Blatt 4 29.04.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV (P)

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen, alle Aufgaben gehen in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 4.1. [Distributionelle Ableitungen] Wir definieren die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 1 & \text{für } x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{für } x_2 < 0 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die distributionellen Ableitungen $\partial_1 f, \partial_2 f \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Aufgabe 4.2. [Greensche Funktion für den Halbraum] Wir betrachten den Halbraum $\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$. Für einen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ definieren wir den gespiegelten Punkt $\tilde{x} := (x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$. Weiter definieren wir $G\colon \mathbb{R}^n_+ \times \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ durch

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(\tilde{x} - y) \,.$$

Zeigen Sie, dass $-\Delta_y G(x, .) = \delta_x$ im Distributionssinn auf $\mathbb{R}^n_+$ und $G(x, y) = 0$ für alle $x \in \partial\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_n = 0\}$ gilt. Es sei $f \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$. Wir definieren

$$u(x) := \int_{\mathbb{R}^n_+} G(x, y) f(y) \, \mathrm{d}y \,.$$

Zeigen Sie, dass u eine Lösung ist von

$$-\Delta u = f \text{ in } \mathbb{R}^n_+ \,, \qquad u = 0 \text{ auf } \partial\mathbb{R}^n_+ \,.$$

Aufgabe 4.3. [Fouriertransformierte der Ableitung] Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut-integrierbare Funktion, die die *Momentenbedingung*

$$\int_{\mathbb{R}} |t f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty$$

erfüllt. Zeigen Sie, dass die Fourier-Transformierte $\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar ist und die Ableitung gegeben ist durch

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (-\mathrm{i}t) f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t \,.$$

Abgabe am 06.05.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.