Musik und Mathematik – Zusammenhänge via Fourier-Reihen

B. Schweizer[1]

16. Dezember 2025

Abstract: In diesem Text werden einige elementare Beobachtungen zusammengestellt, in denen ein Zusammenhang zwischen Musik und Mathematik auftaucht. Genauer gesagt: Mich interessieren Zusammenhänge zwischen Musik und Fourier-Reihen, also insbesondere Obertonreihen. Alle hier zusammengetragenen Fakten sind millionenfach verfügbar, etwa in zahlreichen Artikeln auf Wikipedia. Mein Interesse liegt darin, eine konsistente Auswahl und eine geeignete Reihenfolge zu finden. Der Text ist für Personen, die die Mathematik der Fourier-Reihen kennen.

1 Die Physik einer Saite

Wir betrachten zum einen eine Saite, die an beiden Enden eingespannt ist. Wir nehmen an, dass die Saite in Schwingungen versetzt werden kann und dass die Frequenz der Schwingungen im hörbaren bereich liegt. Falls ein Resonanzkörper vorhanden ist oder eine elektrische Verstärkung, so können die Schwingungen der Saite als Töne gehört werden.

Wir betrachten also zum Beispiel: Geige, Cello, Kontrabass, Gitarre, E-Bass, Zither, Klavier. Bei Blasinstrumenten schwingt die Luft und nicht eine Saite, vieles ist dann doch ähnlich, aber die Obertonreihen sind durch die anderen Randbedingungen anders (ein offenes Ende und ein geschlossenes Ende).

Schwingungen von Saiten werden in sehr guter Näherung mit der Wellengleichung beschrieben. Die Auslenkung aus der Ruhelage an der Position x der Saite und zur Zeit $t > 0$ ist gegeben durch $u(x,t) \in \mathbb{R}$, die Gleichung für u lautet

$$\rho\, \partial_t^2 u(x,t) = a\, \partial_x^2 u(x,t)\,. \tag{1.1}$$

Sie gilt für alle $x \in (0,L)$, wobei L die Länge der Saite ist. Die Randbedingung ist $u(0,t) = u(L,t) = 0$ für alle $t > 0$, da die Saite eingespannt ist. Die Konstanten $\rho, a > 0$ sind vorgegeben, ρ hat mit der Dichte und der Dicke der Saite zu tun und a mit der Vorspannung.

Wir finden Lösungen mit dem Ansatz $u(x,t) = \sin(k\pi x/L)e^{i\omega t}$, wobei k eine beliebige natürliche Zahl ist. Die Randbedingung ist erfüllt, weil die Punkte $x = 0$ und $x = L$ Nullstellen der Sinusfunktion sind. Damit u die Gleichung erfüllt, muss

[1]Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, Vogelspothsweg 87, D-44227 Dortmund, Ben.Schweizer@tu-dortmund.de

gelten: $-\rho\omega^2 = -a(k\pi/L)^2$. Die Lösung schwingt also mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{a/\rho}\,\pi\,\frac{k}{L}\,. \tag{1.2}$$

Für das Nachfolgende ist relevant:

- Die Frequenz der Schwingung ist invers proportional zur Länge. Wenn wir zum Beispiel durch Drücken der Saite in der Mitte die Saitenlänge halbieren, so verdoppeln wir die Frequenz.
- Es gibt eine Grundschwingung, die Lösung für $k = 1$, die kleinste erzeugbare Frequenz ist $\omega_1 = \sqrt{a/\rho}\,\pi/L$. Die Saite kann aber auch in jeder Frequenz $\omega_k = k\,\omega_1$ schwingen.

