Blatt 9 07.12.2022

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 9.1. [Invertierbarkeit]

Es seien $A := \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ \alpha & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $b := (8, 1+\alpha, 12) \in \mathbb{R}^3$.

a) Für welche Werte von $\alpha \in \mathbb{R}$ ist A nicht invertierbar?

b) Berechnen Sie für die Werte α, für die A nicht invertierbar ist, die Lösung des Gleichungssystems $Ax = b$.

c) Berechnen Sie A^{-1} für $\alpha = 2$.

Aufgabe 9.2. [Determinanten]

a) Berechnen Sie den Wert der Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}, \quad B := \begin{pmatrix} 20 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 19 & 19 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 3 & 3 & \dots & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{20\times 20}.$$

b) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und

$$A(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 1 \\ -\alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2\alpha \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Für welche α existiert $(A(\alpha))^{-1}$?

Aufgabe 9.3. [Determinanten mit Parameter] Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

a) Wir definieren die Matrix

$$A_{2n} := \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \\ 0 & a & & & b & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \iddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n},$$

wobei alle Werte der Matrix, die nicht auf der Diagonalen oder der Gegendiagonalen liegen, Null sein sollen. Bestimmen Sie den Wert der Determinante von A_{2n}.

b) Bestimmen Sie den Wert der Determinante der Matrix

$$B := \begin{pmatrix} a & b & \dots & \dots & b \\ b & a & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Aufgabe 9.4. [Lineare Abbildungen] Untersuchen Sie, ob die folgenden Abbildungen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ linear sind:

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2) \mapsto x_1 \cdot x_2,$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x_1, x_2) \mapsto (2x_1, -x_2, x_1 + x_2),$

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2) \mapsto \langle (\alpha, \beta), (x_1, x_2) \rangle \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fest).

Abgabe am 14.12.2022 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.