Blatt 5 06.05.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV (P)

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen, alle Aufgaben gehen in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 5.1. [Harmonische Funktionen auf dem Halbraum] Wir betrachten den Halbraum $\mathbb{R}^3_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$. Für Randwerte $g \in C^0(\partial\mathbb{R}^3_+)$ mit $\operatorname{supp}(g) \subset \partial\mathbb{R}^3_+$ kompakt definieren wir die Funktion

$$u\colon \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}\,, \quad u(x) = \frac{x_3}{2\pi} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^3_+} \frac{g(y)}{|x-y|^3}\,\mathrm{d}y\,.$$

Zeigen Sie, dass u harmonisch auf $\mathbb{R}^3_+$ ist.
Bemerkung: Tatsächlich erfüllt u auch die Randbedingung $u = g$ auf $\partial\mathbb{R}^3_+$.

Aufgabe 5.2. [Berechnung von Fouriertransformierten] Berechnen Sie die Fourier-Transformierte der Funktionen

a) $f(t) = \dfrac{1}{2(2t^2 - 2t + 1)}$, b) $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } |t| > 2 \\ 1 & \text{für } |t| \le 1 \\ -|t| + 2 & \text{für } 1 < |t| \le 2 \end{cases}$.

Aufgabe 5.3. [Die Gaußsche Glockenkurve] Es sei $\sigma > 0$ und die *Gaußsche Glockenkurve* $G_\sigma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}} e^{-\frac{|t|^2}{\sigma}}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\hat{G}_\sigma = \sqrt{\frac{2}{\sigma}}\, G_{\frac{4}{\sigma}}$ für alle $\sigma > 0$ gilt. Insbesondere gilt $\mathcal{F}(G_2) = G_2$.

Abgabe am 13.05.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.