Blatt 8 30.11.2022

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 8.1. [Orthonormalbasis] Gegeben seien die Vektoren $u_1 := (2,1,0,2)$, $u_2 := (1,1,1,3)$ und $u_3 := (-4,-3,1,1) \in \mathbb{R}^4$.

a) Wenden Sie das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren auf die Vektoren u_1, u_2 und u_3 an.

b) Ergänzen Sie die in Teilaufgabe a) errechnete Orthonormalbasis von $\operatorname{Span}(u_1, u_2, u_3)$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 8.2. [Rang einer Matrix]

a) Es sei $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$.

(i) Bestimmen Sie den Rang von A.

(ii) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Bild} A$ und $\operatorname{Kern} A$ an.

b) Geben Sie zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ an, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(B) = 2 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Rang}(AB) = 0.$$

Aufgabe 8.3. [Der Vektorraum der symmetrischen Matrizen] Wir betrachten den reellen Vektorraum der Matrizen $\mathbb{R}^{n\times n}$. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, wenn $A^T = A$ gilt. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Für alle $B \in \mathbb{R}^{l\times k}$ sind die Matrizen $BB^T \in \mathbb{R}^{l\times l}$ und $B^T B \in \mathbb{R}^{k\times k}$ symmetrisch.

b) Die Menge $\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A = A^T\right\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Aufgabe 8.4. [Zeilenrang und Spaltenrang] Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit *Spaltenrang* $\mathrm{Rang}_\mathrm{s}(A) = \dim(\mathrm{Bild}\, A) =: r$.

a) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterverktorraum mit $\dim(U) = k$ und $U^\perp$ das orthogonale Komplement des Untervektorraums U wie in Aufgabe 4.3. Zeigen Sie, dass $\dim(U^\perp) = n - k$ gilt.

b) Es sei $A^T \in \mathbb{R}^{n\times m}$ die zu A transponierte Matrix. Zeigen Sie, dass für die Unterräume $U := \mathrm{Bild}\, A^T \subset \mathbb{R}^n$ und $V := \mathrm{Kern}\, A \subset \mathbb{R}^n$ gilt

$$U^\perp = V.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Eigenschaft $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^T y\rangle$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $y \in \mathbb{R}^m$.

c) Wir setzen den *Zeilenrang* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ durch $\mathrm{Rang}_\mathrm{z}(A) := \dim(\mathrm{Bild}\, A^T)$. Folgern Sie aus Teilaufgabe a) und b), dass gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}\, A) = n - \mathrm{Rang}_\mathrm{z}(A).$$

Abgabe am 07.12.2022 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.