Blatt 10 14.12.2022

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 10.1. [Lineare Abbildungen auf dem Raum der Polynome] Es sei $\mathcal{P}_3$ der Vektorraum der Polynome höchstens dritten Grades.
Dann sei die Abbildung $T\colon \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_3,\ p \mapsto Tp$ definiert durch

$$(Tp)\,(x) = p(x) - (x-1)p'(x) \in \mathcal{P}_3,$$

wobei p' die Ableitung von p bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von T bezüglich der Basis $(v_0, v_1, v_2, v_3) = (1, x, x^2, x^3)$. Ist T bijektiv?

c) Bestimmen Sie $\operatorname{Bild} T$ und $\operatorname{Kern} T = \{p \in \mathcal{P}_3 \mid Tp = 0\}$.

Aufgabe 10.2. [Matrixdarstellung linearer Abbildungen I] Bestimmen Sie die Matrizen bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2) derjenigen linearen Abbildungen $F_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für $i = 1, 2, \ldots, 5$, die wie folgt beschrieben sind:

a) F_1 ist eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$.

b) $F_2((x, y)) = (x, 0)$.

c) F_3 ist eine Spiegelung an der y-Achse.

d) F_4 ist eine Spiegelung am Ursprung.

e) $F_5((1, 2)) = (3, 4)$ und $F_5((-1, 2)) = (2, 1)$.

Aufgabe 10.3. [Matrixdarstellung linearer Abbildungen II] Gegeben sei die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch die Abbildungsvorschift

$$f((x, y, z)) = (x - 2z, -x + y + z, -y + z, -y + z).$$

a) Zeigen Sie, dass f eine lineare Abbildung ist.

b) Bestimmen Sie zwei Basen (b_1, b_2, b_3) des $\mathbb{R}^3$ und (c_1, c_2, c_3, c_4) des $\mathbb{R}^4$, sodass die Darstellungsmatrix A von f bezüglich dieser Basen die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist.

Aufgabe 10.4. [Eigenschaften von Eigenvektoren] Bestimmen Sie einen Eigenvektor der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

der auf dem Vektor $v = (1, -4, 1)$ senkrecht steht.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Verwenden Sie, dass eine Linearkombination aus Eigenvektoren zum Eigenwert λ wieder ein Eigenvektor zum Eigenwert λ ist.

Aufgabe 10.5. [Basiswechsel I] Die Matrix A habe die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$ sowie die Eigenvektoren $v_1 = (2, 3)$ zu λ_1 und $v_2 = (1, 2)$ zu λ_2. Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Matrix A bezüglich der kanonischen Basis (e_1, e_2).

Aufgabe 10.6. [Basiswechsel II] Es seien $a := (1, 0, 1),\ b := (0, 1, 1),\ c := (1, 1, 0),$ $d := (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$

a) Geben Sie die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ an mit

$$f(a) = (0, -2),\ f(b) = (2, 0),\ f(c) = (0, 2) \text{ und } f(d) = (1, 0).$$

b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix A der linearen Abbildung f aus Teilaufgabe a) bezüglich der Standardbasen $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ des $\mathbb{R}^3$ und $((1, 0), (0, 1))$ des $\mathbb{R}^2$.

c) Wir betrachten nun die Basis $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 2), (2, 1, 1), (1, 2, 1))$ des $\mathbb{R}^3$ und die Basis $\mathcal{B}_2 = ((1, 1), (1, -1))$ des $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie die Darstellungsmatrix B von f bezüglich der Basen $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$.

Aufgabe 10.7. [Weihnachtsaufgabe] Rudolf ist seit kurzem befördert worden und ist nun der Arbeitsschutzbeauftragte der Geschenkeproduktion des Weihnachtsmanns. Darum achtet er besonders in der Vorweihnachtszeit auf die Einhaltung aller vorgeschriebenen Hygienemaßnahmen, der Arbeitszeitenobergrenzen und die Überstundenvergütung. Dabei ist ihm vor allem das Paar Alphi und Beti aufgefallen. Rudolf hat folgende Beobachtungen zu diesen beiden Elfen gemacht:

- Alphi und Beti arbeiten als Team.
- Alphi produziert Geschenke und Beti sortiert bei den von Alphi hergestellten Geschenken die beschädigten und unverschenkbaren Geschenke aus.
- Beide Elfen arbeiten am Tag eine positive ganze Zahl an Stunden.
- Alphi stellt pro Stunde so viele Geschenke her, wie er Stunden am Tag arbeitet.
- Beti sortiert pro Stunde so viele Geschenke von Alphi aus, wie er Stunden am Tag arbeitet.
- In der letzten Woche haben Alphi und Beti pro Tag 209 Geschenke für den Schlitten des Weihnachtsmanns freigegeben.

Bestimmen Sie die Arbeitszeiten der Elfen.

Abgabe am 11.1.2023 bis 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.

Das gesamte Team der höheren Mathematik 1 wünscht Ihnen schöne Feiertage und einen guten Rutsch in das neue Jahr.