Blatt 4 02.11.2022

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 4.1. [Schranken] Gegeben seien die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$.

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$,
2. $B = \left\{ \frac{x^2}{1+x^2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 2 > 5,\ x < 0\}$,
4. $D = \left\{ \frac{m+1}{m+n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}$.

Entscheiden Sie, ob die Mengen Minimum, Maximum, Infimum und Supremum in $\mathbb{R}$ besitzen und bestimmen Sie diese Werte gegebenenfalls. Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 4.2. [Monotonie]

a) Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Zeigen Sie folgende Aussagen.

  (i) Sind f, g monoton fallend, so ist $f \circ g$ monoton wachsend.

  (ii) Ist f monoton wachsend und g monoton fallend, so ist $f \circ g$ monoton fallend.

  (iii) Ist f bijektiv und monoton wachsend (bzw. fallend), so ist die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend (bzw. fallend).

b) Wir betrachen die Abbildug $f\colon \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$f(x) := \frac{x}{x+1}.$$

  (i) Weisen Sie nach, dass f auf $(-\infty, -1)$ und $(-1, \infty)$ jeweils streng monoton wachsend ist, aber auf dem gesamten Definitionsbereich nicht.

  (ii) Geben Sie die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ von f an und rechnen Sie explizit nach, dass $(f \circ f^{-1})(y) = y$ gilt.

Verwenden Sie folgende Definition eines *Unterverktorraumes.*

Definition. Eine Teilmenge $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Untervektorraum* (oder *Unterraum*, oder *Teilraum*) von $\mathbb{R}^n$ falls gilt:

(UV1) $\forall x, y \in U: \; x + y \in U$ (d.h. U ist abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition),

(UV2) $\forall x \in U, \forall \alpha \in \mathbb{R}: \; \alpha x \in U$ (d.h. U ist abgeschlossen bezüglich Skalarmultiplikation).

Aufgabe 4.3. [Orthogonales Komplement] Für einen Unterraum U von $\mathbb{R}^n$ definiert man

$$U^\perp := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall u \in U: \; \langle x, u \rangle = 0\}$$

als das *orthogonale Komplement* von U. Die Menge $U^\perp$ besteht aus allen Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, die auf allen Vektoren aus U senkrecht stehen.

a) Zeigen Sie, dass $U^\perp$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

b) Bestimmen Sie $U^\perp$ für $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = \alpha(1,1), \; \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 4.4. [Unterräume] Gegeben seien zwei Unterräume U und V von $\mathbb{R}^n$. Welche der folgenden Aussagen sind für alle Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^n$, alle $v \in V$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ wahr. Begründen Sie Ihre Antworten.

(i) $U \cap V$ ist ein Unterraum.

(ii) $U \cup V$ ist ein Unterraum.

(iii) $U + V$ ist ein Unterraum.

(iv) $\lambda U + \mu V := \{\lambda u + \mu v \mid u \in U, v \in V\}$ ist für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ein Unterraum.

(v) $U + v := \{u + v \mid u \in U\}$ ist für alle $v \in V$ ein Unterraum.

Abgabe am 09.11.2022 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.