Blatt 1 08.04.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

In jeder Aufgabe sind maximal 10 Punkte zu erreichen.

Die Aufgaben 1.1, 1.2 und 1.3 gehen mit in die Studienleistung ein.

Aufgabe 1.1. [Die eindimensionale Laplacegleichung] Sei $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Geben Sie alle Lösungen zu folgenden Gleichungen an, wobei $v, w, y, z \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u(a) = v, \quad u(b) = w \tag{1}$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad u(a) = v, \quad \partial_x u(b) = z \tag{2}$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_x u(a) = y, \quad \partial_x u(b) = z \tag{3}$$

Prüfen Sie jeweils, ob Eindeutigkeit und das Maximumprinzip gelten.

Aufgabe 1.2. [Wellengleichung in $\mathbb{R}_-$] Wir setzen $\mathbb{R}_- := (-\infty, 0)$. Sei $\Phi \in C^2(\mathbb{R}_-, \mathbb{R})$ mit $\overline{\{x \in \mathbb{R}_- \mid \Phi(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}$ kompakt. Finden Sie die Lösung des Problems

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 && \text{für alle } (x,t) \in (-\infty,0) \times (0,\infty)\,, \\ u(x,0) = \Phi(x)\,, \quad \partial_t u(x,0) &= -\partial_x \Phi(x)\,, && \text{für alle } x < 0 \\ u(0,t) &= 0 && \text{für alle } t > 0\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Erweitern Sie das Halbraumproblem in $\mathbb{R}_-$ durch Spiegelung auf ein Ganzraumproblem in $\mathbb{R}$.

Aufgabe 1.3. [Dirichlet-Problem auf einer Kreisscheibe] Es sei $B_a(0) \subset \mathbb{R}^2$ eine Kreisscheibe mit Radius $a > 0$ um 0. Zeigen Sie, dass das *Dirichlet-Problem* in $B_a(0)$

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0 && \text{in } B_a(0)\,, \\ u(x,y) &= f(x,y) && \text{auf } \partial B_a(0) \end{aligned}$$

in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}\,\partial_r(r\,\partial_r U(r,\varphi)) + \frac{1}{r^2}\,\partial_\varphi^2 U(r,\varphi) &= 0 && \text{für } 0 < r < a\,,\ 0 < \varphi < 2\pi\,, \\ U(a,\varphi) &= \tilde{f}(\varphi) && \text{für } 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

mit $U(r,\varphi) = u(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ und $\tilde{f}(\varphi) = f(a\cos(\varphi), a\sin(\varphi))$.

Abgabe am 15.04.2024 bis 12:00 Uhr online auf Moodle.