Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 7.1. [Gleichungssystem aus Skalar- und Vektorprodukt] Es sei $v = (2, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle Vektoren $x \in \mathbb{R}^3$ die gleichzeitig die Bedingungen $x \times v = (2, -1, -1) \in \mathbb{R}^3$ und $\langle x, v\rangle = 6 \in \mathbb{R}$ erfüllen.

Aufgabe 7.2. [Ein polynomieller Vektorraum] Es sei

$$V := \left\{ f \;\middle|\; f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ und } f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 2, 4 \right\}.$$

Wir definieren auf V die Addition und die skalare Multiplikation wie im Raum der Abbildungen:
Für alle $f, g \in V$ sei $f+g \in V$ definiert durch $f+g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x) := f(x)+g(x)$ und für alle $f \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $\lambda f \in V$ definiert durch $\lambda f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$.

a) Zeigen Sie, dass V mit dieser Definition ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ ist.

b) Beweisen Sie, dass $h_i \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h_0(x) := 1$, $h_1(x) := x^2 - 1$ und $h_2(x) := x^4 - x^2 + 1$ für $i = 0, 1, 2$ eine Basis von V bilden.

Aufgabe 7.3. [Bestimmung einer Basis] Es seien $U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ und $V := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\}$ zwei Ebenen.

a) Geben Sie eine mögliche Parameterdarstellung der Ebenen U und V an.

b) Bestimmen Sie jeweils eine Basis von U, V, $U \cap V$ und $U + V$.

Aufgabe 7.4. [Matrizen und Gleichungssysteme] Gegeben seien die drei Vektoren $v_1 = (2, 1, -1)$, $v_2 = (-1, -1, 2)$, $v_3 = (1, 1, -3) \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $Av_1 = v_2$, $Av_2 = v_3$ und $Av_3 = v_1$.

Tipp: Schreiben Sie die Matrix $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ als $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$ mit Spaltenvektoren $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$ für $j = 1, 2, 3$.

Abgabe am 30.11.2022 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.