Blatt 12 01.07.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV (P)

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

Alle Aufgaben werden mit 10 Punkten bewertet und gehen in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 12.1. [Stabilität linearer Systeme] Wir betrachten für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ das lineare System mit konstanten Koeffizienten $y' = Ay$.

a) Zeigen Sie, dass die Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann *stabil* ist, wenn $\sup_{t\geq 0} \|e^{tA}\| < \infty$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^n$ genau dann *attraktiv* ist, wenn $\lim_{t\to\infty} \|e^{tA}\| = 0$ gilt.

Erinnerung zu Aufgabe 12.1: Die Matrix e^{tA} ist die Fundamentalmatrix. Für einen Anfangswert $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n$ ist also

$$\varphi_{y_0} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n\,,\ t \mapsto e^{tA} y_0$$

die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay$ mit $y(0) = y_0$.

Aufgabe 12.2. [Asymptotische Stabilität mit Ljapunovfunktionen] Wir betrachten für $b, \omega \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $b < 2\omega$ die Differentialgleichung

$$z'' + bz' + \omega^2 z = 0\,.$$

Setzen wir $y = (y_1, y_2) := (z, z')$, so erhalten wir das autonome System

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\left(\omega^2 y_1 + b y_2\right) \end{pmatrix} =: F(y_1, y_2)\,.$$

Weiter definieren wir die Funktionen

$$V \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,,\ (y_1, y_2) \mapsto \frac{\omega^2}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2 \quad \text{und} \quad V^*(y_1, y_2) := \langle \nabla V(y_1, y_2), F(y_1, y_2) \rangle\ .$$

a) Zeigen Sie, dass die Ruhelage $y_0 = (0, 0)$ des autonomen Systems asymptotisch stabil ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion V ein striktes relatives Minimum in y_0 hat.

c) Zeigen Sie, dass $V^*(y_1, y_2) \leq 0$ für jedes $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Aufgabe 12.3. [Stabilitätsaussage mit Hilfe der Ableitung] Wir betrachten das autonome System

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sin(y_1)\cos(y_2) + y_2\left(1 - 2e^{y_2}\right) , \\ y_2' &= y_1 \cos(y_1) - e^{y_1}\sin(y_2) . \end{aligned}$$

Berechnen Sie alle Ruhelagen des Systems und prüfen Sie diese auf asymptotische Stabilität.
Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass keine Ruhelage der Form (ξ_1, ξ_2) mit $\xi_1 \neq 0 \neq \xi_2$ existiert.

Abgabe am 08.07.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.