2 Der Tonmix einer schwingenden Saite

Tatsächlich sind alle Lösungen der Wellengleichung Überlagerungen von Lösungen der Form $u(x,t) = \sin(k\pi x/L)e^{i\omega t}$. Betrachten wir dazu eine Saite, die zur Zeit $t = 0$ ausgelenkt wird und losgelassen wird. Wenn die Auslenkung zur Zeit $t = 0$ gegeben ist durch $u_0 = u_0(x)$, dann müssen wir die Wellengleichung lösen mit den Anfangsbedingungen

$$\partial_t u(x,0) = 0\,, \qquad u(x,0) = u_0(x)\,. \tag{2.1}$$

Die Anfangsbedingung kann man in eine Fourier-Reihe entwickeln (nur Sinus-Terme, indem man sich u_0 als ungerade fortgesetzt vorstellt und die fortgesetzte Funktion entwickelt):

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\sin(k\pi x/L) \tag{2.2}$$

Die Lösung der Wellengleichung kann damit angegeben werden (wir verwenden $\mathrm{Re}\,e^{i\omega t} = \cos(\omega_k t)$, weil damit die Anfangsbedingung $\partial_t u = 0$ automatisch erfüllt ist):

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\,\sin(k\pi x/L)\cos(\omega_k t)\,. \tag{2.3}$$

Wie stark hören wir also die Schallwelle, die von der Schwingung $\cos(\omega_k t)$ erzeugt wird? Dies hängt stark von c_k ab und damit von der Anfangsauslenkung der Saite (also: wie und wo die Saite angeschlagen wird). Man muss aber hinzufügen: Es hängt auch vom Bau des Instrumentes ab, denn nicht jede Auslenkungsform $\sin(k\pi x/L)$ wird gleich viel Schall aussenden.

An dieser Stelle wissen wir:

- Die Saite schwingt genau in den Frequenzen $\omega_k = k\,\omega_1$.
- Der Mix wird durch das Instrument und den Anschlag bestimmt.

In diesen zwei Punkten liegt also die Kunst: Der Instrumentenbauer kann für einen guten Klang sorgen, aber auch der Spieler des Instruments. In jedem Fall: Der Hörer hört einen Mix aus den Frequenzen $\omega_k = k\,\omega_1$ mit $k \in \mathbb{N}$. Dies sind die Obertöne.

3 Die relevanten Obertöne

Nehmen wir an, die Grundschwingung wäre 66 Hz (mit der Einheit Hertz, 1 Hz = 1/s). Die Frequenz 66 Hz entspricht in etwa einem sogenannten großen C. Wir betrachten also eine Saite mit Länge, Dicke und Vorspannung so, dass $\omega_1 = 66$ Hz.

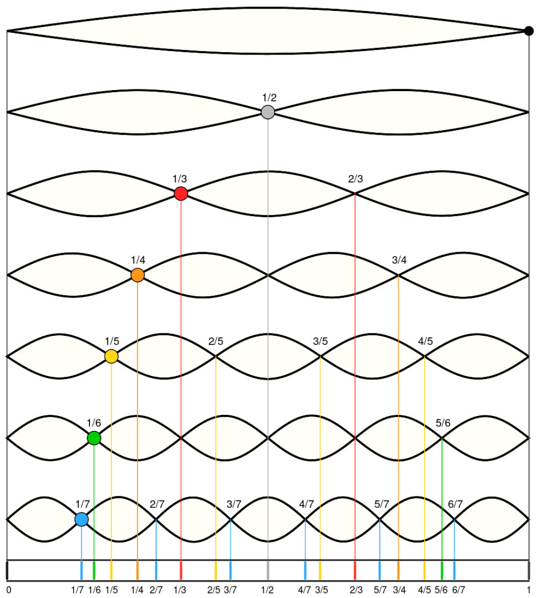

Abbildung 1: Zur Obertonreihe, Bild von Wikipedia

Diese Saite kann auch mit $k = 2$ schwingen, also "mit zwei Bäuchen". Dann schwingt sie mit der Frequenz $\omega_2 = 2\omega_1 = 260$ Hz. Dieser Ton heißt die Oktave vom Grundton, hier also die Oktave von C, diese wird als kleines c bezeichnet. Im Folgenden werden wir nicht mehr zwischen einem Ton und seiner Oktave unterscheiden, zum Beispiel ist ab jetzt für uns C und c derselbe Ton, ein C.

Der nächste Ton ist gegeben durch $k = 3$, also "drei Bäuche", er hat die Frequenz $\omega_3 = 3\omega_1 = 390$ Hz. Dieser Ton heißt die Quinte vom Grundton. Er ist der wichtigste Oberton. Die Liste lässt sich natürlich fortsetzen.

k	ω_k in Hz	Name der Notenrelation	Absoluter Tonname bei Grundton C
1	66	**Grundton**	C
2	132	Grundton	C
3	198	**Quinte**	G
4	264	Grundton	C
5	330	**gr. Terz**	E
6	396	Quinte	G
7	462	in etwa bei kl. Septime	nahe an B^b
8	528	Grundton	C
9	594	gr. Sekunde	D

Den Oberton Nr. 3 mit dem Notennamen G und den Oberton Nr. 5 mit dem Notennamen E zu verbinden ist an dieser Stelle natürlich vollkommen willkürlich.

Wichtig für uns:

> Aufgrund der Obertonreihe sind gut zum Grundton passende Töne Quint und Terz. Tatsächlich bildet Grundton-Terz-Quint den sogenannten Dur-Dreiklang, das Fundament der westlichen Musik.

4 Gegenintervalle und Flageoletttöne

Wenn wir zu einem Grundton (C) die wichtigsten Obertöne, nämlich Oktave (C) und Quint (G) betrachten, dann entsteht ja ein weiteres Intervall: Der Sprung von G hoch zum C. Dieses Gegenintervall zur Quinte heißt Quarte.

Welches Frequenzverhältnis gehört zur Quarte? Zur Quint gehört der Faktor 3/2. Wenn wir den Faktor 3/2 mit dem Faktor 4/3 multiplizieren, dann kommen wir auf 2 (also die Oktave). Die Quart wird also durch das Verhältnis 4/3 ausgedrückt.

Interessant: Die Quarte ist kein Oberton, die Zahl ist nicht von der Form $k/2^p$ für $k, p \in \mathbb{N}$. Sie kommt mit der Quinte als ein Intervall zwischen zwei Obertönen vor (immerhin: den wichtigsten Obertönen).

Wenn man eine Saite bei 1/4 der Länge drückt, dann ist der Rest 3/4 der Länge. Beim Anschlagen erhält man also eine Quarte.

Wenn man die Saite bei 1/4 der Länge nur berührt, dann kann man einen Flageolettton erzeugen. Dies liegt daran, dass man die Saite in einem ganzzahligen Verhältnis aufgeteilt hat. Man hört allerdings den Oberton zu $k = 4$, also die Oktave – und nicht die Quart.

Wir wollen dieselbe Betrachtung für die Quinte wiederholen. Wenn wir beim Punkt 1/3 die Saite berühren, so können wir als Flageolettton den Ton hören, der zum Dritteln der Saite gehört, also die Quinte. Wegen des Frequenzfaktors 3 ist es eine Quinte, die oberhalb der Oktave liegt. Erstaunlicher Fakt: Wenn wir an der 1/3-Stelle die Saite drücken, dann ist der Rest ja 2/3 der Saite. Damit haben wir die Länge genau verdoppelt und die Frequenz halbiert. Das Ergebnis ist wieder der gleiche Ton, eine Quint. Aber es ist die Quint direkt über dem Grundton, nicht die Quint von der Oktave darüber.

5 Auffüllen mit Tönen: Die Dur-Tonleiter

Wie kommen wir von Obertönen auf unsere Dur-Tonleiter? In der amerikanischen Notation schreibt man B statt H, was wir hier auch tun wollen. Zum Grundton C besteht die Dur-Tonleiter aus den Tönen C - D - E - F - G - A - B - C. Warum diese Töne?

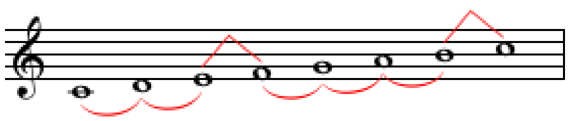

Abbildung 2: Die Durtonleiter zum Grundton C, also C - D - E - F - G - A - B - C. Bögen deuten Ganztöne an, Winkel deuten Halbtöne an. Bild von Wikipedia.

Ich würde argumentieren: Für jeden Ton ist auch die zugehörige Quinte ein wichtiger Ton. Also nehmen wir für jeden neuen Ton auch noch diesen Ton dazu. So erhält man, in dieser Reihenfolge, C - G - D - A - E - B. Schließlich kann man vom C auch eine Quint nach unten gehen (oder das Gegenintervall nach oben), dies fügt das F hinzu. Damit hat man alle Töne der Tonleiter erhalten. Die Namen gibt man dann so, dass es für Töne in derselben Oktave aufeinanderfolgende Buchstaben sind (man hat dabei beim A begonnen und nicht beim C, aber es sind ja nur Namen).

Die Quinte der Quinte tauchte schon als große Sekunde (D) in der Tabelle auf. Dies ist ein wirklicher Oberton, nämlich für $k = 3 \cdot 3 = 9$. In unserer Konstruktion haben wir diesen Ton auch hinzugefügt.

Weil zwei Quinten (nach Oktavenabzug) ein relativ kleines Intervall nach oben bilden, nennt man das Intervall einen Ganzton. Ganztöne nach oben liefert die Reihe C - D - E, Ganztöne nach oben vom F liefert die restlichen Töne F - G - A - B.

Halbtöne. Man kann das obige Prinzip fortsetzen, um auch noch Töne zwischen diesen Dur-Tonleitertönen zu erzeugen. Mit Ganztonschritten vom B erhalten wir B - $C^{\#}$ - $D^{\#}$, mit Ganztonschritten vom E erhalten wir E - $F^{\#}$ - $G^{\#}$ - $A^{\#}$. Damit haben wir alle zwölf Töne konstruiert, die in der westlichen Musik vorkommen.

Wir habe neue Töne konstruiert, indem wir immer Quinten nach oben gegangen sind. Das berühmte *Pythagoreische Komma* bezieht sich auf die Frage, ob man irgendwann mit Quinten wieder auf den Grundton kommt. Das passiert in guter Näherung nach 12 Quinten, man hat dann 7 Oktaven durchlaufen. Es gilt $(3/2)^{12} = 129.7$, das ist nicht so weit weg von $2^7 = 128$. Der Fehler heißt das Pythagoreische Komma.

Die Tatsache, dass die Näherung recht gut ist, ist ein gewichtiges Argument, die Tonleiter mit Quinten aufzufüllen – also dafür, unsere 12 Halbtöne zu verwenden.

Was haben wir gelernt?

- Unsere Dur-Tonleiter kann aus dem ersten interessanten Oberton, der Quint, konstruiert werden.
- Quintschichtungen passen näherungsweise zu Oktaven – aber nicht exakt.

Seit dem 19. Jahrhundert werden Klaviere standardmäßig so gestimmt, dass kein Ton ausgezeichnet wird. Dies wird erreicht, indem der Frequenzfaktor zwischen zwei aufeinanderfolgenden Tasten (also für Halbtonschritte) immer gleich ist, nämlich die Zahl $a > 1$ so, dass $a^{12} = 2$.

6 Kompatibilität mit Terzen

Wir haben in unserer Konstruktion der Tonleiter nur den ersten interessanten Oberton verwendet, die Quinte. Nun sollten wir kontrollieren, ob die Konstruktion auch mit dem Oberton $k = 5$ zusammenpasst, also der Terz. Den Ton, den man erhält, wenn man 4 Quinten nach oben geht, haben wir E genannt. Tatsächlich erzeugt der Prozess einen Frequenzfaktor von $(3/2)^4 = 5.0625$. Dies ist erstaunlich nah am Faktor $k = 5$, der uns die Terz geliefert hat. Die quintenerzeugte Terz passt also gut zur Oberton-Terz.

Wir wollen das vertiefen. Für Quinten drittelt man die Saite, wenn man das viermal tut, dann hat man die Saite durch $3^4 = 81$ geteilt. Wenn man erst durch 5 teilt (für die Terz) und dann noch viermal halbiert, dann hat man durch 80 geteilt. Es gibt also zwei Obertöne, die nahe beieinander liegen, nämlich die zu $k = 80$ und zu $k = 81$, und beide sollten eigentlich eine Terz sein (der eine als 4 Quinten, der andere als höhere Oktave zur Terz). Der Fakt $80 \neq 81$ ist (neben dem Pythagoreischen Komma) ein Beleg, dass Konstruktionen mit Obertönen zwar näherungsweise passen, aber nicht exakt.

Weitere Tests. Ähnlich zur Quintenschichtung können wir fragen: Ist die Terz von der Terz von der Terz wieder ein Grundton? Tatsächlich ist für ersteres der Faktor $5^3 = 125$, das ist relativ nah an der Zweierpotenz 128.

Wir bemerken, dass dies in Wirklichkeit kein neuer Test war: Wir haben bereits Quintschichtungen mit Oktavschichtungen verglichen (also 3-er Potenzen mit 2-er Potenzen), aber auch Quinten mit Terzen. Da beides gut gepasst hat, passen eben auch Terzen zu Oktaven.

Gegenintervalle. Zu Quint und Quart haben wir das Gegenintervall bereits in unserer Grundmenge. Zur großen Terz ist das Gegenintervall die kleine Sexte, sie kam bisher nicht vor. Das Gegenintervall zur großen Sekunde ist die kleine Septime, hier B^b, sie kam bisher auch nicht vor. Es ist aber interessant, dass wir auch diesen Ton mit Quinten hätten erhalten können: Viermal nach oben liefert C - G - D - A - E, zweimal nach unten liefert C - F - B^b. Damit haben wir auch eine 7-Ton Tonleiter, nur mit B^b anstelle von B. Tatsächlich kommt diese alternative Tonleiter auch oft in der Musik vor.

> Bedeutsam für die Notenwahl war nur der erste wichtige Oberton, die Quint. Aber Quinten passen auch gut zum anderen wichtigen Oberton, der Terz. Die Passung ist so gut wie 80 nah an 81 liegt.

7 Tonerzeugung im Synthesizer

Auch der Synthesizer produziert einen Grundton und alle seine Obertöne. Welcher Mix von Obertönen erzeugt wird, wird elektronisch geregelt. Weil die Elektronik viele Möglichkeiten der Regelung bietet, lassen sich sehr verschiedene Klänge erzeugen.

Der Wellengenerator des Synthesizers produziert eine zeitabhängige Spannung $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$ die Zeit, die Funktion f ist periodisch mit einer Periode T. Die Zeitperiode T sollte so gewählt sein, so dass die Frequenz $1/T$ im hörbaren Bereich liegt, also zum Beispiel $T = 10$ ms $= 1/100$ s, so dass $1/T = 100$ Hz. Das Drücken einer Taste des Synthesizers wählt das T aus und damit die Tonhöhe des Grundtons.

Für festes T ist eine mögliche Wahl von f ein Sägezahn-Spannungsverlauf. Dies entspricht der Wahl $f(t) = t/2$ auf dem Intervall $(-T/2, T/2]$, periodisch fortgesetzt (der Vorfaktor vor t ist die Amplitude, wir wählen $1/2$ um später eine einfache Formel zu haben). Wenn diese Spannung an einen Lautsprecher angeschlossen wird, so hören wir einen Ton. Es ist ein Ton mit einer klar wahrnehmbaren Grundfrequenz. Es ist allerdings kein besonders wohlklingender Ton.

Da f periodisch mit Periode T ist kann f in eine Fourier-Reihe entwickelt werden. Unabhängig von der konkreten Form von f auf $(-T/2, T/2]$ gibt es eine Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(k\, 2\pi t/T) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\, 2\pi t/T)\,. \tag{7.1}$$

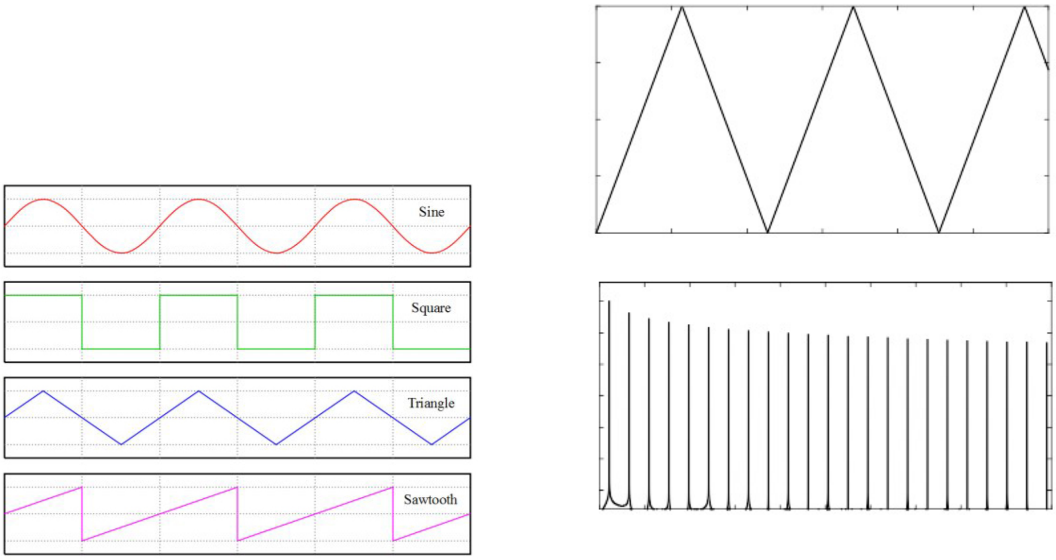

Abbildung 3: Links: Die gängigen Ausgangs-Wellenformen eines Synthesizers, Bild von https://topmusicarts.com. Rechts: Für die Dreieckswelle die Frequenzanalyse des Signals. Es kommen die Vielfachen der Grundfrequenz vor, die Koeffizienten in der Fourier-Analyse sind nur schwach abfallend mit k. Bild von Wikipedia

Das Signal ist also eine Überlagerung von harmonischen Schwingungen (Sinus und Cosinus). Die Koeffizienten a_k und b_k geben an, wie viel von jeder harmonischen Schwingung im Signal vorhanden ist.

Mit unserem Verständnis von Obertönen können wir jetzt auch sagen: Genau wie beim Ton eines Saiteninstruments enthält das Signal den Grundton und alle Obertöne in unterschiedlicher Stärke (für den k-ten Oberton gegeben durch die Koeffizienten a_k und b_k).

Für die Sägezahn-Funktion kann man die Koeffizienten berechnen, es gilt

$$f(t) = \sin(2\pi t/T) - \frac{1}{2}\sin(2\cdot 2\pi t/T) + \frac{1}{3}\sin(3\cdot 2\pi t/T) - \frac{1}{4}\sin(4\cdot 2\pi t/T) \pm \ldots \tag{7.2}$$

Der Oberton k hat also die Stärke $1/k$. Für die Sägezahn-Funktion haben die Koeffizienten also einen sehr langsamen Abfall. Dies ist eine Konsequenz der Tatsache, dass wir von einem Signal ausgegangen sind, das nicht glatt war (beim Sägezahn sogar mit einem Sprung, wir sind also von einem unstetigen Signal ausgegangen). Wenig glatte Ausgangssignale bewirken einen schwachen Abfall der Fourier-Koeffizienten.

> Für das Ausgangssignal im Synthesizer gilt: Im Gegensatz zum Saiteninstrument sind die Obertöne sehr viel stärker.

Um einen gut klingenden Ton zu erzeugen, geht man jetzt so vor, dass man Obertöne abschwächt ("subtraktive Synthese"). Man schickt das Signal durch einen *Filter,* typischerweise low-pass Filter, also solche Filter, die niedrige Frequenzen im Signal belassen, aber hohe Frequenzen unterdrücken. Ein Kenner der Materie kann mit solchen Techniken angenehme und/oder interessante Töne erzeugen.