Nachname, Vorname:
Matrikelnummer:

TU Dortmund 29.07.2024

Höhere Mathematik IV

Klausur 1

Sommersemester 2024

Prof. Dr. B. Schweizer M.Sc. Tim Schubert

Informationen zur Klausur

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten
- Die Klausur umfasst 6 Aufgaben, es können bis zu 100 Punkte erreicht werden
- Die Klausur ist in jedem Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht werden
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen
- Benutzen Sie keinen Rotstift und keinen Bleistift
- Tragen Sie auf jede Seite Ihren Namen und auf das Deckblatt zusätzlich Ihre Matrikelnummer ein
- Schreiben Sie Ihre Antworten unter die Aufgabe und, falls notwendig, auf die Rückseite der Aufgabenseite. Falls der Platz nicht reicht, so verwenden Sie die Zusatzblätter am Ende des Klausurenblocks; in diesem Fall: Vorne ein klarer Hinweis darauf.

Täuschungsversuche

Spickzettel, Reden mit dem Nachbarn, Hinübersehen zum Nachbarn wird als Täuschungsversuch gewertet. Wir sind streng mit elektronischen Geräten wie Smartphones, Taschenrechner, Smartwatches und Ähnlichem: Wenn wir ein solches Gerät an Ihrem Platz sehen, so wird dies ebenfalls als Täuschungsversuch gewertet.

Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur als nicht bestanden gewertet.

Die nachfolgende Tabelle ist für die Korrektur durch uns, bitte tragen Sie hier nichts ein!

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
von 16	von 16	von 17	von 17	von 17	von 17

Σ
von 100

Nachname, Vorname:

Aufgabe 1. [16 Punkte]

a) Wir betrachten $\Omega = (0, \pi)^2 \subset \mathbb{R}^2$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Schreiben Sie f in geeigneter Weise als doppelte Fourier-Reihe. Geben Sie eine Funktion $u : \Omega \to \mathbb{R}$ in einer doppelten Fourier-Reihe an, die $\Delta u = f$ auf Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$ erfüllt.

b) Geben Sie für $n \geq 2$ das *Newton-Potential* $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ bis auf Konstanten an. Geben Sie $\nabla\Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ an. Welche Gleichung löst das Newton-Potential im Distributionssinn auf $\mathbb{R}^n$?

Nachname, Vorname:

Aufgabe 2. [16 Punkte]

Wir betrachten die Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } x \geq 0 \\ -3x & \text{für } x < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \geq 0 \\ -3 & \text{für } x < 0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie, dass $\partial_x f = g$ im Distributionssinn auf $\mathbb{R}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass $\partial_x g = 5\delta_0$ im Distributionssinn auf $\mathbb{R}$ gilt.

Nachname, Vorname:

Aufgabe 3. [17 Punkte]

a) