Kurzeinführung in die Vektoranalysis

TU Dortmund, Angewandte Analysis[1]

10. Oktober 2024

Abstract: Dieses Kurzskript stellt klassische Vektoranalysis vor: Existenz von skalaren Potentialen für Vektorfelder (in beliebiger Dimension) und von Vektorpotentialen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$. Wir besprechen die Eindeutigkeit von Potentialen, die Existenz mit Kurvenintegralen und geben insbesondere eine explizite Formel für Potentiale an. Die explizite Formel geben wir für Quader und Sterngebiete an und skizzieren Erweiterungen. Wir geben Beispiele an, die zeigen: (i) In einem nicht einfach zusammenhängenden Gebiet muss kein skalares Potential existieren. (ii) Es gibt einfach zusammenhängende Gebiete, auf denen keine Vektorpotentiale existieren.

Inhaltsverzeichnis

In diesem Kurzskript sei $\mathbb{N} \ni n \geq 2$ stets die Dimension, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet (also wegzusammenhängend und offen) und $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Wir untersuchen Skalarfelder Φ und Vektorfelder v, also Abbildungen

[1] T. Schubert, B. Schweizer und D. Wiedemann, TU Dortmund, Fakultät für Mathematik, Vogelspothsweg 87, D-44227 Dortmund, david.wiedemann@tu-dortmund.de, tim.schubert@tu-dortmund.de, ben.schweizer@tu-dortmund.de

$\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$. Wir betrachten hier die klassische Theorie, nehmen also immer an, dass die Abbildungen stetig differenzierbar sind.

1. Grundlegende Begriffe der Vektoranalysis

1.1. **Differentialoperatoren.** Für ein Skalarfeld $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und ein Vektorfeld $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ definieren wir den *Gradienten* von Φ und die *Divergenz* von v durch

$$\operatorname{grad}\Phi := \nabla\Phi := \begin{pmatrix} \partial_1\Phi \\ \vdots \\ \partial_n\Phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \operatorname{div} v := \nabla \cdot v := \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \cdots + \partial_n v_n\,.$$

Im $\mathbb{R}^3$ gibt es zusätzlich die Rotation eines Vektorfeldes $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$,

$$\operatorname{curl} w := \nabla \times w := \begin{pmatrix} \partial_2 w_3 - \partial_3 w_2 \\ \partial_3 w_1 - \partial_1 w_3 \\ \partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 \end{pmatrix}.$$

Im $\mathbb{R}^2$ benutzen wir den *orthogonalen Gradienten* $\nabla^\perp$ und die *Rotation* (oder *orthogonale Divergenz*) $\nabla^\perp\cdot$ wie folgt:

$$\nabla^\perp\Phi := \begin{pmatrix} -\partial_2\Phi \\ \partial_1\Phi \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \nabla^\perp \cdot v := -\partial_2 v_1 + \partial_1 v_2\,.$$

Direkte Rechnungen zeigen, dass die Divergenz einer Rotation verschwindet und dass die Rotation eines Gradienten verschwindet:

$$\operatorname{div}\operatorname{curl} w = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{curl}\nabla\Phi = 0$$

für alle zweimal differenzierbaren $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ und $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Die zweite Formel hat eine Entsprechung im Zweidimensionalen, also für $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

$$\nabla^\perp \cdot \nabla\Phi = 0\,.$$

1.2. **Skalare Potentiale.** Skalare Potentiale kann man als die Verallgemeinerung der *Stammfunktion* auf beliebige Dimensionen verstehen.

Definition 1.1 (Skalares Potential)**.** *Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Ein differenzierbares Skalarfeld $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ heißt* skalares Potential *von v, falls*

$$v = \nabla\Phi\,. \tag{1.1}$$

Bemerkung 1.2 (Zur Eindeutigkeit von skalaren Potentialen)**.** *Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit skalarem Potential $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann sind alle skalaren Potentiale von v gegeben durch $\Phi + c$ mit $c \in \mathbb{R}$. Tatsächlich: Seien Φ_1 und Φ_2 zwei skalare Potentiale von v. Dann gilt $\nabla(\Phi_1 - \Phi_2) = v - v = 0$, die Differenz $\Phi_1 - \Phi_2$ hat also einen verschwindenden Gradienten; sie muss daher auf der zusammenhängenden Menge Ω konstant sein.*

Proposition 1.3 (Notwendiges Kriterium)**.** *Nicht jedes Vektorfeld v besitzt ein skalares Potential. Vielmehr muss eine* Integrabilitätsbedingung *erfüllt sein:*

In Dimension 2: Für $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ kann es nur dann ein skalares Potential $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ geben, wenn $\nabla^\perp \cdot v = 0$ gilt.

In Dimension 3: Für $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ kann es nur dann ein skalares Potential $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ geben, wenn $\operatorname{curl} v = 0$ gilt.

Die Proposition folgt als Spezialfall aus dem nachfolgenden Satz. Tatsächlich kann das notwendiges Kriterium für die Existenz eines skalaren Potentials in beliebiger Dimension mit der Symmetrie der Jacobi-Matrix formuliert werden.

