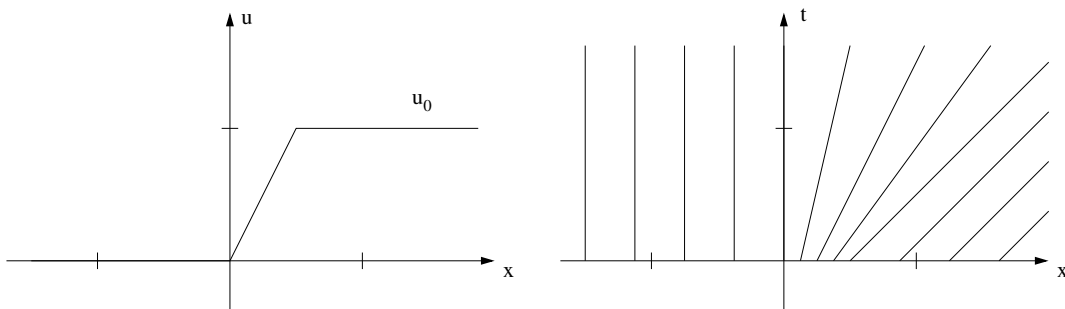


Abbildung 1.2: Konstruktion von globalen Lösungen für die Burgers Gleichung. Es gibt für jeden Punkt  $(x, t)$  genau eine Charakteristik  $\gamma_y(t)$  mit  $\gamma_y(t) = x$ .

**Entwicklung von Schocks in der Burgers Gleichung.** Wieder betrachten wir die Burgers Gleichung (1.7) mit speziellen Anfangswerten. Für eine Zahl  $x_0 > 0$  setzen wir

$$u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 - \frac{x}{x_0} & \text{für } x \in (0, x_0), \\ 0 & \text{für } x \geq x_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Für diese Anfangswerte schneiden sich alle Charakteristiken, die im Intervall  $[0, x_0]$  starten, im Punkt  $(x, t) = (x_0, x_0)$ . Eine Lösung der Gleichung kann auf dem Zeitintervall  $(0, T)$  mit  $T := x_0$  angegeben werden. Zum Zeitpunkt  $T$  entsteht ein Schock (Unstetigkeit von  $u$ ).

Das Beispiel zeigt, dass wir nicht die Glattheit von Lösungen erwarten können. Wir müssen die Frage klären, wie wir eine Lösung zu un stetigen Anfangsdaten konstruieren können.

**Übung 1.1.** Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über Umkehrfunktionen, dass die Funktion  $\Gamma$  aus Satz 1.4 eine differenzierbare Inverse besitzt.

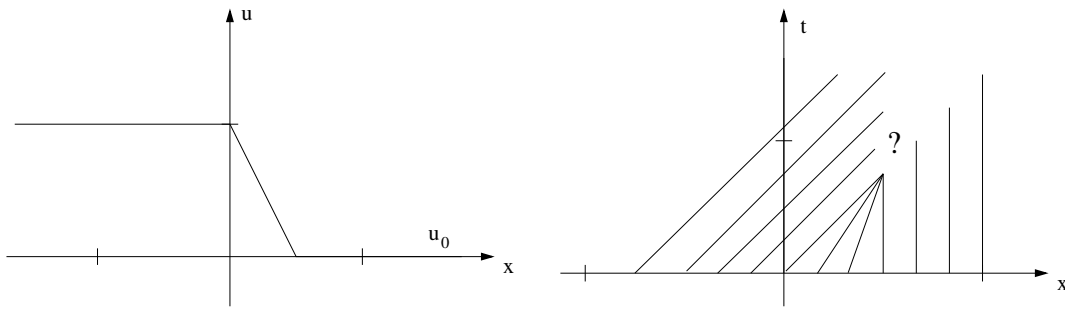


Abbildung 1.3: Entwicklung von Schocks in der Burgers Gleichung. Die Charakteristiken treffen sich im Punkt  $(x, t) = (x_0, x_0)$ . Dort entsteht ein Schock.

## 1.2 Rankine-Hugoniot Bedingung

Das Beispiel der Burgers Gleichung zeigt bereits, dass wir unstetige Lösungen  $u$  erwarten — selbst bei der Vorgabe glatter Anfangswerte. Wir nehmen an, dass für eine Kurve  $\gamma : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösung  $u$  die folgende Form hat:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l(x, t) & \text{für } x < \gamma(t), \\ u_r(x, t) & \text{für } x \geq \gamma(t). \end{cases} \quad (1.10)$$

Dabei sind beide Funktionen  $u_l$  und  $u_r$  klassische Lösungen auf dem jeweiligen Teilgebiet.

Für unstetige Funktionen  $u$  müssen wir zunächst festlegen, wie wir die Differentialgleichung (1.1) überhaupt interpretieren wollen. Wir definieren einen schwachen Lösungsbegriff in Anlehnung an (1.2) wie folgt.

**Definition 1.5** (Integrale Lösung). *Eine Abbildung  $u : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt integrale Lösung der Erhaltungsgleichung (1.1), falls für fast alle  $t \in (0, T)$  und fast alle  $a < b$  in  $\mathbb{R}$  die Gleichung*

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(\xi, t) d\xi = -[f(u(b, t)) - f(u(a, t))] \quad (1.11)$$

erfüllt ist. Wir fordern dabei, dass die linke Seite für fast alle  $t$ ,  $a$  und  $b$  definiert ist.

Tatsächlich gilt: Jede glatte Funktion  $u$ , die (1.11) erfüllt, ist auch Lösung der differentiellen Erhaltungsgleichung. Dies folgt aus (1.11) durch Differenzieren nach  $b$ .

Falls noch weniger Regularität von  $u$  gefordert werden soll, so kann man zusätzlich Zeitintegrale bilden und fordert: Es gilt (1.2) für fast alle  $t_1 < t_2$  und fast alle  $a < b$ .

**Satz 1.6** (Rankine-Hugoniot Bedingung). *Sei  $u$  eine integrale Lösung von der Form (1.10) ( $u_l$  und  $u_r$  stetig differenzierbar, stetig bis in den Sprungpunkt und klassische*

## Skalare Erhaltungsgleichungen

Lösungen), die Sprungkurve  $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$  sei stetig differenzierbar. Dann gilt für die Geschwindigkeit  $\gamma'(t)$  der Sprungkurve die RH-Bedingung

$$\gamma'(t) = \frac{[f]}{[u]}. \quad (1.12)$$

Hierbei ist  $[u](t) = u_r(\gamma(t), t) - u_l(\gamma(t), t)$  der Sprung von  $u$  und  $[f](t) = f(u_r(\gamma(t), t)) - f(u_l(\gamma(t), t))$  der Sprung von  $f$ .

*Beweis.* Wir stellen zunächst fest, dass  $u_l$  und  $u_r$  auf den jeweiligen Teilgebieten klassische Lösungen der Erhaltungsgleichungen sind, weil glatte integrale Lösungen die Erhaltungsgleichung erfüllen.

Für den Beweis müssen wir lediglich für die Lösung  $u$  von der Form (1.10) beide Seiten von (1.11) auswerten. Die linke Seite berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b u(\xi, t) d\xi &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_a^{\gamma(t)} u_l(\xi, t) d\xi + \int_{\gamma(t)}^b u_r(\xi, t) d\xi \right\} \\ &= \int_{(a,b) \setminus \{\gamma(t)\}} \partial_t u(\xi, t) d\xi + (\partial_t \gamma(t))(u_l(\gamma(t), t) - u_r(\gamma(t), t)) \\ &= \int_{(a,b) \setminus \{\gamma(t)\}} \partial_t u(\xi, t) d\xi - \partial_t \gamma(t) [u](t). \end{aligned}$$

Die rechte Seite ist das Negative von

$$\begin{aligned} &f(u(b, t)) - f(u(a, t)) \\ &= f(u_r(b, t)) - f(u_r(\gamma(t), t)) + [f] + f(u_l(\gamma(t), t)) - f(u_l(a, t)) \\ &= \int_{(a,b) \setminus \{\gamma(t)\}} \partial_x [f(u(\xi, t))] d\xi + [f]. \end{aligned}$$

Gleichung (1.11) besagt, dass die Summe dieser beiden Ausdrücke verschwindet. Die Summe der Integrale verschwindet, da die Gleichung  $\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0$  auf beiden Seiten der Kurve  $\gamma$  erfüllt ist. Wir folgern

$$0 = -\partial_t \gamma [u] + [f],$$

also die Behauptung aus (1.12). □

**Bemerkung 1.7.** *Es gilt auch eine Umkehrung von Satz 1.6: Falls  $u$  von der Form (1.10) ist, wobei  $u_l$  und  $u_r$  klassische Lösungen sind, und falls die RH-Bedingung (1.12) erfüllt ist, so ist  $u$  eine integrale Lösung. Der Beweis dieser Umkehrung besteht aus derselben Rechnung wie der Beweis von Satz 1.6.*

**Bemerkung 1.8.** *Die Rankine-Hugoniot-Bedingung beschreibt die Massenerhaltung bei springenden Lösungen. Wir betrachten eine Lösung, die rechts von  $\gamma$  konstant ist mit dem Wert  $u_r \in \mathbb{R}$ , links von  $\gamma$  konstant mit dem Wert  $u_l \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Massenänderung in der Zeitspanne  $(t_1, t_2)$  in einem Intervall  $(a, b)$  gleich  $(u_l - u_r) \gamma'(t) (t_2 - t_1)$ . Die Massenänderung muss mit dem Massenzufluss übereinstimmen, also mit  $(f(u_l) - f(u_r)) (t_2 - t_1)$ . Genau dies ist durch die Rankine-Hugoniot-Bedingung ausgedrückt.*



## Die Burgers Gleichung

Wir betrachten nochmals die Burgers Gleichung (1.7). Wir werden verschiedene Lösungen kennenlernen: Glatte Lösungen, Verdünnungswellen und Schocklösungen. Insbesondere werden wir physikalische und unphysikalische Schocklösungen angeben.

**Schocklösungen der Burgers Gleichung.** Wir betrachten die Burgers Gleichung (1.7) mit

$$u_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq 0, \\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Für diese Anfangswerte können wir eine Schocklösung angeben: Rechts vom Schock gilt  $u \equiv 0$ , links vom Schock gilt  $u \equiv 1$ , der Schock hat die Position  $\gamma(t) = \frac{1}{2}t$ . Dabei ergibt sich die Geschwindigkeit des Schocks aus der Rankine-Hugoniot Bedingung  $\gamma' = [f]/[u] = (\frac{1}{2}0 - \frac{1}{2}1)/(0 - 1) = \frac{1}{2}$ .

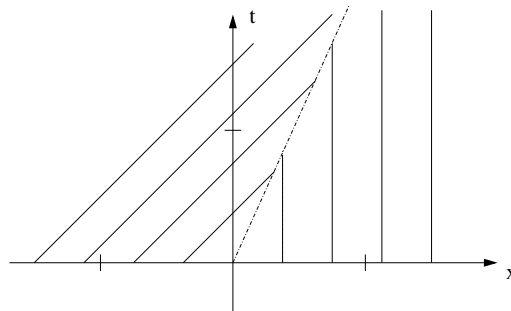


Abbildung 1.4: Eine Schocklösung der Burgers Gleichung zu springenden Anfangsdaten  $u_0$ . Die Geschwindigkeit des Schocks ist durch die Rankine-Hugoniot-Bedingung gegeben.

**Eine unphysikalische Lösung der Burgers Gleichung.** Wir betrachten (1.7) mit

$$u_0(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (1.14)$$

Auch für diese Anfangswerte können wir eine Schocklösung angeben: Rechts vom Schock gilt  $u \equiv 1$ , links vom Schock gilt  $u \equiv 0$ , die Schockposition ist wieder  $\gamma(t) = \frac{1}{2}t$  aus der Rankine-Hugoniot Bedingung  $\gamma' = [f]/[u] = (\frac{1}{2}1 - \frac{1}{2}0)/(1 - 0) = \frac{1}{2}$ . Allerdings ist die Lösung nicht physikalisch sinnvoll, denn die Charakteristiken laufen nicht in den Schock hinein.

**Eine Verdünnungswelle.** Wir betrachten nochmals (1.7) mit

$$u_0(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0, \\ 1 & \text{für } x > 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

## Skalare Erhaltungsgleichungen

Wir können eine Lösung in der Form einer Verdünnungswelle angeben: Die Methode der Charakteristiken liefert  $u \equiv 1$  auf  $\{x > t\}$  und  $u \equiv 0$  für  $\{x < 0\}$ . Dazwischen setzen wir  $u(yt, t) = y$  für  $y \in [0, 1]$  (also  $u(x, t) := x/t$ ).

Wir rechnen nach:

$$\partial_t u = \partial_t \left( \frac{x}{t} \right) = \frac{-x}{t^2}, \quad \partial_x [f(u)] = \partial_x \left( \frac{x^2}{2t^2} \right) = \frac{x}{t^2}.$$

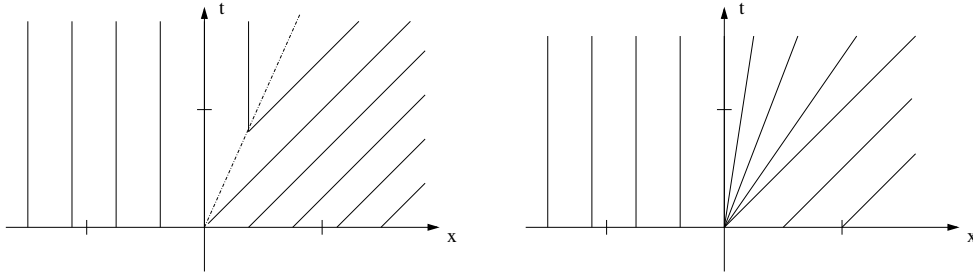


Abbildung 1.5: Zwei verschiedene Lösungen zu denselben springenden Anfangsdaten  $u_0$ . Links: Eine unphysikalische Schocklösung mit Rankine-Hugoniot Geschwindigkeit. Rechts: Die physikalisch sinnvolle Lösung, eine Verdünnungswelle.

**Corollar 1.9.** Zu Anfangsdaten  $u_0$  ist die integrale Lösung  $u$  im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Für die Burgers Gleichung liefert sowohl die unphysikalische Schocklösung als auch die Verdünnungswelle eine integrale Lösung der Erhaltungsgleichung.  $\square$

Damit sind wir bei einer der zentralen Fragen in der Theorie der Erhaltungsgleichungen:

Mit welcher zusätzlichen Forderung an Lösungen mit Schock kann die Eindeutigkeit gewährleistet werden?

**Übung 1.2.** Ein Modell für den Verkehrsfluss auf Autobahnen ist wie folgt:  $u = u(x, t)$  sei die Dichte von Autos um den Punkt  $x$  zur Zeit  $t$ . Die Geschwindigkeit eines Autos sei maximal  $c_{max}$ . Wir wollen modellieren, dass die typische Geschwindigkeit der Autos geringer ist, wenn viele Autos unterwegs sind, wir gehen hier von dem einfachen Gesetz  $c(u) = c_{max} \left( 1 - \frac{u}{u_{jam}} \right)$  aus. Die Flussfunktion ist Autodichte mal Autogeschwindigkeit, also  $f(u) = uc(u)$ . Wir betrachten das Riemannproblem zu  $\partial_t u + \partial_x [f(u)] = 0$  mit Anfangswerten  $u_0$  von der Form  $u_0(x) = u_l$  für  $x \leq 0$  und  $u_0(x) = u_r$  für  $x > 0$ .

(a) Lösen Sie für  $u_r = u_{jam}$ .

(b) Lösen Sie für  $u_l = u_{jam}/4$  und  $u_r = u_{jam}/2$ .

Mit welcher Geschwindigkeit wandert das Stauende? Mit welcher Geschwindigkeit fahren Autos rechts und links vom Stauende?

### 1.3 Schockbedingungen und Eindeutigkeit

Unsere erste Zusatzbedingung für Schocks setzt das obige Bild in Formeln um: Wir akzeptieren einen Schock als physikalisch sinnvoll, wenn Charakteristiken in den Schock hinein laufen.

**Definition 1.10** (Lax-Schock-Ungleichungen). *Ein Schock heißt zulässig, wenn er die Lax-Schock-Ungleichungen erfüllt. Diese lauten mit der Rankine-Hugoniot Geschwindigkeit  $\lambda = \frac{[f]}{[u]}$ :*

$$f'(u_l) > \lambda > f'(u_r). \quad (1.16)$$

Ausgehend von den Lax-Schock-Ungleichungen wollen wir nun eine Klasse von Lösungen definieren. Die Klasse verlangt zum einen eine gewisse Regularität zwischen den Schocks, zum anderen die Zulässigkeit der Schocks.

**Definition 1.11** (Zulässige Schock-Lösungen). *Wir nennen  $u : \mathbb{R} \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  eine zulässige Lösung mit Schocks, wenn folgendes gilt:*

**Glattheit:**  *$u$  ist stetig differenzierbar bis auf endlich viele differenzierbare Sprunglinien  $\gamma_k : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k = 1, \dots, K$ , weiterhin ist  $u$  halbseitig stetig bis in die Sprunglinien hinein. Entlang der Sprunglinie  $k$  hat  $u$  den Sprung  $[u]_k(t)$ .*

**Lösungsbegriff:**  *$u$  ist integrale Lösung des Erhaltungsgesetzes. Insbesondere ist  $u$  klassische Lösung zwischen den Sprunglinien und die Sprunglinien erfüllen die Rankine-Hugoniot Bedingung  $\gamma'_k(t) = \frac{[f(t)]_k}{[u(t)]_k}$ .*

**Zulässigkeit:**  *$u$  erfüllt die Schock-Ungleichungen (1.16) in allen Sprungstellen.*

Wir wollen nun nachweisen, dass dies ein sinnvolles Lösungskonzept ist. Dazu zeigen wir, dass das Lösungskonzept die Eindeutigkeit von Lösungen garantiert.

**Satz 1.12** (Kruzkov- $L^1$ -Kontraktion und Eindeutigkeit). *Seien  $u$  und  $v$  zwei zulässige Schock-Lösungen des Erhaltungsgesetzes wie in Definition 1.11, mit  $u(\cdot, t), v(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R})$  für alle  $t$ . Die Funktion  $f$  sei konvex. Dann gilt die  $L^1$ -Kontraktionseigenschaft: Die Funktion*

$$(0, T) \ni t \longmapsto \|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (1.17)$$

*ist monoton fallend. Für zwei Lösungen  $u$  und  $v$  schließen wir: In der Klasse der zulässigen Lösungen sind Lösungen der Erhaltungsgleichung durch die Startwerte eindeutig bestimmt.*

**Beweisskizze.** Für jedes  $t \in (0, T)$  betrachten wir die (stückweise stetige) Funktion  $x \mapsto u(x, t) - v(x, t)$ . Wir definieren Kurven  $t \mapsto y_k(t)$  so, dass in den Punkten  $-\infty = y_0(t) < y_1(t) < y_2(t) < \dots < y_{K-1}(t) < y_K(t) = +\infty$  entweder die Funktion  $(u - v)(\cdot, t)$  ihr Vorzeichen wechselt oder eine der beiden Funktionen  $u(\cdot, t)$  und  $v(\cdot, t)$  einen Sprung hat, oder beide Ereignisse. In dieser Beweisskizze nehmen wir zur Vereinfachung an, dass dies nur an endlich vielen Punkten geschieht und dass die Kurven  $y_k$  alle in  $t$  differenzierbar sind.

## Skalare Erhaltungsgleichungen

Wir definieren nun einen Vorzeichenindex: In Intervallen  $(y_{k-1}(t), y_k(t))$ , auf denen  $u - v$  positiv ist, setzen wir  $\delta_k := +1$ , entsprechend  $\delta_k := -1$  auf Intervallen  $(y_{k-1}(t), y_k(t))$ , auf denen  $u - v$  negativ ist.

Die Definition der Faktoren  $\delta_k$  erlaubt es uns, die  $L^1(\mathbb{R})$ -Norm von  $u - v$  zu schreiben als

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \sum_{k=1}^K \int_{y_{k-1}}^{y_k} \delta_k \cdot (u(x, t) - v(x, t)) dx .$$

Diesen Ausdruck differenzieren wir nach  $t$ . Wir schreiben zur Abkürzung für linksseitige Limiten  $u(y_0 - 0) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u(y_0 - \varepsilon)$  und entsprechend für rechtsseitige Limiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \sum_{k=1}^K \int_{y_{k-1}}^{y_k} \delta_k \cdot (\partial_t u(x, t) - \partial_t v(x, t)) dx \\ &+ \sum_{k=1}^K \delta_k \cdot \left\{ (u - v)(y_k(t) - 0, t) \partial_t y_k(t) - (u - v)(y_{k-1}(t) + 0, t) \partial_t y_{k-1}(t) \right\} . \end{aligned}$$

In den einzelnen Intervallen ersetzen wir mit  $\partial_t u = -\partial_x(f(u))$  und verwenden den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|u(t) - v(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} &= - \sum_{k=1}^K \delta_k \cdot (f(u) - f(v)) \Big|_{y_{k-1}(t)}^{y_k(t)} \\ &+ \sum_{k=1}^K \delta_k \cdot \left\{ (u - v)(y_k(t) - 0, t) \partial_t y_k(t) - (u - v)(y_{k-1}(t) + 0, t) \partial_t y_{k-1}(t) \right\} \\ &=: \sum_{k=1}^K \sum_{\pm} B_k^{\pm} , \end{aligned}$$

wobei wir für fixiertes  $k$  den Beitrag vom rechten Intervallrand mit  $B_k^+$  bezeichnet haben, also

$$B_k^+ := \delta_k \cdot [-(f(u) - f(v))(y_k - 0, t) + (u - v)(y_k - 0, t) \partial_t y_k(t)] ,$$

den Beitrag vom linken Intervallrand mit  $B_k^-$ . Wir wollen nun das Vorzeichen von  $B_k^+$  bestimmen.

Fall A: Wir betrachten den Fall, dass  $u$  und  $v$  beide in  $y_k$  stetig sind. Da das Vorzeichen von  $u - v$  wechselt gilt in diesem Fall  $u(y_k) = v(y_k)$  und also auch  $f(u(y_k)) = f(v(y_k))$ . Wir finden in diesem Fall  $B_k^+ = 0$ .

Fall B: Betrachten wir nun den Fall, dass  $v$  stetig ist und  $u$  eine Sprungstelle in  $y_k$  hat. Da in  $y_k$  das Vorzeichen wechselt, muss  $v := v(y_k)$  zwischen den beiden Werten  $u_l := u(y_k - 0)$  und  $u_r := u(y_k + 0)$  liegen. Die Lax-Schock-Ungleichung  $f'(u_l) > f'(u_r)$  impliziert für konvexes  $f$  (wegen Monotonie von  $f'$ ) die Relation

$u_l > u_r$ . Es gilt also insbesondere (Vorzeichenwechsel)  $u_l > v > u_r$  und  $\delta_k = +1$ . Einsetzen der Rankine-Hugoniot Bedingung  $\partial_t \gamma = (f_r - f_l)/(u_r - u_l)$  und Teilen durch  $(u_l - v) > 0$  liefert für das Vorzeichen von  $B_k^+$

$$\operatorname{sgn} B_k^+ := \operatorname{sgn} \left[ -\frac{f(u_l) - f(v)}{u_l - v} + \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l} \right].$$

Wegen Konvexität von  $f$  ist die Sekantensteigung von  $f$  zwischen  $v$  und  $u_l$  größer als die zwischen  $u_r$  und  $u_l$ . Wir schließen, dass der Beitrag  $B_k^+$  negativ ist.

Analoge Rechnungen können für linke Randpunkte durchgeführt werden und im Fall, dass  $v$  springt, zusätzlich auch in dem Fall, dass sowohl  $u$  wie auch  $v$  in  $y_k$  springt. Wir schließen, dass die  $L^1$ -Norm der Differenz höchstens abnehmen kann. Dies zeigt die Behauptung des Satzes.  $\square$

**Die Oleinik-Schock-Ungleichungen.** Im Fall von konvexen Flussfunktionen  $f$  ist mit den Lax-Schock-Ungleichungen eine gute Bedingung gefunden, mit der die Eindeutigkeit von Lösungen sichergestellt werden kann. Im Fall von nicht-konvexen Flussfunktionen  $f$  sollte hingegen eine andere Bedingung gestellt werden.

**Definition 1.13** (Oleinik-Schock-Ungleichungen). *Für eine Schocklösung  $u$  mit Sprung  $[u] = u_r - u_l$  und Schockgeschwindigkeit  $\lambda = [f]/[u]$  sagen wir, dass die Oleinik-Ungleichungen erfüllt sind, falls*

$$\frac{f(v) - f(u_l)}{v - u_l} \geq \lambda \quad \forall v \in [u_l, u_r]. \quad (1.18)$$

Da wir das Vorzeichen von  $u_r - u_l$  nicht kennen, verwenden wir die Strecke  $[u_l, u_r] = \{v = tu_l + (1-t)u_r | t \in [0, 1]\}$ .

**Bemerkung 1.14.** *Die Oleinik-Schock-Ungleichungen implizieren die Lax-Schock-Ungleichungen (als nicht-strikte Ungleichungen).*

Die Oleinik-Schock-Ungleichungen können geometrisch interpretiert werden: Für  $u_r < u_l$  bedeuten sie, dass die Funktion  $f$  im Intervall  $[u_r, u_l]$  unterhalb ihrer Sekante liegt. Für  $u_r > u_l$  bedeuten sie, dass die Funktion  $f$  im Intervall  $[u_l, u_r]$  oberhalb ihrer Sekante liegt. Diese geometrische Überlegung impliziert folgenden Zusammenhang:

**Bemerkung 1.15.** *Die Bedingung ist symmetrisch in  $u_l$  und  $u_r$  in dem Sinne, dass man genauso auch  $(f(v) - f(u_r))(v - u_r) \leq \lambda$  für alle  $v \in [u_l, u_r]$  fordern kann.*

Physikalische Interpretation: Die Oleinik-Ungleichungen besagen, dass es keinen Zustand  $v$  gibt, so dass ein  $u_l$ - $v$ -Schock langsamer nach rechts läuft, als der  $u_l$ - $u_r$ -Schock. Gäbe es einen solchen Schock, so könnte man erwarten, dass dieser sich auch ausbildet (links von dem postulierten Schock). Rechts davon könnte sich zum Beispiel eine Verdünnungswelle ausbreiten und so in stetiger Art die Zustände  $v$  und  $u_r$  verbinden.

**Übung 1.3.** Wir betrachten Schock-Lösungen  $u$  mit den Werten  $u_l$  und  $u_r$  auf den beiden Seiten der Schocklinie; der Schock bewege sich mit der Rankine-Hugoniot-Geschwindigkeit  $\lambda = [f]/[u]$ . Zeigen Sie: Für glatte strikt konvexe Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

- (i) Lax-Schock-Bedingung  $f'(u_l) > \lambda > f'(u_r)$
- (ii) Charakteristikenrelation:  $f'(u_l) > f'(u_r)$
- (iii) Wertrelation  $u_l > u_r$ .

Beweisen Sie analytisch Bemerkung 1.14.

## 1.4 Entropiebedingungen

In diesem Abschnitt lernen wir eine Entropiebedingung kennen. Auch mit Entropiebedingungen kann die Eindeutigkeit von Lösungen von (1.1) garantiert werden.

**Definition 1.16** (Mathematische Entropie). Eine glatte Abbildung  $(S, F) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt ein Entropie-Paar (genauer: Entropie-Entropiefluss-Paar), wenn jede stetig differenzierbare Lösung  $u$  der Erhaltungsgleichung auch diese zusätzliche Erhaltungsgleichung erfüllt:

$$\partial_t[S(u)] + \partial_x[F(u)] = 0. \quad (1.19)$$

**Beispiel.** Zunächst ist nicht klar, wie ein Paar  $(S, F)$  eine solche Bedingung erfüllen kann. Es ist aber im Gegenteil (im skalaren Fall) sehr einfach, solche Paare zu finden. Wir betrachten die Burgers Gleichung und versuchen unser Glück mit der (hier willkürlich gewählten) Funktion  $S : u \mapsto u^4$ . Wir rechnen für glatte Lösungen:  $\partial_t[S(u)] = 4u^3 \partial_t u = -4u^3 \cdot u \partial_x u = -4u^4 \partial_x u = -\frac{4}{5} \partial_x [u^5]$ . Die Funktion  $S(u) = u^4$  ist also eine Entropie zum Entropiefluss  $F(u) = -\frac{4}{5} u^5$ .

Die Beobachtung lässt sich verallgemeinern. Für skalare Gleichungen (und nur solche behandeln wir hier) lässt sich (1.19) immer nach  $F$  auflösen: Wegen  $\partial_t[S(u)] = S'(u) \partial_t u = -S'(u) f'(u) \partial_x u$  und  $\partial_x[F(u)] = F'(u) \partial_x u$  konstruieren wir für eine Entropie  $S$  die Flussfunktion  $F$  mit Hilfe einer Integration,

$$F(\bar{u}) := \int_0^{\bar{u}} S'(v) f'(v) dv. \quad (1.20)$$

Wir werden im Folgenden oft *konvexe Entropien* betrachten. Wir nennen  $(S, F)$  ein konvexes Entropie-Paar, falls  $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvex ist.

**Definition 1.17** (Entropie-Ungleichung). Wir betrachten eine integrale Lösung  $u$  der Erhaltungsgleichung und ein Entropie-Paar  $(S, F)$ . Wir sagen, dass  $u$  die Entropie-Ungleichung für  $(S, F)$  erfüllt, falls gilt:

$$\partial_t[S(u)] + \partial_x[F(u)] \leq 0. \quad (1.21)$$

Wir verstehen diese Gleichung wieder im integralen Sinn, also als

$$\frac{d}{dt} \int_a^b S(u(\xi, t)) d\xi \leq -[F(u(b, t)) - F(u(a, t))] \quad (1.22)$$

für fast alle  $t \in (0, T)$  und  $a < b$ .

**Bemerkung 1.18.** *Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik kann formuliert werden als: Es gibt im physikalischen System eine Größe, die physikalische Entropie, die in Prozessen nur zunehmen kann.*

*Die physikalische Entropie beschreibt die Unordnung im System. Da es oft natürlicher ist, an abnehmende Größen zu denken, arbeitet man oft auch mit dem umgekehrten Vorzeichen, also mit der Neg-Entropie. Auch die mathematische Entropie  $S$  wird als eine Größe definiert, die mit der Zeit abnimmt.*

*Tatsächlich gilt: Sei  $(S, F)$  ein Entropie-Paar und  $u$  eine Lösung, die die Entropie-Ungleichung erfüllt. Falls  $u$  und  $F(u)$  im Unendlichen verschwinden, so gilt*

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} S(u(x, t)) dx \leq 0. \quad (1.23)$$

*Die Gesamt-Entropie des Systems kann also nur abnehmen.*

**Satz 1.19** (Schock-Ungleichungen und Entropie-Ungleichung). *Für Lösungen  $u$  mit endlich vielen Sprungstellen wie in Definition 1.11 sind folgende Bedingungen äquivalent:*

(i) *Die Entropie-Ungleichung aus Definition 1.17 gilt für alle konvexen Entropie-Paare  $(S, F)$ .*

(ii) *Die Oleinik-Schock-Ungleichungen aus Definition 1.13 gelten in allen Schocks*

*Beweis.* Wir wollen zunächst aus der Entropie-Ungleichung die Schock-Ungleichungen herleiten, also (i)  $\Rightarrow$  (ii) zeigen. Die Entropie-Ungleichung gelte also für *alle* konvexen Entropie-Paare  $(S, F)$ . Ohne Einschränkung betrachten wir eine Lösung  $u$  mit nur einem Schock, der zur Zeit  $t$  im Intervall  $(a, b)$  liegt.

Für das Paar  $(S, F)$  betrachten wir Ungleichung (1.21) in der schwachen Form und rechnen wie im Nachweis der Rankine-Hugoniot Bedingung in Satz 1.6. Wir betrachten dazu eine Sprungkurve  $t \mapsto \gamma(t)$ , fixieren  $t \in (0, T)$  und setzen zur Abkürzung  $\lambda := \gamma'(t)$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(1.22)}{\geq} \frac{d}{dt} \int_a^b S(u(\xi, t)) d\xi + F(u(b, t)) - F(u(a, t)) \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^{\gamma(t)} S(u(\xi, t)) d\xi + \frac{d}{dt} \int_{\gamma(t)}^b S(u(\xi, t)) d\xi + \int_a^{\gamma(t)} \partial_x [F(u)](\xi, t) d\xi \\ &\quad - (F(u(\gamma(t) - 0)) + F(u(\gamma(t) + 0))) + \int_{\gamma(t)}^b \partial_x [F(u)](\xi, t) d\xi \\ &= \partial_t \gamma(t) (S(u(\gamma(t) - 0)) - S(u(\gamma(t) + 0))) + (F(u(\gamma(t) + 0)) - F(u(\gamma(t) - 0))) \\ &= -\lambda [S] + [F]. \end{aligned}$$

Wir nutzen nun nacheinander die Formel für  $F$  aus (1.20), eine partielle Integration und, um einzusehen, dass die Randterme verschwinden, die Rankine-Hugoniot

## Skalare Erhaltungsgleichungen

Bedingung  $\lambda[u] = [f]$ :

$$\begin{aligned} 0 &\geq -\lambda[S] + [F] = \int_{u_l}^{u_r} (-\lambda S'(v) + F'(v)) dv \\ &= \int_{u_l}^{u_r} S'(v) (-\lambda + f'(v)) dv = - \int_{u_l}^{u_r} S''(v) (-\lambda(v - u_l) + f(v) - f(u_l)) dv \\ &= \int_{u_l}^{u_r} S''(v) (v - u_l) \left( \lambda - \frac{f(v) - f(u_l)}{v - u_l} \right) dv. \end{aligned}$$

Die Funktion  $S$  muss konvex sein, ansonsten ist sie frei wählbar. Daher kann  $S''$  eine beliebige nichtnegative Funktion sein. Im Fall  $u_r > u_l$  gilt  $v - u_l > 0$  und wir schließen aus der Rechnung

$$\left( \lambda - \frac{f(v) - f(u_l)}{v - u_l} \right) \leq 0 \quad \forall v \in [u_l, u_r]. \quad (1.24)$$

Im Fall  $u_r < u_l$  wird das Integrationsgebiet rückwärts durchlaufen, andererseits gilt  $v - u_l < 0$ . Es folgt auch in diesem Fall Relation (1.24). Damit sind die Oleinik-Schock-Ungleichungen (1.18) nachgewiesen.

Es ist noch zu zeigen, dass die Oleinik-Schock-Ungleichungen die Entropie-Ungleichung impliziert. Dazu muss jedoch lediglich die obige Rechnung umgekehrt gelesen werden.  $\square$

Die Schock-Ungleichungen implizieren die Eindeutigkeit der Lösung. Insofern liefert also der Satz die Eindeutigkeit von Lösungen, wenn man für Lösungen immer die Entropieungleichung für alle konvexen Entropien fordert.

Wir erinnern daran, dass die Oleinik-Schock-Ungleichungen die Lax-Schock-Ungleichungen implizieren. Insbesondere impliziert die Entropie-Ungleichung für alle konvexen Entropie-Paare auch die Lax-Schock-Ungleichungen.

Für konvexes  $f$  sind sogar alle drei Bedingungen äquivalent (Lax und Oleinik und Entropie-Ungleichung für alle konvexen Entropien).

**Übung 1.4.** Lösen Sie die Verkehrsfluss-Erhaltungsgleichung aus Übung 1.2 für das Grüne-Ampel-Problem:  $u_0(x) = \rho_{jam}$  für  $x < 0$  und  $u_0(x) = \rho_{jam}/2$  für  $x > 0$ . Geben Sie die Lösung  $u$  an. Skizzieren Sie zusätzlich die Trajektorien für einzelne Fahrzeuge.

## 1.5 Viskositätsmethode

Wir betrachten einen (kleinen) Parameter  $\varepsilon > 0$  und eine viskose Regularisierung von (1.1):

$$\partial_t u^\varepsilon + \partial_x [f(u^\varepsilon)] = \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon. \quad (1.25)$$

Wir nehmen hier immer an, dass  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist. Die Theorie Partieller Differentialgleichungen liefert, dass diese Gleichung Lösungen besitzt, dass die



Lösung eindeutig ist und glatt. Insbesondere treten keine Schocks auf, die Lösungen sind klassische Lösungen.

Gleichung (1.25) ist eine physikalisch motivierte Approximation der Erhaltungsgleichung: Viskose Effekte sind zwar vernachlässigbar zum Beispiel in der Beschreibung der Umströmung eines Überschallflugzeugs — aber sie sind vorhanden. Die physikalisch “richtige” Lösung der Erhaltungssatzes sollte im Grenzprozess  $\varepsilon \rightarrow 0$  erzeugt werden.

**Definition 1.20** (Viskositätsmethode). *Eine Funktion  $u$  heißt Lösung mit Viskositätsmethode, falls die Regularisierungen  $u^\varepsilon$  aus (1.25) gleichmäßig beschränkt sind und punktweise fast überall gegen  $u$  konvergieren, also  $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq C$  mit  $C > 0$  unabhängig von  $\varepsilon$  und*

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(x, t) \quad \text{für fast alle } (x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T). \quad (1.26)$$

**Definition 1.21** (Distributionelle Lösung des Erhaltungssatzes). *Wir nennen eine Funktion  $u = u(x, t)$  mit der Integrierbarkeit  $u, f(u) \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \times (0, T))$  eine distributionelle Lösung des Erhaltungssatzes, falls für jedes  $\varphi \in C^1_c(\mathbb{R} \times (0, T))$  gilt*

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, T)} u \partial_t \varphi + f(u) \partial_x \varphi = 0. \quad (1.27)$$

**Satz 1.22** (Viskositätslösungen und Entropie-Ungleichung). *Sei  $u$  eine Lösung mit Viskositätsmethode. Dann ist  $u$  eine distributionelle Lösung des Erhaltungssatzes.*

