Name:
Matrikelnummer:

TU Dortmund 21.3.2023

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Klausur 2

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Informationen zur Klausur

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten
- Die Klausur umfasst 10 Aufgaben, es können bis zu 100 Punkte erreicht werden
- Die Klausur ist in jedem Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht werden
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen
- Benutzen Sie keinen Rotstift und keinen Bleistift
- Tragen Sie auf jede Seite Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein
- Schreiben Sie Ihre Antworten unter die Aufgabe und, falls notwendig, auf die Rückseite der Aufgabenseite. Falls der Platz nicht reicht, so verwenden Sie die Zusatzblätter am Ende des Klausurenblocks; in diesem Fall: Vorne ein klarer Hinweis darauf.

Täuschungsversuche

Spickzettel, Reden mit dem Nachbarn, Hinübersehen zum Nachbarn wird als Täuschungsversuch gewertet. Wir sind streng mit elektronischen Geräten wie Smartphones, Taschenrechner, Smartwatches und Ähnlichem: Wenn wir ein solches Gerät an Ihrem Platz sehen, so wird dies ebenfalls als Täuschungsversuch gewertet.

Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur als nicht bestanden gewertet.

Die nachfolgende Tabelle ist für die Korrektur durch uns, bitte tragen Sie hier nichts ein!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
von 9	von 14	von 15	von 12	von 9	von 8	von 8	von 9	von 8	von 8

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1. [9 Punkte]

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix. Wann heißt ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ein *Eigenvektor* von A? Wann heißt eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ein *Eigenwert* von A? Geben Sie ein Kriterium an, das garantiert, dass A diagonalisierbar ist.

b) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ an, die nicht diagonalisierbar ist.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2. [14 Punkte]

a) Wann heißt eine Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *konvergent* gegen $a \in \mathbb{R}$?

b) Wann heißt eine Zahlenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *beschränkt*?

c) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$. Zeigen Sie, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

d) Es sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Folgegliedern

$$a_k := 1 + \frac{1}{k} + (-1)^k.$$

Hat $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge? Begründen Sie dies.

e) Gibt es eine beschränkte Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die keine konvergente Teilfolge besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.

f) Geben Sie Folgen $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit folgenden Eigenschaften an:

(i) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, aber keine konstante Folge.
(ii) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt.
(iii) $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist unbeschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge.
(iv) $a_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3. [15 Punkte]

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix. Definieren Sie die Begriffe $\operatorname{Rang} A$, $\operatorname{Bild} A$ und $\operatorname{Kern} A$.

b) Geben Sie Beispiele von Matrizen $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ an mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\operatorname{Rang} A = 2$.

(ii) $\operatorname{Rang} A = 1$.

(iii) $\dim \operatorname{Kern} A = 2$.

(iv) $\operatorname{Kern} A = \operatorname{Span}((1,1,1))$.

(v) $\operatorname{Bild} A = \operatorname{Span}((1,1))$.

c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit Eigenwert λ zum Eigenvektor x. Zeigen Sie, dass λ^2 ein Eigenwert der Matrix A^2 zum Eigenvektor x ist.

d) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit Eigenwert λ zum Eigenvektor x. Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$, dass λ^k ein Eigenwert der Matrix A^k zum Eigenvektor x ist.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4. [12 Punkte]

a) Es sei $z \in \mathbb{C} = \{z = a + b\mathrm{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Zeigen Sie, dass $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ gilt. Folgern Sie daraus für $z \neq 0$:
$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

b) Wir betrachten Polarkoordinaten, also die Abbildung
$$\psi\colon (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{C}, \ (r, \varphi) \mapsto re^{\mathrm{i}\varphi}.$$

(i) Ist ψ injektiv? Ist ψ surjektiv? Was ist $\mathrm{Bild}(\psi)$?

(ii) Ist ψ linear?

Begründen Sie Ihre Antworten.

c) Es sei $z = re^{\mathrm{i}\varphi} \in \mathbb{C}$. Geben Sie $\overline{z}$ in Polarkoordinaten an. Verifizieren Sie die Gleichung $z \cdot \overline{z} = |z|^2$ in Polarkoordinaten.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5. [9 Punkte]

a) Geben Sie für eine Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ das *Leibnizkriterium* an.

b) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wir betrachten die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_k := \begin{cases} 1, & k = 4j+1,\ j \in \mathbb{N}_0 \\ 1, & k = 4j+2,\ j \in \mathbb{N}_0 \\ -1, & k = 4j+3,\ j \in \mathbb{N}_0 \\ -1, & k = 4j+4,\ j \in \mathbb{N}_0 \end{cases}.$$

Welche Voraussetzungen des Leibnizkriteriums erfüllt die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k \frac{1}{k}$?

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} s_k \frac{1}{k}$ konvergent ist. Benutzen Sie dafür das Leibnizkriterium.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6. [8 Punkte]
Wenden Sie die Gram-Schmidt Orthogonalisierung auf die Vektoren $u_1 = (2, 1, 0, 2)$, $u_2 = (1, 1, 1, 3)$ und $u_3 = (-4, -3, 1, 1)$ aus dem $\mathbb{R}^4$ an.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 7. [8 Punkte]
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

a) $|z - 2\mathrm{i}| = |z + 2|$.

b) $\mathrm{Re}(\overline{z}^2) = -(\mathrm{Im}(\overline{z}))^2$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 8. [9 Punkte]
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrix A die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 3$ und $\lambda_3 = -3$ besitzt.

b) Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 9. [8 Punkte]
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz

$$\text{a)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)!}, \qquad \text{b)}\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+1)^2}{2^k}.$$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 10. [8 Punkte]
Es seien die Ebenen

$$E_1 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = (1,0,0) + r \cdot (1,0,1) + s \cdot (0,-1,0),\ r,s \in \mathbb{R} \right\}$$
$$E_2 := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = (1,0,0) + r \cdot (1,1,0) + s \cdot (0,0,1),\ r,s \in \mathbb{R} \right\}$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie die Hesse-Normalenform der Ebenen E_1 und E_2.

b) Zeigen Sie, dass der Schnitt der Ebenen E_1 und E_2 die Gerade

$$G = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = (1,0,0) + r \cdot (1,1,1),\ r \in \mathbb{R} \right\}$$

ist.

Name:
Matrikelnummer:

Name:
Matrikelnummer: