TU Dortmund 15.2.2023

Höhere Mathematik I (P/ET/AI/MP/DS)

Klausur 1

Wintersemester 2022/23

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Informationen zur Klausur

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten
- Die Klausur umfasst 10 Aufgaben, es können bis zu 100 Punkte erreicht werden
- Die Klausur ist in jedem Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht werden
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen
- Benutzen Sie keinen Rotstift und keinen Bleistift
- Tragen Sie auf jede Seite Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer ein
- Schreiben Sie Ihre Antworten unter die Aufgabe und, falls notwendig, auf die Rückseite der Aufgabenseite. Falls der Platz nicht reicht, so verwenden Sie die Zusatzblätter am Ende des Klausurenblocks; in diesem Fall: vorne ein klarer Hinweis darauf.

Täuschungsversuche

Spickzettel, Reden mit dem Nachbarn, Hinübersehen zum Nachbarn wird als Täuschungsversuch gewertet. Wir sind streng mit elektronischen Geräten wie Smartphones, Taschenrechner, Smartwatches und Ähnlichem: Wenn wir ein solches Gerät an Ihrem Platz sehen, so wird dies ebenfalls als Täuschungsversuch gewertet.

Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur als nicht bestanden gewertet.

Die nachfolgende Tabelle ist für die Korrektur durch uns, bitte tragen Sie hier nichts ein!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
von 6	von 14	von 14	von 10	von 10	von 9	von 10	von 9	von 9	von 9

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1. [6 Punkte]

a) Was ist eine *(unendliche) Reihe?* Wann heißt eine Reihe *konvergent* und wann heißt sie *absolut konvergent?*

b) Formulieren Sie ein *Vergleichskriterium* für Reihen.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2. [14 Punkte]
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix, $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $0 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Nullmatrix.

a) Es gelte für zwei Matrizen $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$B_1 A = I = A B_2 \,.$$

Zeigen Sie, dass dann $B_1 = B_2$ gilt.

b) Wann heißt A *invertierbar*?

c) Geben Sie Kriterien an $\operatorname{Rang} A$, $\operatorname{Kern} A$, $\operatorname{Bild} A$ und $\det A$ an, die implizieren, dass A invertierbar ist.

d) Geben Sie für $n = 2$ ein $A \neq 0$ an mit $A^2 = 0$.

e) Zeigen Sie für $n = 2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A^2 = 0$, dass A nicht invertierbar ist.

f) Geben Sie ein $n \in \mathbb{N}$ und ein $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ an mit $A^2 \neq 0$ und $A^3 = 0$.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3. [14 Punkte]

a) Es sei V ein reeller Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren. Wann heißen die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ *linear unabhängig* und wann heißen sie eine *Basis* von V?

b) Geben Sie für jede der nachfolgenden Teilaufgaben einen Vektorraum V und Vektoren $u, v \in V$ an, die die Anforderungen erfüllen.

(i) $u \neq 0$, $v \neq 0$, $u \neq v$ und u, v sind linear abhängig.

(ii) u und v sind linear unabhängig, bilden aber keine Basis von V.

(iii) Es gilt $\mathrm{Span}(u, v) = V$, aber u, v bilden keine Basis von V.

c) Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, also $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $U := \mathrm{Bild}\, A^{\mathrm{T}} \subset \mathbb{R}^n$ und $V := \mathrm{Kern}\, A \subset \mathbb{R}^n$.

(i) Zeigen Sie, dass für alle $u \in U$ und $v \in V$ gilt: $\langle u, v \rangle = 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle v, u \rangle = 0$ für alle $u \in U$ gilt: $v \in V$.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4. [10 Punkte]

a) Geben Sie Abbildungen $f\colon [0,1] \to [0,1]$ an, sodass gilt:

   (i) f ist surjektiv, aber nicht injektiv.

   (ii) f ist injektiv, aber nicht surjektiv.

   (iii) f ist bijektiv, aber nicht stetig.

b) Es seien A, B, C nichtleere Mengen und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

   (i) Sind f und g beide surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

   (ii) Ist g nicht injektiv, so ist $g \circ f$ nicht injektiv.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 5. [10 Punkte]
Für eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die *Folge der geometrischen Mittelwerte* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch

$$g_n := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

a) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

b) Geben Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an, sodass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, aber $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Zeigen Sie: Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, so konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gegen a.
Hinweis: Benutzen Sie den Logarithmus. Sie dürfen die aus der Übung bekannte Eigenschaft verwenden, dass für eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ auch die Folge der *arithmetischen Mittelwerte* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ gegen a konvergiert.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 6. [9 Punkte]
Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:

a) $\dfrac{1}{z} + \overline{z} = 2$ und $|z| = 1$.

b) $z^3 + |z|^2 = 0$.

b) $\mathrm{Re}(z^2) = -(\mathrm{Im}(z))^2$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 7. [10 Punkte]
Bestimmen Sie einen Eigenvektor der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3},$$

der auf dem Vektor $v = (-1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ senkrecht steht.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 8. [9 Punkte]
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_1 := a, \qquad a_2 := b, \qquad a_{n+1} := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}) \;\text{ für } n \geq 2.$$

a) Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$a_{k+1} - a_k = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} (b - a).$$

b) Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{3}(2b + a)$ gilt.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 9. [9 Punkte]
Gegeben sei für $\alpha \in \mathbb{R}$ das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 10x_1 + \alpha x_2 + 5x_3 &= -3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die das obige Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 10. [9 Punkte]
Bestimmen Sie das Infimum und Supremum folgender Mengen ($\mathbb{N}_* = \{1, 2, ...\}$):

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$.

b) $B = \left\{ \dfrac{m+1}{m+n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N}_* \right\}$.

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x|x-2| \geq 0\}$.

Name:
Matrikelnummer:

Name:
Matrikelnummer: