Blatt 9 10.06.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV (P)

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

Alle Aufgaben werden mit 10 Punkten bewertet und gehen in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 9.1. [Die multiplikative Gruppe von $\mathbb{F}_p$] Wir definieren für eine Primzahl $p \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{F}_p^* := \{1, 2, \ldots, p-1\}$ und betrachten darauf die Multiplikation Modulo p:

$$*\colon \mathbb{F}_p^* \times \mathbb{F}_p^* \to \mathbb{F}_p^*\,,\ (a,b) \mapsto a \cdot b \bmod p\,.$$

a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung $*$ auf $\mathbb{F}_p^*$ wohldefiniert ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{F}_p^*, *)$ eine Gruppe bildet.
Anleitung für das Inverse: Betrachten Sie für ein beliebiges aber festes $a \in \mathbb{F}_p^*$ den Ausschnitt aus der Cayley-Tafel

$$\begin{array}{c|cccccc} * & 1 & 2 & 3 & \ldots & p-2 & p-1 \\ \hline a & 1*a & 2*a & 3*a & \ldots & (p-2)*a & (p-1)*a \end{array}\,.$$

Nehmen Sie dann an, dass zwei Elemente $z, w \in \mathbb{F}_p^*$ mit $z > w$ und $z * a = w * a$ existieren. Bringen Sie dies auf einen Widerspruch. Folgern Sie daraus, dass ein $v \in \mathbb{F}_p^*$ existieren muss mit $v * a = 1$.

c) Überlegen Sie sich, ob die obige Konstruktion auch für eine Zahl $p \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ möglich ist, die keine Primzahl ist.

Aufgabe 9.2. [Bilder und Urbilder von Gruppenhomomorphismen] Es seien $(G, *)$ und $(H, \#)$ zwei Gruppen mit Untergruppen $U \leq G$ und $V \leq H$. Weiter sei $\Phi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass

a) $\Phi(U) \leq H$.

b) $\Phi^{-1}(V) \leq G$.

Aufgabe 9.3. [Gruppen der Ordnung 3] Wir betrachten eine Gruppe $(G, *)$ mit $|G| = 3$ und neutralem Element e. Zeigen Sie, dass $(G, *)$ isomorph zu $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ ist.

Abgabe am 17.06.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.