*Weiterhin gilt:  $u$  erfüllt (im Distributionssinn) die Entropie-Ungleichung für jede konvexe Entropie  $(S, F)$ , also*

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, T)} S(u) \partial_t \varphi + F(u) \partial_x \varphi \geq 0 \quad \forall 0 \leq \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)). \quad (1.28)$$

*Beweis. Schritt 1: Distributionelle Lösung.* Wir gehen von der Folge  $u^\varepsilon$  von Lösungen der regularisierten Gleichung aus. Wir wollen zunächst (im Distributionssinn) den Erhaltungssatz nachweisen. Dazu sei  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$  eine beliebige Funktion. Wir schreiben die regularisierte Gleichung als

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, T)} \partial_t u^\varepsilon \varphi + \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} \partial_x [f(u^\varepsilon)] \varphi = \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} \varepsilon \partial_x^2 u^\varepsilon \varphi.$$

Mit partiellen Integrationen können wir die Ableitungen auf  $\varphi$  werfen. Wir finden

$$- \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} u^\varepsilon \partial_t \varphi - \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} f(u^\varepsilon) \partial_x \varphi = \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} \varepsilon u^\varepsilon \partial_x^2 \varphi.$$

Nach Voraussetzung gilt  $u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t)$  für fast alle  $(x, t)$ , also wegen Stetigkeit von  $f$  auch  $f(u^\varepsilon(x, t)) \rightarrow f(u(x, t))$  für fast alle  $(x, t)$ . Zudem ist die Folge

## Skalare Erhaltungsgleichungen

beschränkt. Nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue konvergieren auch die Integrale. Ebenso wird mit dem Konvergenzsatz von Lebesgue auch für  $u^\varepsilon \rightarrow u$  und für  $\varepsilon u^\varepsilon \rightarrow 0$  argumentiert. Wir schließen

$$-\int_{\mathbb{R} \times (0, T)} u \partial_t \varphi - \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} f(u) \partial_x \varphi = 0,$$

also die Tatsache, dass  $u$  distributionelle Lösung ist.

*Schritt 2: Entropie-Relation für  $u^\varepsilon$ .* Die Lösungen  $u^\varepsilon$  sind differenzierbar. Wir können daher (1.25) als klassische Identität interpretieren und mit  $S'(u^\varepsilon)$  multiplizieren:

$$S'(u^\varepsilon) \partial_t u^\varepsilon + S'(u^\varepsilon) f'(u^\varepsilon) \partial_x (u^\varepsilon) = \varepsilon S'(u^\varepsilon) \partial_x^2 u^\varepsilon.$$

Wegen  $f'(u)S'(u) = F'(u)$  können wir den zweiten Term als totale Ableitung schreiben und finden

$$\partial_t [S(u^\varepsilon)] + \partial_x [F(u^\varepsilon)] = \varepsilon S'(u^\varepsilon) \partial_x^2 u^\varepsilon.$$

Die rechte Seite müssen wir umschreiben. Zweimaliges Differenzieren ergibt  $\partial_x^2 [S(u)] = \partial_x [S'(u) \partial_x u] = S''(u) |\partial_x u|^2 + S'(u) \partial_x^2 u$ . Die Funktion  $S$  ist konvex, es gilt also  $S'' \geq 0$  und daher auch  $S''(u) |\partial_x u|^2 \geq 0$ . Wir finden

$$\partial_t [S(u^\varepsilon)] + \partial_x [F(u^\varepsilon)] \leq \varepsilon \partial_x^2 [S(u)].$$

*Schritt 3: Entropie-Relation im distributionellen Limes.* Für den Grenzübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  gehen wir wieder zu einer Beschreibung mit Integralen über. Dazu sei  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$  eine beliebige Funktion mit  $\varphi \geq 0$ . Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R} \times (0, T)} \partial_t [S(u^\varepsilon)] \varphi + \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} \partial_x [F(u^\varepsilon)] \varphi \leq \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} \varepsilon \partial_x^2 [S(u)] \varphi.$$

Mit partiellen Integrationen können wir alle Ableitungen auf  $\varphi$  werfen. Wir finden

$$-\int_{\mathbb{R} \times (0, T)} [S(u^\varepsilon)] \partial_t \varphi - \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} [F(u^\varepsilon)] \partial_x \varphi \leq \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} \varepsilon [S(u)] \partial_x^2 \varphi.$$

In dieser Ungleichung bilden wir den Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Wir argumentieren wie bereits im ersten Schritt: Nach Voraussetzung gilt  $u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t)$  für fast alle  $(x, t)$ , also wegen Stetigkeit von  $S$  auch  $S(u^\varepsilon(x, t)) \rightarrow S(u(x, t))$  für fast alle  $(x, t)$ . Zudem ist die Folge beschränkt. Der Konvergenzsatz von Lebesgue liefert die Konvergenz der Integrale. Dasselbe Argument kann auch auf  $F(u^\varepsilon) \rightarrow F(u)$  und auf  $\varepsilon [S(u)] \rightarrow 0$  angewandt werden. Wir erhalten im Limes  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$-\int_{\mathbb{R} \times (0, T)} [S(u)] \partial_t \varphi - \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} [F(u)] \partial_x \varphi \leq 0,$$

also (1.28), die Entropie-Ungleichung im Distributionssinn.  $\square$

## **Literatur**

1. P. Lax, Hyperbolic partial differential equations, AMS 2006
2. Ph. LeFloch, Hyperbolic systems of conservation laws, Birkhäuser 2002
3. L.C. Evans, Partial differential equations, AMS 1998