Blatt 0 08.04.2024

Übungen zur Vorlesung

Höhere Mathematik IV

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

Dieses Übungsblatt wird in der ersten Übung am 15.04.2024 bzw. am 19.04.2024 besprochen und geht nicht in die Studienleistung mit ein.

Aufgabe 0.1. [Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum] Bestimmen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \Delta u(x,t) &= 0 \qquad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\,, \\ u(x,0) &= e^{-x^2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 0.2. [Wellengleichung mit inhomogenen Randbedingungen] Wir betrachten für $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ das Anfangs-Randwertproblem mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - c^2 \Delta u(x,t) &= 0 \qquad \text{für alle } (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)\,, \\ u(0,t) = 0 &= u(\pi,t) \qquad \text{für alle } t \in (0,\infty)\,, \\ u(x,0) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t u(x,0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx) \qquad \text{für alle } x \in (0,\pi)\,. \end{aligned}$$

Konstruieren Sie die Lösung des Anfangs-Randwertproblems.

Aufgabe 0.3. [Darstellungsformel von Wellen] Wir betrachten für $k \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ die Wellengleichung

$$\begin{aligned} \partial_t^2 u(x,t) - c^2\, \Delta u(x,t) &= 0 \qquad \text{für alle } (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\,, \\ u(x,0) = \sin(kx) \quad \text{und} \quad \partial_t u(x,0) &= 0 \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie für alle $k \in \mathbb{N}$ und $c > 0$

$$\sin(k(x-ct)) + \sin(k(x+ct)) = 2\sin(kx)\cos(ckt)\,.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und $c > 0$ die Funktion $u(x,t) := \sin(kx)\cos(ckt)$ die Wellengleichung löst.