Blatt 12 18.01.2023

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 12.1. [Folgengrenzwerte] Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$(i) \quad a_n = \frac{1}{n+8}\sum_{k=9}^{n} k - \frac{n}{2} \qquad (ii) \quad a_n = \frac{3^n + n^3}{n^n}$$

$$(iii) \quad a_n = \sqrt{n^4+1} - n^2 \qquad (iv) \quad a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$$

Aufgabe 12.2. [Rekursive Folge] Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_1 := a, \quad a_2 := b, \quad a_n := \frac{1}{3}(2a_{n-1} + a_{n-2}) \quad \text{für } n \geq 3.$$

a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$a_{k+1} - a_k = \left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}(b-a)$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 12.3. [Konvergente Teilfolgen] Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für die die beiden Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren.

a) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notwendigerweise konvergent? Zeigen Sie diese Aussage bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an.

b) Angenommen es gilt zusätzlich $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1}$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann notwendigerweise konvergent? Zeigen Sie diese Aussage bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an.

c) Von der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren nun die Teilfolgen $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann notwendigerweise konvergent? Zeigen Sie diese Aussage bzw. geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 12.4. [Konvergenz einer Reihe] Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, dass die Reihe aus (1) konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

gilt.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe aus (1).

Abgabe am 25.01.2023 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.