Blatt 13 25.01.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 13.1. [Konvergenz von Reihen] Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{3^n},$$

$$(c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n^2-3n+1}, \qquad (d)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}.$$

Aufgabe 13.2. [Absolute Konvergenz von Reihen] Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf absolute Konvergenz:

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^4}{3^{n+1}}, \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6n+8}{n^3+3n^2+2n},$$

$$(c)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \qquad (d)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 13.3. [Reihe mit Quadraten] Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent $\quad\Longrightarrow\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent $\quad\Longrightarrow\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert.

Aufgabe 13.4. [Reihe über beschränkte Folge]

a) Für jede reelle Zahl $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ und jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} n^p q^n = 0.$$

b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine beschränkte Folge und $s_n := \sum_{i=0}^{n} a_i$. Weisen Sie nach, dass im Fall $|q| < 1$ die Reihe

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ konvergiert,

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} s_n q^n$ gegen $\frac{1}{1-q} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$ konvergiert.

Aufgabe 13.5. [Stetigkeit von Funktionen]

a) Zeigen Sie, dass die Wurzelfunktion $\sqrt{\cdot} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ auf ganz $[0,\infty)$ stetig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{falls } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{Q}$ stetig ist.

c) Zeigen Sie, dass die Betragsfunktion $|\cdot|\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Dieses Blatt ist ein reines Übungsblatt zum eigenverantwortlichen Arbeiten und wird nicht abgegeben.