Satz 1.4 (Notwendiges Kriterium)**.** *Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit skalaren Potential $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$, es gelte also $v = \nabla\Phi$ in Ω. Dann gilt für jeden Punkt $x \in \Omega$: Die Jacobi-Matrix $Dv(x)$ ist symmetrisch.*

Der Satz besagt, dass die Symmetrie der Jacobi-Matrix von v eine notwendige Bedingung dafür ist, dass ein skalares Potential existiert. Wir nennen daher die Symmetrie der Jacobi-Matrix die *Integrabilitätsbedingung.*

Beweis. Wir berechnen Einträge der Jacobi-Matrix $Dv(x)$ und verwenden dafür $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Der Satz von Schwarz erlaubt die Rechnung

$$\partial_j v_i = \partial_j \partial_i \Phi = \partial_i \partial_j \Phi = \partial_i v_j \,.$$

Der Satz von Schwarz ist anwendbar: Φ ist zweimal stetig differenzierbar, weil v differenzierbar ist. □

Der obige Satz liefert ein notwendiges Kriterium für die Existenz von Potentialen. Eines der wichtigen Ziele in diesem Kurzskript ist es, zu zeigen, dass das Kriterium in vielen Fällen sogar hinreichend ist: Zu einem beliebigen Vektorfeld v, welches das notwendige Kriterium erfüllt, wollen wir ein skalares Potential finden. Dies wird für Quader und Sterngebiete ohne Einschränkungen gelingen. Für allgemeine Gebiete muss die Aussage nicht gelten, wir geben dazu ein Gegenbeispiel an.

Definition 1.5 (Sterngebiet)**.** *Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt* Sterngebiet*, wenn es einen Punkt $x_0 \in \Omega$ gibt, sodass für alle $x \in \Omega$ die ganze Verbindungsstrecke $\{x_0 + t(x - x_0) \mid 0 \le t \le 1\}$ in Ω liegt. Einen solchen Punkt x_0 nennen wir ein* Sternzentrum *von Ω.*

1.3. **Vektorpotentiale.** Ein Kernproblem der Vektoranalysis ist das folgende verwandte Problem. Im dreidimensionalen Raum, also für $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ fragen wir: Gibt es zu einem Vektorfeld $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{curl} w = v$?

Definition 1.6 (Vektorpotential für $n = 3$)**.** *Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld. Ein differenzierbares Vektorfeld $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ heißt* Vektorpotential *von v, falls*

$$v = \operatorname{curl} w \,. \tag{1.2}$$

Bemerkung 1.7 (Vektorpotential für $n = 2$)**.** *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Ein differenzierbares Vektorfeld $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ heißt* Vektorpotential *von f, falls*

$$f = \nabla^\perp \cdot w \,. \tag{1.3}$$

Bemerkung 1.8 (Zur Eindeutigkeit von Vektorpotentialen)**.** *Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit Vektorpotential $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$. Wir modifizieren w, indem wir den Gradienten eines skalaren Feldes $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ addieren. Die Funktion $\tilde{w} := w + \nabla\Phi$ erfüllt $v = \operatorname{curl} \tilde{w}$, ist also ebenfalls ein Vektorpotential. Es gilt also keine Eindeutigkeit für Vektorpotentiale.*

Umgekehrt gilt für Sterngebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^3$: Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit zwei Vektorpotentialen $w_1, w_2\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$. Dann gilt $\operatorname{curl}(w_1 - w_2) = 0$. Die Theorie skalarer Potentiale liefert mit Satz 3.5: Es existiert $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ mit $\nabla\Phi = w_1 - w_2$. Verschiedene Vektorpotentiale unterscheiden sich also nur um Gradienten.

Analoge Aussagen gelten auch in Raumdimension $n = 2$.

Ähnlich wie bei der Existenz von skalaren Potentialen können wir nicht für beliebige Vektorfelder v erwarten, dass es ein Potential gibt.

Satz 1.9 (Notwendiges Kriterium). *Für $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ kann es nur dann ein Vektorpotential $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ geben, wenn $\operatorname{div} v = 0$ gilt.*

Beweis. Für $v = \operatorname{curl} w$ gilt $\operatorname{div} v = \operatorname{div}(\operatorname{curl} w) = 0$. $\square$

Ein Ziel dieses Kurzskript ist es, zu zeigen, dass das Kriterium oft sogar hinreichend ist: Im Sterngebiet gibt es zu einem beliebigen Vektorfeld v mit $\nabla \cdot v = 0$ ein Vektorpotential w. Wir werden eine Formel für w mit Hilfe von Kurvenintegralen angeben.

2. Kurvenintegrale

Wir werden sowohl skalare Potentiale als auch Vektorpotentiale mit Kurvenintegralen angeben. Dabei ist für uns eine Kurve gegeben durch eine stetige und stückweise differenzierbare Abbildung $\gamma\colon [0,T] \to \Omega$ für ein $T > 0$. Als Kurve bezeichnen wir auch das Bild, $\Gamma := \gamma([0,T]) \subset \Omega$, wobei wir Γ hier als gerichtet auffassen, es gibt also einen Anfangspunkt $\gamma(0)$ und einen Endpunkt $\gamma(T)$.

2.1. Definition verschiedener Kurvenintegrale.

In diesem Abschnitt führen wir drei Typen von Kurvenintegralen ein. Im ersten Typus integriert man die Werte einer Funktion, im zweiten Typus integriert man das Produkt des Funktionsvektors mit dem Tangentialvektor der Kurve, im dritten Typus integriert man das Kreuzprodukt des Funktionsvektors mit dem Tangentialvektor der Kurve.

Mit Hilfe des zweiten Typs (skalares Kurvenintegral) konstruieren wir in den Unterabschnitten 3.2 und 3.3 ein skalares Potential auf Quadern und in Unterabschnitt 3.4 ein skalares Potential auf Sterngebieten. Mit Hilfe des dritten Typs (vektorielles Kurvenintegral) konstruieren wir für die Raumdimensionen $n = 2,3$ in den Unterabschnitten 4.1 und 4.2 ein Vektorpotential auf Quadern und in Unterabschnitt 4.3 ein Vektorpotential auf Sterngebieten.

Definition 2.1 (Das skalare Kurvenintegral eines Skalarfeldes). *Sei $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld und $\Gamma \subset \Omega$ eine stückweise reguläre Kurve mit Parameterdarstellung $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$\int_\Gamma f := \int_\Gamma f \,\mathrm{d}s := \int_0^T f\big(\gamma(t)\big)\, |\dot\gamma(t)| \,\mathrm{d}t \tag{2.1}$$

das skalare Kurvenintegral der skalaren Funktion f längs Γ.

Definition 2.2 (Das skalare Kurvenintegral eines Vektorfeldes). *Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\Gamma \subset \Omega$ eine stückweise reguläre Kurve mit Parameterdarstellung $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt*

$$\int_\Gamma v \cdot \tau := \int_\Gamma v \cdot \mathrm{d}x := \int_0^T v\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t) \,\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

das skalare Kurvenintegral des Vektorfeldes v längs Γ.

Definition 2.3 (Das vektorwertige Kurvenintegral eines Vektorfeldes)**.** *Sei* $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ *ein stetiges Vektorfeld und* $\Gamma \subset \Omega$ *eine stückweise reguläre Kurve mit Parameterdarstellung* $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^3$*. Dann heißt*

$$\int_\Gamma v \times \tau := \int_\Gamma v \times \mathrm{d}x := \int_0^T v\big(\gamma(t)\big) \times \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \tag{2.3}$$

das vektorwertige Kurvenintegral *der Funktion* v *längs* Γ*. Dabei wird das vektorwertige Kurvenintegral komponentenweise gebildet.*

Bemerkung 2.4. *Die obigen Definitionen sind unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung* γ *der Kurve, insbesondere auch unabhängig von der Wahl von* $T > 0$*; die Wegintegrale sind also wohldefiniert.*

Bemerkung 2.5. *Für ein stetiges Vektorfeld* $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ *kann ein weiteres Kurvenintegral* $\int_\Gamma w \in \mathbb{R}^m$ *definiert, indem man das skalare Integral aus Definition 2.1 für jede Komponente von* w *auswertet. Wir werden dieses Integral hier nicht benötigen.*

2.2. **Rechenregeln und Hauptsatz.** In diesem Unterabschnitt diskutieren wir wichtige Rechenregeln für die oben definierten Kurvenintegrale. Die Eigenschaften lassen sich elementar nachrechnen.

Lemma 2.6 (Rechenregeln für Kurvenintegrale)**.** *Seien* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *ein stetiges Skalarfeld,* $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ein stetiges Vektorfeld und* $\Gamma \subset \Omega$ *eine stückweise reguläre Kurve mit Parameterdarstellung* $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$*. Dann sind die Abbildungen*

$$f \mapsto \int_\Gamma f\,, \quad v \mapsto \int_\Gamma v \cdot \tau \quad \textit{und} \quad v \mapsto \int_\Gamma v \times \tau \ (\textit{für den Fall } n = 3)$$

linear. Ist Γ^* *die Kurve, die aus* Γ *durch Umkehrung der Umlaufrichtung ensteht, mit Parameterdarstellung* $\gamma^*(t) := \gamma(T-t)$ *für* $t \in [0,T]$*, so gilt*

$$\int_{\Gamma^*} f = \int_\Gamma f\,, \qquad \int_{\Gamma^*} v \cdot \tau = -\int_\Gamma v \cdot \tau\,, \qquad \int_{\Gamma^*} v \times \tau = -\int_\Gamma v \times \tau\,.$$

Definition 2.7 (Länge einer Kurve)**.** *Sei* $\Gamma \subset \Omega$ *eine stückweise reguläre Kurve mit Parameterdarstellung* $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$*. Dann ist die* Länge *von* Γ *definiert durch*

$$L(\Gamma) := \int_0^T |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t\,. \tag{2.4}$$

Bemerkung 2.8 (Abschätzungen für Kurvenintegrale)**.** *Seien* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ *ein stetiges Skalarfelder,* $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *ein stetiges Vektorfelder und* $\Gamma \subset \Omega$ *eine stückweise reguläre Kurve mit Parameterdarstellung* $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *und Länge* $L(\Gamma)$*. Dann gelten für die skalaren Kurvenintegrale die Abschätzungen*

$$\left|\int_\Gamma f\right| \le \max_{x\in\Gamma} |f(x)|\, L(\Gamma) \quad \textit{und} \quad \left|\int_\Gamma v \cdot \tau\right| \le \max_{x\in\Gamma} |v(x)|\, L(\Gamma)$$

und für das vektorielle Kurvenintegral die Abschätzung

$$\left|\int_\Gamma v \times \tau\right| \le \max_{x\in\Gamma} |v(x)|\, L(\Gamma)\,.$$

Satz 2.9 (Hauptsatz der Potentialfelder). *Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld mit skalarem Potential $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt für jede stückweise reguläre Kurve $\Gamma \subset \Omega$ mit Parameterdarstellung $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$*

$$\int_\Gamma v \cdot \tau = \Phi\big(\gamma(T)\big) - \Phi\big(\gamma(0)\big)\,. \tag{2.5}$$

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus der mehrdimensionalen Kettenregel. Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_\Gamma v \cdot \tau &= \int_0^T v\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T \nabla\Phi\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Phi(\gamma(t)\big)\,\mathrm{d}t = \Phi\big(\gamma(T)\big) - \Phi\big(\gamma(0)\big)\,.\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung 2.10. *Die in (2.5) angegebene Gleichung liefert eine Formel zur Berechnung von Φ: Jeder Punkt $x \in \Omega$ kann als der Endpunkt eines Weges γ geschrieben werden, $x = \gamma(T)$. Gleichung (2.5) liefert dann eine Formel für $\Phi(x) = \Phi(\gamma(T))$. Wir verwenden diese Tatsache in Satz 3.1.*

3. Skalare Potentiale

3.1. **Existenz skalarer Potentiale und Kurvenintegrale.** In diesem Unterabschnitt formulieren und beweisen wir zwei Aussagen, die äquivalent zur Existenz eines skalaren Potentials sind. An dieser Stelle ist es ausreichend, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet ist.

Satz 3.1 (Existenzaussagen für ein skalares Potential). *Sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\Gamma \subset \Omega$ eine stückweise reguläre Kurve mit der Parameterdarstellung $\gamma\colon [0,T] \to \mathbb{R}^n$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) *Das Feld v besitzt ein skalares Potential $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$.*

b) *Für alle Kurven $\Gamma \subset \Omega$ hängt das skalare Kurvenintegral $\int_\Gamma v \cdot \tau$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve ab. Diese Eigenschaft nennen wir die* Wegunabhängigkeit *des skalaren Kurvenintegrals.*

c) *Für alle geschlossenen Kurven $\Gamma \subset \Omega$, also Kurven mit $\gamma(0) = \gamma(T)$, gilt $\int_\Gamma v \cdot \tau = 0$.*

Beweis. Die Implikation „a) $\Rightarrow$ c)“ folgt aus Satz 2.9, weil für einen geschlossene Kurve Γ Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen, $\gamma(T) = \gamma(0)$.

Um „c) $\Rightarrow$ b)“ zu zeigen, betrachten wir zwei Punkte $A, B \in \Omega$ und zwei Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \Omega$ mit Anfangspunkt A und Endpunkt B. Dann ist $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2^*$ eine geschlossene Kurve, für diese Kurve verwenden wir c). Lemma 2.6 erlaubt die Rechnung

$$0 = \int_\Gamma v \cdot \tau = \int_{\Gamma_1} v \cdot \tau + \int_{\Gamma_2^*} v \cdot \tau = \int_{\Gamma_1} v \cdot \tau - \int_{\Gamma_2} v \cdot \tau\,.$$

Also ist das skalare Kurvenintegral wegunabhängig.

Um schließlich „b) $\Rightarrow$ a)“ zu zeigen wählen wir $x_0 \in \Omega$ beliebig. Da Ω als Gebiet zusammenhängend ist, finden wir für jedes $x \in \Omega$ eine Kurve $\Gamma_x \subset \Omega$, die x_0 mit x verbindet. Da Ω zudem offen ist, gibt es für jedes $x \in \Omega$ ein $r(x) > 0$ mit $x + z \in \Omega$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $|z| < r(x)$. Für $\mathbb{R} \ni h < r(x)$ gilt also stets $x + he_j \in \Omega$ für $j = 1, \dots, n$. Wegen der Wegunabhängigkeit des skalaren Kurvenintegrals ist die Funktion

$$\Phi(x) := \int_{\Gamma_x} v \cdot \tau \tag{3.1}$$

unabhängig von der Wahl der Kurve Γ_x. Wir bezeichnen mit $\Gamma_{h,j}$ die Gerade, die x und $x + he_j$ verbindet mit Parameterdarstellung

$$\gamma_{h,j} \colon [0,1] \to \mathbb{R}^n\,, \quad \gamma_{h,j}(t) = x + the_j\,. \tag{3.2}$$

Dann gilt

$$\Phi(x + he_j) = \int_{\Gamma_x} v \cdot \tau + \int_{\Gamma_{h,j}} v \cdot \tau\,.$$

Dann folgt mit dem Mittelwertsatz für ein geeignetes $\tau \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x + he_j) - \Phi(x)}{h} &= \frac{1}{h} \int_{\Gamma_{h,j}} v \cdot \tau = \frac{1}{h} \int_0^1 v(x + the_j) \cdot he_j \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 v_j(x + the_j) \,\mathrm{d}t = v_j(x + \tau he_j)\,. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit der Komponentenfunktionen v_j gilt

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x + he_j) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h \to 0} v_j(x + \tau he_j) = v_j(x)$$

und somit $\nabla \Phi(x) = v(x)$. Damit ist der Satz bewiesen. □

3.2. **Skalare Potentiale auf Quadern in 2D.** Sei $\Omega = (-1,1)^2$ ein Quader und $v = (v_1, v_2) \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit $\nabla^\perp \cdot v(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Wir betrachten immer $(0,0)$ als Startpunkt und werden ein Potential konstruieren mit $\Phi((0,0)) = 0$. Für einen beliebigen Punkt $x = (x_1, x_2) \in \Omega$ wählen wir einen Weg von $(0,0)$ nach (x_1, x_2) wie folgt: Zuerst laufen wir die Strecke von $(0,0)$ nach $(x_1, 0)$, dann die Strecke von $(x_1, 0)$ nach (x_1, x_2),

$$\gamma_x \colon [0,2] \to \Omega\,,\ \gamma_x(t) = \begin{cases} (tx_1, 0) & \text{für } 0 \le t \le 1\,, \\ (x_1, (t-1)x_2) & \text{für } 1 \le t \le 2\,. \end{cases}$$

Ein Potential Φ finden wir mit Satz 2.9: $\Phi(x)$ wird als Kurvenintegral definiert, die beiden Teilintegrale werden mit einer Substitutionsformel vereinfacht.

Satz 3.2 (Skalares Potential auf dem Quader in 2D). *Seien $\Omega = (-1,1)^2$ ein Quader und $v = (v_1, v_2) \colon \Omega \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\nabla^\perp \cdot v = 0$. Dann ist*

$$\Phi(x_1, x_2) := \int_0^{x_1} v_1(\xi, 0) \,\mathrm{d}\xi + \int_0^{x_2} v_2(x_1, \eta) \,\mathrm{d}\eta \tag{3.3}$$

ein skalares Potential von v.

Beweis. Wir nutzen die Leibnizregel für Parameterintegrale. Damit erhalten wir sofort $\partial_2\Phi(x_1,x_2) = v_2(x_1,x_2)$. Die Integrabilitätsbedingung nutzen wir in der mit $(*)$ markierten Gleichung und erhalten

$$\begin{aligned}\partial_1\Phi(x_1,x_2) &= v_1(x_1,0) + \int_0^{x_2} \partial_1 v_2(x_1,\eta)\,\mathrm{d}\eta \overset{(*)}{=} v_1(x_1,0) + \int_0^{x_2} \partial_2 v_1(x_1,\eta)\,\mathrm{d}\eta \\ &= v_1(x_1,0) + v_1(x_1,x_2) - v_1(x_1,0) = v_1(x_1,x_2)\,.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\nabla\Phi = v$. □

3.3. **Skalare Potentiale auf Quadern in 3D.** In drei Raumdimensionen können wir genauso vorgehen. Es sei $\Omega = (-1,1)^3$ ein Quader und $v = (v_1,v_2,v_3)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{curl} v(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$. Wir betrachten für einen Punkt $x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega$ den Weg Γ_x mit dem Streckenzug $(0,0,0) \to (x_1,0,0) \to (x_1,x_2,0) \to (x_1,x_2,x_3)$,

$$\gamma_x\colon [0,3] \to \Omega\,,\ \gamma_x(t) = \begin{cases} (tx_1,0,0) & \text{für } 0 \le t \le 1\,,\\ (x_1,(t-1)x_2,0) & \text{für } 1 \le t \le 2\,,\\ (x_1,x_2,(t-2)x_3) & \text{für } 2 \le t \le 3\,.\end{cases}$$

Diese Kurve liefert eine Formel für ein Potential von v.

Satz 3.3 (Skalares Potential auf dem Quader in 3D). *Es sei $\Omega = (-1,1)^3$ ein Quader und $v = (v_1,v_2,v_3)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld mit $\operatorname{curl} v = 0$. Dann ist*

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) := \int_0^{x_1} v_1(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^{x_2} v_2(x_1,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^{x_3} v_3(x_1,x_2,\chi)\,\mathrm{d}\chi \tag{3.4}$$

ein skalares Potential von v.

Beweis. Wir nutzen die Leibnizregel für Parameterintegrale. Damit erhalten wir sofort $\partial_3\Phi(x_1,x_2,x_3) = v_3(x_1,x_2,x_3)$. Die Integrabilitätsbedingung nutzen wir in den mit $(*)$ markierten Gleichungen und erhalten

$$\begin{aligned}\partial_2\Phi(x_1,x_2,x_3) &= v_2(x_1,x_2,0) + \int_0^{x_3} \partial_2 v_3(x_1,x_2,\chi)\,\mathrm{d}\chi \\ &\overset{(*)}{=} v_2(x_1,x_2,0) + \int_0^{x_3} \partial_3 v_2(x_1,x_2,\chi)\,\mathrm{d}\chi \\ &= v_2(x_1,x_2,0) + v_2(x_1,x_2,x_3) - v_2(x_1,x_2,0) \\ &= v_2(x_1,x_2,x_3)\,,\end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned}\partial_1\Phi(x_1,x_2,x_3) &= v_1(x_1,0,0) + \int_0^{x_2} \partial_1 v_2(x_1,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^{x_3} \partial_1 v_3(x_1,x_2,\chi)\,\mathrm{d}\chi \\ &\overset{(*)}{=} v_1(x_1,0,0) + \int_0^{x_2} \partial_2 v_1(x_1,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^{x_3} \partial_3 v_1(x_1,x_2,\chi)\,\mathrm{d}\chi\end{aligned}$$

$$= v_1(x_1,0,0) + v_1(x_1,x_2,0) - v_1(x_1,0,0) + v_1(x_1,x_2,x_3) - v_1(x_1,x_2,0)$$
$$= v_1(x_1,x_2,x_3)\,.$$

Damit erhalten wir $\nabla\Phi = v$. □

Bemerkungen 3.4. *Die obigen Konstruktionen lassen sich auch auf Rechtecke $\Omega = (a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n) \subset \mathbb{R}^n \in \Omega$ verallgemeinern, wir wählen dafür einen Startpunkt $z \in \Omega$. Es sei $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Weiter sei die Jacobi-Matrix $Dv(x)$ für alle $x \in \Omega$ symmetrisch. Für einen Punkt $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$ sei Γ_x der Weg gegeben durch*

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \to (x_1, z_2, \dots, z_n) \to (x_1, x_2, z_3, \dots, z_n) \to \dots$$
$$\to (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, z_n) \to (x_1, x_2, \dots, x_n) = x\,.$$

Dann setzen wir $\Phi(x_1,\dots,x_n) := \int_{\Gamma_x} v\cdot\tau$. Man rechnet nach, dass $\nabla\Phi = v$ gilt.

3.4. **Sterngebiete.** Um ein weiteres Kriterium für die Existenz eines skalaren Potentials zu formulieren, müssen wir zusätzlich voraussetzen, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein *Sterngebiet* ist.

Satz 3.5 (Skalares Potential auf Sterngebieten)**.** *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Sterngebiet mit Sternzentrum $z \in \Omega$ und $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Weiter sei die Jacobi-Matrix $Dv(x)$ für alle $x \in \Omega$ symmetrisch. Wir definieren für einen beliebigen Punkt $x = (x_1,\dots,x_n) \in \Omega$ die Kurve $\Gamma_x \subset \Omega$ mit der Parameterdarstellung $\gamma_x\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n,\ t \mapsto z + t(x-z)$. Dann ist*

$$\Phi(x) := \int_{\Gamma_x} v\cdot\tau \tag{3.5}$$

ein skalares Potential von v.

Beweis. Nach einer Nullpunktverschiebung können wir ohne Einschränkung $z = 0$ annehmen. Dann berechnen wir

$$\Phi(x) := \int_{\Gamma_x} v\cdot\tau = \int_0^1 v(\gamma_x(t))\cdot\dot\gamma_x(t) = \int_0^1 \sum_{k=0}^n v_k(tx)\,x_k\,\mathrm{d}t\,.$$

Mit partieller Integration und der Symmetrie der Jacobi-Matrix folgt für jedes $k \in \{1,\dots,n\}$:

$$\begin{aligned}
\partial_i\Phi(x) &= \partial_i \int_0^1 \sum_{k=1}^n v_k(tx)\,x_k\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{k=1}^n tx_k\,(\partial_i v_k)(tx)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 v_i(tx)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^n tx_k\,(\partial_i v_k)(tx)\,\mathrm{d}t + [t\,v_i(tx)]_0^1 - \int_0^1 \sum_{k=1}^n tx_k\,(\partial_k v_i)(tx)\,\mathrm{d}t\\
&= v_i(x)\,.
\end{aligned}$$

Damit gilt $\nabla\Phi = v$, die Funktion Φ ist somit ein skalares Potential von v. □

3.5. **Gegenbeispiele.** Die in Satz 3.5 geforderte Bedingung, dass Ω ein Sterngebiet ist, kann abgeschwächt werden. Notwendig ist nur, dass das Gebiet Ω einfach zusammenhängend ist.

Definition 3.6 (Einfach zusammenhängend)**.** *Wir nennen ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$* einfach zusammenhängend, *wenn es wegzusammenhängend ist und jede geschlossene Kurve $\Gamma \subset \Omega$ stetig auf einen Punkt $x \in \Omega$ zusammengezogen werden kann.*

Das skalare Potential konstruiert man dann wie in (3.2). Auf die Forderung, dass das Gebiet Ω einfach zusammenhängend ist, können wir aber nicht verzichten. Dies zeigt das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 3.7. *Wir betrachten das Gebiet $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ und das Vektorfeld*

$$v\colon \Omega \to \mathbb{R}^2\,, \quad (x_1, x_2) \mapsto \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Dazu betrachten wir die Kurve $\Gamma \subset \Omega$ mit Parameterdarstellung $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. Diese Kurve kann nicht stetig auf einen Punkt $x \in \Omega$ zusammengezogen werden. Damit ist Ω nicht einfach zusammenhängend. Wir berechnen

$$\int_\Gamma v \cdot \tau = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi \neq 0\,.$$

Nach Satz 3.1 besitzt v also kein skalares Potential. Trotzdem ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\nabla^\perp \cdot v(x) = \partial_2 \left(\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\right) + \partial_1 \left(\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\right) = \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = 0\,.$$

4. Vektorpotentiale

4.1. **Vektorpotentiale auf Quadern in 2D.** Man beachte, dass man in Raumdimension $n = 2$ gewissermaßen zwei Funktionen wählen kann, aber nur die Vorgabe einer einzigen Funktion f hat. Daher ist es nicht überraschend, dass man auf dem Quader $\Omega = (-1, 1)^2$ ein Vektorpotential für ein Skalarfeld $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ leicht angeben kann.

Bemerkung 4.1 (Vektorpotential auf dem Quader)**.** *Es sei $\Omega = (-1, 1)^2$ ein Quader und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ein Skalarfeld. Dann ist*

$$w(x_1, x_2) := \begin{pmatrix} -\int_0^{x_2} f(x_1, \xi)\,\mathrm{d}\xi \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

ein Vektorpotential von f. Man rechnet leicht nach, dass $\nabla^\perp \cdot w = f$ gilt.

4.2. **Vektorpotentiale auf Quadern in 3D.** Für offene Quader $\Omega = (-1, 1)^3$ geben wir eine vereinfachte Formel für ein Vektorpotential an: Für ein stetig differenzierbares Vektorfeld $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{div} v(x) = 0$ für alle $x \in \Omega$ existiert nach Satz 4.3 ein Vektorpotential $w_0\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$. Dann kann man ein Skalarfeld $\Phi\colon \Omega \to \mathbb{R}$ konstruieren, sodass das Vektorfeld $w := w_0 + \nabla\Phi$ die Eigenschaften $w_1(x_1, x_2, x_3) = 0 = w_2(0, x_2, x_3)$ und $w_3(0, 0, x_3) = 0$ für alle $x \in \Omega$ erfüllt. Dies führt auf den folgenden Satz.

Satz 4.2 (Das Vektorpotential auf Quadern)**.** *Es sei* $\Omega = (-1,1)^3$ *ein Quader und* $v = (v_1, v_2, v_3)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ *ein Vektorfeld mit* $\operatorname{div} v = 0$*. Dann ist*

$$w(x_1,x_2,x_3) := \begin{pmatrix} 0 \\ \int_0^{x_1} v_3(\xi, x_2, x_3)\,\mathrm{d}\xi \\ \int_0^{x_2} v_1(0,\eta,x_3)\,\mathrm{d}\eta - \int_0^{x_1} v_2(\xi,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\xi \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

ein Vektorpotential von v*.*

Beweis. Wir berechnen die erste Komponente von $\operatorname{curl} w$ mit Hilfe der Eigenschaft $\operatorname{div} v = 0$:

$$\begin{aligned}
\partial_2 w_3 - \partial_3 w_2 &= \partial_2 \left(\int_0^{x_2} v_1(0,\eta,x_3)\,\mathrm{d}\eta - \int_0^{x_1} v_2(\xi,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\xi \right) - \partial_3 \int_0^{x_1} v_3(\xi,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\xi \\
&= v_1(0,x_2,x_3) - \int_0^{x_1} \partial_2 v_2(\xi,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\xi - \int_0^{x_1} \partial_3 v_3(\xi,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\xi \\
&= v_1(0,x_2,x_3) + \int_0^{x_1} \partial_1 v_1(\xi,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\xi \\
&= v_1(0,x_2,x_3) + v_1(x_1,x_2,x_3) - v_1(0,x_2,x_3) \\
&= v_1(x_1,x_2,x_3)\,.
\end{aligned}$$

Weiter berechnen wir

$$\partial_3 w_1 - \partial_1 w_3 = -\partial_1 \left(\int_0^{x_2} v_1(0,\eta,x_3)\,\mathrm{d}\eta - \int_0^{x_1} v_2(\xi,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\xi \right) = v_2(x_1,x_2,x_3)$$

und

$$\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1 = \partial_1 \int_0^{x_1} v_3(\xi,x_2,x_3)\,\mathrm{d}\xi = v_3(x_1,x_2,x_3)\,.$$

Dies zeigt $\operatorname{curl} w = v$ und beendet den Beweis. □

4.3. **Sterngebiete.** Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Sterngebiet mit Sternzentrum $z \in \Omega$. Nach einer Nullpunktverschiebung können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $z = 0$ gilt. Weiter sei $v = (v_1, v_2, v_3)\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $\operatorname{div} v = 0$.

Wir konstruieren das Vektorpotential von v als vektorwertiges Wegintegral von tv längs Γ_x. Dabei wählen wir eine analoge Konstruktion wie in Unterabschnitt 3.4.

Wir beginnen mit der folgenden Beobachtung: Es sei v zunächst ein konstantes Vektorfeld. Wir definieren das Vektorfeld

$$w(x) := \frac{1}{2} v \times x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_2 x_3 - v_3 x_2 \\ v_3 x_1 - v_1 x_3 \\ v_1 x_2 - v_2 x_1 \end{pmatrix}\,.$$

Dann gilt $\operatorname{curl} w = v$, das Vektorfeld w ist also ein Vektorpotential von v. Bei nicht konstanten Vektorfeldern v ist es also plausibel den infinitisimalen Ansatz

$$\mathrm{d}w = \alpha v \times \mathrm{d}x$$

anzusetzen, wobei α ein noch zu bestimmendes Skalarfeld ist. Es sei $x \in \Omega$ ein beliebiger Punkt und Γ_x der Weg, der 0 und x verbindet mit Parameterdarstellung $\gamma_x \colon [0,1] \to \mathbb{R}^3\,,\ t \mapsto tx$. Bilden wir das vektorwertige Kurvenintegral über Γ_x so erhalten wir

$$w(x) = \int\limits_{\Gamma_x} \alpha v \times \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \alpha(tx) v(tx) \times x \,\mathrm{d}t$$

Wendet man nun die Rotation auf diesen Ausdruck an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
v(x) &\overset{!}{=} \operatorname{curl} w(x) = \int\limits_0^1 \operatorname{curl}\big(\alpha(tx)v(tx) \times x\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 \nabla\big(\alpha(tx)v(tx)\big)\cdot x + 2\alpha(tx)\,v(tx) - x \operatorname{div}\big(\alpha(tx)v(tx)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 \big((\nabla\alpha)(tx)\cdot v(tx)\big)tx + t\alpha(tx)\,(\nabla v)(tx)\cdot x + 2\alpha(tx)\,v(tx) - \big((\nabla\alpha)(tx)\cdot v(tx)\big)tx\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 2\alpha(tx)\,v(tx) + t\alpha(tx)\,(\nabla v)(tx)\cdot x\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$v(x) = \big[t^2\,v(tx)\big]_0^1 = \int\limits_0^1 \partial_t\left(t^2\,v(tx)\right)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 2t\,v(tx) + t^2\,(\nabla v)(tx)\cdot x\,\mathrm{d}t\,.$$

Wir wählen also $\alpha(tx) = t$. Dies führt auf den folgenden Satz.

Satz 4.3 (Das Vektorpotential als vektorwertiges Kurvenintegral)**.** *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ *ein Sterngebiet mit Sternzentrum* $0 \in \Omega$ *und* $v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ *ein Vektorfeld mit* $\operatorname{div} v = 0$. *Dann ist*

$$w(x) := \int\limits_0^1 t\,\{v(\gamma_x(t)) \times \dot{\gamma}_x(t)\}\,\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t\,\{v(xt)\times x\}\,\,\mathrm{d}t \tag{4.3}$$

ein Vektorpotential von v.

4.4. **Gegenbeispiele.** Die in Satz 4.3 geforderte Bedingung, dass Ω ein Sterngebiet ist, kann nicht auf einfach zusammenhängende Gebiete abgeschwächt werden. Dies zeigt das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 4.4 (Divergenzfreies Feld ohne Vektorpotential)**.** *Wir betrachten das einfach zusammenhängende Gebiet* $\Omega := B_3(0) \setminus B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < |x| < 3\}$ *und das Vektorfeld*

$$v\colon \Omega \to \mathbb{R}^3\,, \quad (x_1,x_2,x_3) \mapsto \frac{1}{|x|^3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\,.$$

Es gilt für alle $x \in \Omega$*:*

$$\operatorname{div} v(x) = \frac{|x|^3 - 3x_1^2|x| + |x|^3 - 3x_2^2|x| + |x|^3 - 3x_3^2|x|}{|x|^6}$$

$$= \frac{3|x|^3 - 3|x|(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{|x|^6} = \frac{3|x|^3 - 3|x|^3}{|x|^6} = 0\,.$$

Trotzdem besitzt v kein Vektorpotential auf Ω. Angenommen dies ist doch der Fall, dann existiert ein $w\colon \Omega \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{curl} w(x) = v(x)$ für alle $x \in \Omega$. Wir betrachten die Sphäre $\partial B_2(0)$ und entfernen für ein beliebiges aber festes $h \in (0,1)$ eine Kuppel K_h der Höhe h. Durch diese Konstruktion erhalten wir für $h \in (0,1)$ die Fläche

$$S_h := \left\{ \begin{pmatrix} 2\sin(u)\cos(v) \\ 2\sin(u)\sin(v) \\ 2\cos(u) \end{pmatrix} \,\middle|\, u \in [\arccos(1 - h/2), \pi)\,,\ v \in [0, 2\pi) \right\}$$

Der äußere Normalenvektor an S_h ist gegeben durch $\nu = \frac{x}{|x|}$. Die Randkurve von S_h ist $\Gamma_h \subset \mathbb{R}^3$ mit Parameterdarstellung

$$\gamma_h\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3\,, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{4h - h^2}\cos(t) \\ \sqrt{4h - h^2}\sin(t) \\ 2 - h \end{pmatrix}.$$

Für eine grafische Darstellung in GeoGebra klickt man hier. Wir verwenden den Integralsatz von Stokes. Es gilt

$$\int_{S_h} \operatorname{curl} w \cdot n = \int_{\Gamma_h} w \cdot \tau\,. \tag{4.4}$$

Dabei gilt

$$\operatorname{curl} w \cdot n = v \cdot n = \frac{x}{|x|^3} \cdot \frac{x}{|x|} = \frac{1}{|x|^2}$$

Für jedes h gilt $\operatorname{curl} w \cdot n \equiv 1/4$ auf der Oberfläche S_h. Das Oberflächenintegral in (4.4) lässt sich also berechnen zu

$$\int_{S_h} \operatorname{curl} w \cdot n = \frac{1}{4} \int_{S_h} 1 = \frac{\mathrm{Vol}_2(S_h)}{4}\,.$$

Es gilt $\mathrm{Vol}_2(\partial B_2(0)) = 16\pi$, das Oberflächenintegral in (4.4) konvergiert also für $h \to 0$ gegen 4π. Andererseits gilt nach Remark 2.8

$$\left| \int_{\Gamma_h} w \cdot \tau \right| \leq \max_{x \in \Gamma_h} |w(x)|\, L(\Gamma_h) \;\to 0 \quad \textit{für } h \to 0\,.$$

Dies ist ein Widerspruch.

5. Bemerkungen und Literatur

Eine ausführliche Diskussion der Potentialtheorie für glatte Funktionen findet man in vielen Büchern zum Thema *Vektoranalysis* oder *Höhere Mathematik*. Thematisch und inhaltlich haben wir uns an den Kapiteln 7 und 8 aus [4] und den Kapiteln 1 und 3 aus [3] orientiert. Alle angegebenen Aussagen lassen sich in diesen Werken wiederfinden. Weitere Grundlagen der *Vektoranalysis* lassen sich in [5] finden.

Für die Theorie der skalaren Potentiale für L^2-Funktionen verweisen wir auf [1, 2], für die Theorie der Vektorpotentiale für L^2-Funktionen auf [6] und Kapitel 23 aus [7].

Wir danken Jakob Fuchs und den anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe für anregende Diskussionen und Agnes Lamacz-Keymling für die Bereitstellung ihres Skript.

Literatur

[1] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 21(9):823–864, 1998.

[2] C. Amrouche, P. G. Ciarlet, and P. Ciarlet. Vector and scalar potentials, Poincaré's theorem and Korn's inequality. 7 pages, 2008.

[3] K. Burg, H. Haf, and F. Wille. *Vektoranalysis*, volume 1. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2006. Höhere Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker.

[4] G. Bärwolff. *Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure*. Springer Spektrum, 3 edition, 2017.

[5] K. Jänich. *Vektoranalysis*, volume 5 of *Springer-Lehrbuch*. Springer Berlin, Heidelberg, 2005.

[6] B. Schweizer. Friedrichs inequality, Helmholtz decomposition, vector potentials, and the div-curl lemma. *INdAM-Springer series*, Trends on Applications of Mathematics to Mechanics:65–79, 2018.

[7] B. Schweizer. *Partielle Differentialgleichungen 3. Auflage*. Springer-Verlag, Berlin, 2024. Eine anwendungsorientierte Einführung. [An application-oriented introduction].