Blatt 2 19.10.2022

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 2.1. [Ungleichungen] Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Ungleichungen über $\mathbb{R}$:

a) $x^2 + 7x + 13 > 0$

b) $x^2 - 7x + 12 < 0$

c) $x^2 - 7x + 12 \leq 0$

d) $(x^2 - 1)(x - 2)^2 > 0$

e) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \ldots (x - 9)(x - 10) > 0$

Aufgabe 2.2. [Rechnen mit Beträgen] Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{1}{|x-2|} - |x+2| < -2.$$

Aufgabe 2.3. [Beweistechniken] Es seien ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir schreiben $a|b$, falls a ein Teiler von b ist, falls also eine ganze $n \in \mathbb{Z}$ existiert mit $b = n \cdot a$. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen über natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$. (**Beachten** Sie, dass zum widerlegen einer Aussage **nur** ein konkretes Gegenbeispiel angegeben werden muss.)
Sie dürfen ohne Beweis das folgende *Lemma von Euklid* verwenden:

Es sei $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Dann gilt:
p ist genau dann eine Primzahl, wenn $\forall a, b \in \mathbb{N} \ \ [\, p|a \cdot b \Rightarrow p|a$ oder $p|b\,]$

a) Für alle m: $\quad 3|m \Rightarrow 3|m^2$

b) Für alle m: $\quad 3|m^2 \Rightarrow 3|m$

c) Für alle m: $\quad 9|m \Rightarrow 9|m^2$

d) Für alle m: $9|m^2 \Rightarrow 9|m$

e) Für alle m, n: m gerade und n gerade $\Rightarrow m \cdot n$ gerade

Aufgabe 2.4. [Bernoulli-Ungleichung]

a) Beweisen Sie mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung (1.25): Ist $a > 1$ und $M \in \mathbb{R}$, dann gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $a^n > M$.

b) Beweisen Sie mittels Teilaufgabe a): Ist $0 < a < 1$ und $m > 0$, dann gibt es eine natürliche Zahl n mit $a^n < m$.

Abgabe am 26.10.2022 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.