Blatt 2 15.04.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV (P)

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen, alle Aufgaben gehen in die Studienleistung ein.

Aufgabe 2.1. [Dirichlet-Problem auf dem Außenraumgebiet] Es sei $R > 0$ ein Radius, $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B_R(0)} \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $g \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R})$. Konstruieren Sie mittels Fourierreihen eine Lösung des *Dirichlet-Problems*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{in } \Omega\,, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega = \partial B_R(0)\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Entwickeln Sie die Funktion g als Fourierreihe.

Aufgabe 2.2. [Zwiebelintegration] Beweisen Sie für $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Formel

$$\int_{B_R(0)} f \,\mathrm{d}V = \int_0^R \int_{\partial B_r(0)} f \,\mathrm{d}S \,\mathrm{d}r\,. \tag{1}$$

Anleitung: Definieren Sie $T_R : x \mapsto Rx$ und damit $(f \circ T_R)(x) = f(Rx)$, um die linke Seite als Integral über $B_1(0)$ zu schreiben. Differenzieren Sie die zu vergleichenden Ausdrücke nach R. Ein Integral der Form

$$\int_{B_1(0)} (\nabla f) \circ T_R(x) \cdot x \, dx$$

wird mit partieller Integration behandelt.

Aufgabe 2.3. [Lösungseigenschaft der Fundamentallösung] Im Raum $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 2$ definieren wir die *Fundamentallösung* $\Phi\colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ durch

$$\Phi(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2\omega_2} \ln(|x|) & \text{für } n = 2\,, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |x|^{-(n-2)} & \text{für } n \geq 3\,. \end{cases}$$

Dabei bezeichnet der Faktor ω_n das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

a) Verifizieren Sie für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\nabla\Phi(x) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{x}{|x|} \frac{1}{|x|^{n-1}}\,.$$

b) Folgern Sie, dass $-\Delta\Phi = 0$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt.

Abgabe am 22.04.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.