Blatt 1 12.10.2022

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Aufgabe 1.1. [Vollständige Induktion]

a) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(i) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

(ii) $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$

b) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

(i) mit Hilfe vollständiger Induktion.

(ii) indem Sie den Ausdruck $\frac{1}{k(k+1)}$ in die Form $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$ mit geeigneten $A, B \in \mathbb{R}$ zerlegen und mittels Indextransfomation die Identität direkt nachweisen.

Aufgabe 1.2. [Die Fibonacci-Zahlen] Die *Fibonacci-Zahlen* f_k sind für $k \in \mathbb{N}_0$ durch

$$f_0 = 0, \qquad f_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad f_{k+2} = f_k + f_{k+1}$$

definiert.

a) Bestimmen Sie f_2 bis f_7.

b) Zeigen Sie: Für $k \geq 5$ gilt $f_k = 5f_{k-4} + 3f_{k-5}$.

c) Beweisen Sie mit Hilfe von Teilaufgabe a) und b), dass für $k \in \mathbb{N}$ die *Fibonnacci-Zahl* f_{5k} durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 1.3. [Abschätzung einer Summe] Beweisen Sie mit vollständiger Induktion die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Aufgabe 1.4. [Binomialkoeffizient]

a) Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen n und $k \in \mathbb{N}$ folgende Gleichheit gilt:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \ldots + \binom{n+k}{k} = \binom{n+k+1}{k}$$

b) Sei $a_1 = 12$ und für $n > 1$ sei $a_{n+1} = \frac{2n+6}{2n+1} a_n$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichheit

$$a_n = \frac{n!(n+2)!4^n}{(2n)!}.$$

Abgabe am 19.10.2022 um 14:00 Uhr in die Briefkästen oder online.