

## Übungen zur Vorlesung

## Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer

Tim Schubert

**Aufgabe 11.1.** [Rechnen mit Diagonalmatrizen] Es sei  $A := \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Bestimmen Sie eine Diagonalmatrix  $J \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  und eine Transformationsmatrix  $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , sodass  $A = SJS^{-1}$  gilt. Bestimmen Sie damit folgende Matrizen:

$$\text{a) } A^4, \quad \text{b) } B \text{ mit } B^2 = A, \quad \text{c) } A^{-1}.$$

**Aufgabe 11.2.** [Diagonalisierung komplex-hermitescher Matrizen] Über den komplexen Zahlen betrachten wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 2i & 0 \\ 0 & -2i & -1 & 0 \\ 2i & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{4 \times 4}.$$

Finden Sie eine unitäre Matrix  $S \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ , sodass  $S^*AS$  Diagonalgestalt hat. Dabei heißt eine Matrix  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  *unitär*, wenn  $S^* = \bar{S}^T = S^{-1}$  gilt.

**Aufgabe 11.3.** [Folggrenzwerte] Sei  $0 \leq q \leq 1$  und

$$a_k := 1 + \frac{1}{k^2}, \quad b_k := \left(1 - \frac{1}{k}\right) q^k, \quad c_k := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } k \neq 10^n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } k = 10^n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Erraten Sie die Grenzwerte der Folgen  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und beweisen Sie die Konvergenz.

**Aufgabe 11.4.** [Folge von Mittelwerten] Es sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $b_k := \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k a_j$  für  $k \in \mathbb{N}$ .

- a) Zeigen Sie: Falls  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen ein  $a \in \mathbb{R}$  konvergiert, so konvergiert auch  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$ .

- b) Geben Sie eine Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  an, sodass zwar  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert, die Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  selbst aber nicht.

---

Abgabe am 18.01.2023 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.