TU Dortmund 09.07.2024

Höhere Mathematik IV

Probeklausur

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

Aufgabe 1.

a) Wir setzen $B_1 := B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$. Weiter sei $g\colon \partial B_1 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Geben Sie eine harmonische Funktion $u\colon B_1 \to \mathbb{R}$ an, die $u = g$ auf ∂B_1 erfüllt.
Hinweis: Schreiben Sie g als Fourier-Reihe.

b) Formulieren Sie das *Maximumprinzip* für harmonische Funktionen.

Aufgabe 2. Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \leq 1 \\ 1 & \text{für } |x| > 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie die distributionellen Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ t \mapsto 3t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Formel für die Ableitung der Fourier-Transformierten.

Aufgabe 4.

a) Geben Sie eine *abelsche* und eine *nicht abelsche* Gruppe mit 6 Elementen an. Begründen Sie kurz Ihre Wahlen.

Es seien $(G, *)$ und $(H, \#)$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $\Phi\colon G \to H$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, wenn für alle $a, b \in G$ gilt:

$$\Phi(a * b) = \Phi(a) \# \Phi(b)\,.$$

b) Es seien $(G, *)$ und $(H, \#)$ zwei Gruppen und $\Phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass $\Phi(e_G) = e_H$ und $\Phi(a^{-1}) = \Phi(a)^{-1}$ für jedes $a \in G$ gilt.

c) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi\colon G \to G\,, x \mapsto x^2$ genau dann ein Gruppenhomomorphismus ist, wenn G abelsch ist.

Aufgabe 5.

a) Es sei $(G,\cdot)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq U \subset G$. Wann nennt man U eine *Untergruppe* von G?
Hinweis: Wir schreiben in diesem Fall $(U,\cdot) \leq (G,\cdot)$.

b) Wir definieren $v := (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$ und betrachten die Menge

$$U := \{A \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{R}) \mid A \text{ hat den Eigenvektor } v\} .$$

Zeigen Sie, dass $(U,\cdot) \leq (\mathrm{GL}(3,\mathbb{R}),\cdot)$.

Aufgabe 6.

a) Gegeben sei ein autonomes System $y' = f(y)$ mit Ruhelage y_0. Wann heißt die Ruhelage y_0 *attraktiv*?

b) Wir betrachten für $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ das lineare System $\partial_t y(t) = Ay(t)$ mit Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^2$. Geben Sie Matrizen A mit den folgenden Eigenschaften an:

(i) Die Ruhelage 0 ist *asymptotisch stabil.*

(ii) Die Ruhelage 0 ist *stabil* aber nicht *attraktiv.*

(iii) Die Ruhelage 0 ist *instabil* und nicht *attraktiv.*

Begründen Sie kurz ihre Wahlen.

c) Untersuchen Sie die Ruhelagen des Systems

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^2 - 2y_1 + 2y_2 - y_1y_2 \\ -y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

auf (asymptotische) Stabilität.