Blatt 11 24.06.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV (P)

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

Alle Aufgaben werden mit 10 Punkten bewertet und gehen in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 11.1. [Der Homomorphiesatz] Es seien $(G, *)$ und $(H, \#)$ Gruppen und $f\colon G \to H$ eine Gruppenhomomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathrm{Kern}(f) := \{g \in G \mid f(g) = e_H\}$ ein Normalteiler in G ist.

b) Zeigen Sie, dass f genau dann injektiv ist, wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{e_G\}$ gilt.

c) Zeigen Sie, dass $G/\mathrm{Kern}(f) \cong f(G)$.

Aufgabe 11.2. [Satz von Cayley für endliche Gruppen] Zeigen Sie, dass jede endliche Gruppe $(G, *)$ mit $|G| = n \in \mathbb{N}$ isomorph zu einer Untergruppe der $\mathcal{S}_n$ ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1) Nummerieren Sie die Gruppenelemente von G durch. Fixieren Sie also eine Bijektion $G \to \{1, \dots, n\}$.

2) Wir bezeichnen mit $\Sigma(G)$ die Menge aller Bijektionen $G \to G$. Zeigen Sie, dass $(\Sigma(G), \circ)$ eine zur $\mathcal{S}_n$ isomorphe Gruppe ist.

3) Zeigen Sie, dass für jedes $g \in G$ die Linksmultiplikation $\lambda_g\colon G \to G\,,\ x \mapsto g * x$ eine Bijektion ist.

4) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\lambda\colon G \to \Sigma(G)\,,\ g \mapsto \lambda_g$ ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist.

5) Folgern Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe der $\mathcal{S}_n$ ist.

Aufgabe 11.3. [Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten] Untersuchen Sie, ob für die folgenden Matrizen $A_i \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $(i = 1, \dots, 6)$ die Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^2$ der linearen Systeme $\partial_t y(t) = A_i y(t)$ *stabil* und *attraktiv* ist:

$$A_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}, \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_4 := \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}, \qquad A_5 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A_6 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Abgabe am 01.07.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.