Blatt 6 13.05.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV (P)

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen, alle Aufgaben gehen in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 6.1. [Fouriertransformierte der Stammfunktion] Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut-integrierbare Funktion, die die *Momentenbedingungen*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$$

erfüllt und $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}\,,\ F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,\mathrm{d}u$ eine Stammfunktion von f.

a) Zeigen Sie, dass F absolut-integierbar ist, also $\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\hat{F}(\omega) = \frac{\hat{f}(\omega)}{\mathrm{i}\omega}$ für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt.

Aufgabe 6.2. [Fouriertransformation der Hutfunktion] Wir betrachten die Hutfunktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g(t) := \begin{cases} 1 - |t| & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{g}$

a) mit Hilfe der Formel der Fouriertransformation,

b) mit Hilfe der Fouriertransformierten der Stammfunktion aus Aufgabe 6.1,

c) mit Hilfe der Faltung zweier Indikatorfunktionen.

Aufgabe 6.3. [Eigenschaften der Gaußschen Glockenkurve] Es sei $\sigma > 0$ und $G_\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die *Gaußsche Glockenkurve* aus Aufgabe 5.3.

a) Zeigen Sie, dass $G_\sigma * G_\tau = G_{\sigma+\tau}$ für $\tau > 0$ gilt, indem Sie den Faltungssatz der Fouriertransformation und Aufgabe 5.3 verwenden.

b) Zeigen Sie die punktweise Konvergenz $\lim_{\sigma\to 0} \sqrt{2\pi}\,\hat{G}_\sigma(\omega) = 1$. Insbesondere gilt, dass $G_\sigma \to \delta_0$ für $\sigma \to 0$ in $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$.

Abgabe am 20.05.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.