Blatt 10 17.06.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV (P)

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

Alle Aufgaben werden mit 10 Punkten bewertet und gehen in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 10.1. [Die Quotientengruppe] Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e und $N \trianglelefteq G$ ein Normalteiler. Zeigen Sie, dass die Menge $G/N = \{gN \mid g \in G\}$ mit der Verknüpfung

$$gN \cdot hN := (gh)N$$

eine Gruppe mit neutralem Element eN und Inversen $(gN)^{-1} = g^{-1}N$ bildet.

Aufgabe 10.2. [Die orthogonale und die spezielle orthogonale Gruppe]

a) Zeigen Sie, dass die Mengen

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(n) &:= \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;\middle|\; A^T A = I_n \right\} \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})\,, \\ \mathrm{SO}(n) &:= \{ A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1 \} \subset \mathrm{O}(n)\,, \end{aligned}$$

mit der Matrizenmultiplikation Gruppen bilden.

Wir betrachten für $\varphi \in [0, 2\pi)$ die Matrix

$$R(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2) \qquad \text{und} \qquad S := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2)\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{R(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$ mit der Verknüpfung

$$R(\varphi) \odot R(\tau) := R([\varphi + \tau] \bmod 2\pi)$$

eine Gruppe bildet.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(2) \cong \{R(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

d) Bestimmen Sie die kleinste Untergruppe G von $\mathrm{O}(2)$, die die Elemente $R(\frac{\pi}{2})$ und S enthält. Ist diese Gruppe isomorph zu einer Ihnen bekannten Gruppe?

Aufgabe 10.3. [Berechnung einer Quotientengruppe]

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(n)$ ein Normalteiler in $\mathrm{O}(n)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n)/\mathrm{SO}(n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Abgabe am 24.06.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.