Springer Lehrbuch

Partielle Differentialgleichungen, 2. Auflage

von Ben Schweizer

Korrekturanmerkungen, Stand: 11.1.2023

Hier sind die mir bekannten *mathematischen* Fehler der zweiten Auflage aufgelistet. Besonders relevante Fehler sind mit einem Stern markiert.

S. 14 Vor Theorem 2.5: Besser als “$\varphi(s) = 1$” ist “$\varphi(s) = C$ für ein $C \in \mathbb{R}$”. Der Beweis sollte starten mit: “Wir fixieren $x_0 \in \Omega$ und $r_0 > 0$ mit $\overline{B_{r_0}(x_0)} \subset \Omega$. Im Folgenden betrachten wir $r = r_0/3$ und machen Aussagen über alle Punkte $x \in B_{r_0/3}(x_0)$.”

S. 64 Schon im dritten Punkt von Def. 4.10 muss X ein metrischer Raum sein.

S. 71 In Beispiel 4.18 sollte nur $p \in (1, \infty)$ betrachtet werden.

S. 77 Der Beweis ist nur für den Fall $p > 1$, denn es wird Reflexivität von L^p ausgenutzt.

S. 86 In der Rechnung am Seitenende muss für die erste Gleichung etwas getan werden: $\Delta \langle \Phi \rangle = \nabla \cdot \langle \nabla \Phi \rangle$ ist nicht selbstverständlich. Man erhält allerdings die Aussage leicht mit Integralen über $\mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon(0)$, partieller Integration und Limesbildung $\varepsilon \to 0$.

S. 87 Die zweite Gleichheit in der letzten Rechnung folgt leicht, es sollte trotzdem besser ausgeschrieben dastehen: $\int \Delta(\Phi * f) \cdot \varphi = \int\int \Phi(y) f(x-y) \Delta\varphi(x) = \int\int \Phi(y) \Delta f(x-y) \varphi(x) = \int [\langle \Phi \rangle (\Delta f(x - .))] \cdot \varphi = \int [\Delta \langle \Phi \rangle (f(x - .))] \cdot \varphi = \int [\Delta \langle \Phi \rangle * f](\varphi)$.

S. 88 In Satz 4.22 muss V ein abgeschlossener linearer Unterraum sein (für die schwache Abgeschlossenheit).

S. 122 Das Argument in den Zeilen 12 bis 15 ist fehlerhaft. Ersetze durch: Die Glättungen V^ε lösen $-\Delta V^\varepsilon = f^\varepsilon$ und haben einen kompakten Träger, sie stimmen daher mit den $\tilde{V}^\varepsilon$-Lösungen überein und erfüllen daher die H^1-Abschätzungen.

S. 123 Zeile 6: Die Orthogonalität wird schon für die L^2-Konvergenz benötigt.

S. 129 In Übung 6.5 muss als Voraussetzung für Lösungen von (6.43) zusätzlich gefordert werden, dass auch die H^1-Norm von u durch die H^{-1}-Norm von f abgeschätzt werden kann.

S. 129 In Übung 6.8 muss Ω offen sein.

S. 132 Statt als Generalvoraussetzung sollte die Beschränktheit von Ω in Theorem 7.1 explizit genannt werden. Die Koeffizienten b und c sollten stetig und beschränkt auf Ω sein.

S. 135 Im starken Maximumprinzip kann Ω offen und unbeschränkt sein, im Gegensatz zur Generalvoraussetzung auf Seite 132. Es muss dann aber $M = \max_{\bar{\Omega}} u$ ohne := gesetzt werden.

S. 148 *Für diesen Beweis der Harnack-Ungleichung muss Ω_0 zusammenhängend sein.

S. 161 In Übung 8.3b) dürfen nicht Eigenwerte (als Elemente der Menge σ_a) durchnummeriert werden, sondern die Eigenwerte müssen entsprechend ihrer Vielfachheit auch mehrfach in der Liste der $(\lambda_m(a))_{m\in\mathbb{N}}$ vorkommen.

S. 173 In Theorem 9.9 besser nur fordern: $u : \Omega_T \to \mathbb{R}$ stetig. Der Beweis ist identisch und die Aussage dadurch formal etwas stärker. Zudem: $T \in (0, \infty]$ beliebig (nicht nur $T = \infty$ zulassen).

S. 201 In Übung 11.1 muss es im Tipp $y_0 e^{-Ct}$ heißen, nicht $y_0 e^{Ct}$.

S. 203 *Für die angemerkte umgekehrte Implikation im Lemma muss zusätzlich auch die Vergleichbarkeit aller Intervallbreiten gefordert werden, $\max_{k<N} |t_{k+1} - t_k| \leq C \min_{k<N} |t_{k+1} - t_k|$ für eine Konstante $C > 0$, die unabhängig von N ist.

S. 204 Zeile 5: Die Räume sind W_N und V_N, der Index ist nicht h.

S. 208 Rechnung in der Seitenmitte: Die Integrale $\int_{t_{k-1}}^{t_k}$ sollten von t_k nach t_{k+1} gehen (dreimal).

S. 215 *Proposition 11.12: Die Anfangswerte müssen in $H_0^1(\Omega)$ sein (Kompatibilität).

S. 225 *In der Lösungsformel (12.14) ist ein Fehler im letzten Beitrag. Der Zähler muss lauten: $tu_0(y) + t\nabla u_0(y) \cdot (y - x)$.

S. 240 In der dritten Zeile fehlt in $\partial_{p^\alpha} f(t, u, p) = m_0 p^\alpha$ das m_0.

S. 249 In Übung 13.1 c) muss auch die Unterhalbstetigkeit von f gefordert werden.

S. 252 In Theorem 14.2 muss Ω Lipschitz sein.

S. 265 In Zeile -3 fehlt die Begründung für $\|u\| \neq 0$. Man kann es zum Beispiel aus $A(u) = \alpha < 0$ folgern.

S. 273 Theorem 15.2: Die konvexe Funktion darf nicht identisch $+\infty$ sein.

S. 275 Theorem 15.5 sollte besser formuliert werden für F und F^* mit Werten in $\hat{\mathbb{R}}$.

S. 294 *In Theorem 16.5 muss $0 \in K$ gefordert werden, die Verschiebung um einen Vektor stört die Koerzivität (anders als im Beweis behauptet).

S. 308 Erste Formel: Der Raum X soll $C^0([0, T], L^2)$ sein (abgeschlossenes Zeitintervall, damit das ein Banachraum ist). Die Rechnung ist auch dafür gemacht.

S. 309 Im Beweisende fehlt die Abhängigkeit von u von x, es muss zum Beispiel $u : \Omega \times [0, t_2] \to \mathbb{R}^m$ heißen.

S. 314 Übung 17.1: Die Eindeutigkeit soll für (17.5) gezeigt werden. Eindeutigkeit für (17.6) unter der Voraussetzung, dass für alle $u \in K$ das Bild $F(u)$ nicht leer ist.

S. 327 Schritt 1 des Beweises von 17.15: Wähle $w_1 \in K$, so dass alle $E_k \cap K \neq \emptyset$. Zudem muss die Basis so gewählt werden, dass $\overline{\bigcup_k K_k} = K$.

S. 331 Ähnlich wie auf S. 327

S. 375 Auf der rechten Seite der zweiten Gleichung von (20.18) fehlen die eckigen Klammern: Es muss der Sprung $[\partial_\nu v]$ von $\partial_\nu v$ betrachtet werden.

S. 407 Die Invertierbarkeit von $F(t)$ muss überprüft werden (nur dann ist die Ableitungsformel gezeigt; in Zeile -8 wird $F(t)^{-1}$ verwendet). Man kann zum Beispiel mit Stetigkeit argumentieren: Die Menge der t_0, so dass $F(t)$ invertierbar ist für alle $t < t_0$, ist einerseits offen (wegen Stetigkeit) und andererseits abgeschlossen (denn bis t_0 kann die Rechnung angewandt werden, also gilt auch noch in $t = t_0$, dass $F(t)$ die Determinante 1 hat, also invertierbar ist.

S. 425 Im Beweis von Theorem 22.11 sollte die Grenzfunktion in Schritt 3 nicht U_r heißen, das kann mit der Lösung auf dem r-Gebiet verwechselt werden. Die Abkürzung $\Omega_R : B_R(0) \setminus \Omega_0$ wäre im ganzen Beweis sinnvoll.

S. 429 In Lemma 22.13 sollte explizit auch die Bedingung $v \cdot \nu = 0$ auf $\partial\Omega_0$ erwähnt werden.

S. 441 In Zeile 4 sollte u entweder im Raum H^1_{per} oder im Raum H^1_0 sein. Im Allgemeinen kann man nur sagen: Falls die nachfolgende Reihe in L^2 konvergiert, so stellt sie den Gradienten dar.

S. 441 *Im Beweis von Lions' Lemma ist die Herleitung von Gleichung (23.7) nicht vollständig, denn die angegebene Funktion φ ist nicht in $H^1_0(\Omega)$. Um ein geeignetes $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ zu konstruieren, muss man wie folgt vorgehen: (i) Man setzt u antisymmetrisch auf einen Würfel mit verdoppelter Kantenlänge fort, die Fortsetzung nennen wir $\tilde{u}$. (ii) Man entwickelt $\tilde{u}$ in eine Fourier Reihe und definiert $\tilde{\varphi}$ auf dem verdoppelten Würfel mit der Formel für die Koeffizienten wie im Buch. (iii) Man stellt mit Hilfe der Bedingungen, die die Fourier-Koeffizienten erfüllen, fest, dass $\tilde{\varphi}$ die antisymmetrische Fortsetzung einer Funktion $\varphi \in H^1_0(\Omega)$ ist.

S. 443 Im Beweis von Lemma 23.6 sollte nur stehen $\langle u_k, \varphi_k \rangle \to 1$. Da ein u_k ja auch 0 sein kann, ist es so, wie es dasteht, nicht korrekt. Ist entsprechend auch in der Rechnung am Beweisende zu korrigieren.

S. 464 Zweite Zeile im zweiten Schritt: Es gilt die Relation $\int_\Omega w \cdot \nabla f = 0$, hier fehlt das $= 0$.

S. 510 Der erste Beweis von Lemma 25.2 ist für $n = 2$ *und* Ω *konvex.*

S. 517 Zeile 1: Die Gewichtsfunktion θ soll stetig sein. Alternativ kann man (25.37) für alle $x \in \Omega$ fordern.

S. 526 Um Formel (26.8) herum muss zweimal W durch $\tilde{W}$ ersetzt werden. In Abbildung 26.2 sollten die Koordinaten links ξ_1 und ξ_2 heißen, die Kreislinie ist die Menge $W = 0$ (und nicht $\tilde{W}$). Im rechten Bild sollten die Koordinaten y_1 und y_2 heißen.

S. 542 Rechnung in der Seitenmitte, letzte Zeile vor "Insgesamt": Das Argument von f muss ξ_m sein, nicht ξ.

S. 551 Zeile -5: Anstelle von δ^{-1} muss hier $(2\delta)^{-1}$ stehen.

Der Beweis von Theorem 6.12 ist nicht gut lesbar, weil zu viele Hilfsaussagen innerhalb des Beweises gemacht werden. In einer neuen Auflage sollte der Beweis so geführt werden, wie hier skizziert: Zwei Lemmata vorneweg (die noch nichts mit Quadern zu tun haben), danach ein kurzer Beweis des Satzes.

S. 119, Theorem 6.12, zerlegter Beweis mit Spiegelungen

Lemma 1 (H^2-Regularität für Lösungen mit kompaktem Träger): Sei $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ eine Lösung von $-\Delta u = f$ für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Die Funktion u habe einen kompakten Träger: Für ein $R > 0$ gilt $u = 0$ fast überall auf $\mathbb{R}^n \setminus B_R(0)$. Dann ist u im Raum $H^2(\mathbb{R}^n)$ und es gilt mit $C = C(R)$ die Abschätzung

$$\|u\|_{H^2} \leq C\, \|f\|_{L^2} . \tag{1}$$

Beweis: Für eine reguläre Diracfolge Ψ_ε betrachten wir die Glättungen $u_\varepsilon = u * \Psi_\varepsilon$ und $f_\varepsilon = f * \Psi_\varepsilon$. Die Eigenschaften der Faltung liefert die Lösungseigenschaft $-\Delta u_\varepsilon = f_\varepsilon$. Weiterhin hat u_ε einen kompakten Träger, ohne Einschränkung gilt $u_\varepsilon = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus B_{R+1}(0)$. Wir betrachten die Ableitung von u_ε in eine Richtung $j \leq n$ und setzen $v_\varepsilon := \partial_j u_\varepsilon$. Dann erfüllt v_ε die Gleichung $-\Delta v_\varepsilon = \partial_j f_\varepsilon$. Die Funktion v_ε ist von der Klasse $H^1_0(B_{R+1}(0))$ und ist damit identisch zur eindeutig bestimmten Lax-Milgram Lösung der Gleichung. Es gilt also mit $C = C(R)$

$$\|v_\varepsilon\|_{H^1(B_{R+1}(0))} \leq C\, \|\partial_j f_\varepsilon\|_{H^{-1}(B_{R+1}(0))} \leq C\, \|f_\varepsilon\|_{L^2(B_{R+1}(0))} . \tag{2}$$

Für zwei Parameter ε_1 und ε_2 betrachten wir die Differenz $v_{\varepsilon_1} - v_{\varepsilon_2}$ und erhalten die Abschätzung

$$\|v_{\varepsilon_1} - v_{\varepsilon_2}\|_{H^1(B_{R+1}(0))} \leq C\, \|f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\|_{L^2(B_{R+1}(0))} \to 0 . \tag{3}$$

Die Folge v_ε ist also eine Cauchy-Folge in $H^1(B_{R+1}(0))$ und besitzt einen Limes $v \in H^1(B_{R+1}(0))$. Nach Definition von v_ε gilt $v = \partial_j u$ im Distributionssinn, also $\partial_j u \in H^1(B_{R+1}(0))$. Dies zeigt $u \in H^2(B_{R+1}(0))$ und damit auch $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. Abschätzung (2) liefert im Grenzübergang und zusammen mit der Poincaré Ungleichung (1).

Lemma 2 (Ungerade Fortsetzungen von H^1-Funktionen): Auf dem Halbraum $\mathbb{R}^n_+ = (0,\infty) \times \mathbb{R}^{n-1}$ sei $u \in H^1_0(\mathbb{R}^n_+)$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Wir betrachten die Spiegelung $R : (x_1, x_2, ..., x_n) \mapsto (-x_1, x_2, ..., x_n)$ und definieren

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x_1 > 0 \\ -u(Rx) & x_1 < 0 , \end{cases} \qquad \tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x_1 > 0 \\ -f(Rx) & x_1 < 0 . \end{cases} \tag{4}$$

Die Fortsetzung erfüllt $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ und es gelten die Formeln ($j \geq 2$):

$$\partial_1 \tilde{u} = \begin{cases} \partial_1 u(x) & x_1 > 0 \\ \partial_1 u(Rx) & x_1 < 0 , \end{cases} \qquad \partial_j \tilde{u}(x) := \begin{cases} \partial_j u(x) & x_1 > 0 \\ -\partial_j u(Rx) & x_1 < 0 . \end{cases} \tag{5}$$

Weiterhin gilt: Ist u eine Lösung von $-\Delta u = f$ auf $\mathbb{R}^n_+$, so gilt für die Fortsetzungen die Gleichung $-\Delta \tilde{u} = \tilde{f}$ auf dem Ganzraum $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Zunächst müssen wir $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ zeigen. Dazu reicht es, die distributionellen Ableitungsformeln (5) nachzuweisen. Wir verwenden eine Testfunktion $\varphi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$

und rechnen mit dem Gebiet $\mathbb{R}^n_- = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Wir verwenden nacheinander: (i) Gebietszerlegung, (ii) Transformationssatz, (iii) Einsetzen, (iv) partielle Integration auf $\mathbb{R}^n_+$, (v) Transformationssatz:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}\,\partial_1\varphi &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \tilde{u}\,\partial_1\varphi + \int_{\mathbb{R}^n_-} \tilde{u}\,\partial_1\varphi = \int_{\mathbb{R}^n_+} u\,\partial_1\varphi + \int_{\mathbb{R}^n_+} \tilde{u}(Rx)\,\partial_1\varphi(Rx)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} u\,\partial_1\varphi + \int_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\,\partial_1(\varphi\circ R)(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_1 u\,\varphi - \int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_1 u\,(\varphi\circ R)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n_+} \partial_1 u\,\varphi - \int_{\mathbb{R}^n_-} (\partial_1 u)(Rx)\,\varphi(x)\,dx\,.\end{aligned}$$

Die linke Seite ist die Wirkung von $-\partial_1\tilde{u}$ auf φ, daher kann man aus der rechten Seite die Ableitungsformel für $\partial_1\tilde{u}$ ablesen.

Der Beweis für $j \geq 2$ ist vollkommen analog. Ab dem dritten Gleichheitszeichen dreht sich für den zweiten Term das Vorzeichen um.

Wir wollen nun die Lösungseigenschaft von $\tilde{u}$ nachweisen. Dazu betrachten wir eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Zur Funktion φ führen wir deren antisymmetrischen Anteil ein,

$$\varphi_{asym} = \frac{\varphi - \varphi\circ R}{2}\,.$$

Nun berechnen wir die Wirkung der Distribution $-\Delta u$ auf die Testfunktion φ. Wir zerlegen das Integrationsgebiet, nutzen den Transformationssatz und die obigen Rechenregeln für Gradienten, in der dritten Gleichung benutzen wir $\tilde{u}\circ R = -u$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \nabla\tilde{u}\cdot\nabla\varphi &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u\cdot\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^n_-} \nabla\tilde{u}\cdot\nabla\varphi\\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u\cdot\nabla\varphi + \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla(\tilde{u}\circ R)\cdot\nabla(\varphi\circ R) = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u\cdot(\nabla\varphi - \nabla(\varphi\circ R))\\ &= 2\int_{\mathbb{R}^n_+} \nabla u\cdot\nabla\varphi_{asym} = 2\int_{\mathbb{R}^n_+} f\varphi_{asym} = \int_{\mathbb{R}^n_+} f\varphi + \int_{\mathbb{R}^n_-} f\varphi = \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi\,.\end{aligned}$$

In der fünften Gleichung haben wir ausgenutzt, dass u in $\mathbb{R}^n_+$ schwach die Gleichung $-\Delta u = f$ löst. Damit ist die Gleichung für $\tilde{u}$ nachgewiesen.

Der Beweis von Theorem 6.12 ist nun ganz kurz und einfach. Grob gesprochen ersetzt Lemma 1 Schritt 4 und Lemma 2 ersetzt die Schritte 1 und 2.

Wir setzen u ungerade fort, und zwar nacheinander über $x_1 = 0$ hinweg, dann über $x_2 = 0$ hinweg und so weiter. Danach zusätzlich auch über $x_1 = l_1$ hinweg, über $x_2 = l_2$ und so weiter. Die so fortgesetzte Funktion nennen wir $\tilde{u}$. Die Funktion ist $H^1(\hat{\Omega})$ und löst die Gleichung $-\Delta\tilde{u} = \tilde{f}$. Man führt nun Schritt 3 aus (Lokalisieren) und schließt mit obigem Lemma 1.