Blatt 3 26.10.2022

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 3.1. [Eigenschaften angeordneter Körper]

a) Zeigen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen.

(i) Behauptung A: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| - |y| \leq x - y$

(ii) Behauptung B: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $||x| - |y|| \leq |x - y|$

(iii) Behauptung C: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x - y| \leq |x + y|$

(iv) Behauptung D: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt: $|x| \geq |x + y| - |y|$

b) Es sei der Körper der reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ gegeben. Zeigen Sie mit Hilfe der Eigenschaften aus 1.16, dass

$$a \cdot 0 = 0$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt. Folgern Sie daraus, dass 0 kein multiplikativ Inverses besitzt.

c) Es sei $(G, *)$ eine Gruppe mit linksneutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Für alle $a \in G$ ist ein Linksinverses $a' \in G$ auch ein Rechtsinverses, d.h. $\forall a, a' \in G$ mit $a' * a = e$ gilt $a * a' = e$.

(ii) Für alle $a \in G$ ist das linksneutrale Element $e \in G$ auch das rechtsneutrale Element, d.h. $\forall a \in G$ gilt $a * e = a$.

(iii) Das linksneutrale Element $e \in G$ ist eindeutig bestimmt, d.h. ist $f \in G$ ein linksneutrales Element, also $f * a = a$ für alle $a \in G$, so gilt $f = e$.

(iv) Für alle $a \in G$ ist ein Linksinverses $a' \in G$ eindeutig bestimmt, d.h ist $b \in G$ ein Linksinverses zu $a \in G$, also $b * a = e$, so gilt $b = a'$.

Aufgabe 3.2. [Rechnen mit Beträgen II] Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen:

a) $x^2 - 4|x-1| > 0,$

b) $\dfrac{3x}{|4x+2|} < 2,$

c) $\dfrac{1+|x|}{1+x} < 2.$

Aufgabe 3.3. [Abbildungen I] Seien $a \in \mathbb{R}$ und $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{2x-1}{2x} & \text{für } 0 < x < 1 \\ x^2 + a & \text{für } x \geq 1 \end{cases}.$$

a) Skizzieren Sie den Graphen von f für einige Werte von a.

b) Für welche Werte von a ist f injektiv bzw. surjektiv.

c) Bestimmen Sie alle Werte von a, für die f bijektiv ist. Geben Sie für solche Werte von a die Umkehrfunktion an.

Aufgabe 3.4. [Abbildungen II]

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $f(a,b) = (2a+3b, a+2b)$. Geben Sie $f \circ f$ und f^{-1} an.

b) Sei $f\colon D \to W$ definiert durch $f(x) = \frac{2x-3}{x-2}$. Geben Sie möglichst große Teilmengen D und W von $\mathbb{R}$ an, sodass f bijektiv ist und berechnen Sie $f \circ f$, $f \circ f \circ f$ und f^{-1}.

Abgabe am 02.11.2022 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.