

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer

Tim Schubert

Aufgabe 5.1. [Rechnen mit komplexen Zahlen]a) Schreiben Sie die folgenden Zahlen $z \in \mathbb{C}$ in der Form $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$:

(i)
$$z = \frac{1}{1+i} + \frac{1}{2+i} + \frac{1}{3+i},$$

(ii)
$$z = \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^2,$$

(iii)
$$z = \frac{(2+i)(1+2i)}{3+4i}.$$

b) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 8 + 8\sqrt{3}i$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} + i$.(i) Berechnen Sie von z_1 , z_2 , $z_1 \cdot z_2$ und $\frac{z_1}{z_2}$ den Realteil, Imaginärteil und den Betrag.(ii) Berechnen Sie z_2^6 .**Aufgabe 5.2.** [Komplexe Gleichungen] Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

a) $z + 3\bar{z} = 14 + 3i,$

b) $z^2 + \bar{z}^2 = 3i,$

c) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{2}$ und $|z| = 2,$

d) $\frac{z}{\bar{z}} = i$ und $|z| = \sqrt{2}.$

Aufgabe 5.3. [Komplexe Gleichungen und Punktengen]

a) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

(i) $|z|^2 + 3z \cdot \operatorname{Im}(z) = -1 + 3i$,

(ii) $\operatorname{Re}(z^2) = \operatorname{Re}(z)^2$,

(iii) $\operatorname{Im}(z^2) = \operatorname{Im}(z)^2$.

b) Skizzieren Sie die Punktengen

(i) $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < |z + i|\}$,

(ii) $B := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3| > |z + i|\}$.

Aufgabe 5.4. [Rechnen mit der Eulerschen Formel] Zeigen Sie, dass die folgenden Beziehungen gelten:

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t \quad \text{und} \quad \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t.$$

Abgabe am 16.11.2022 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.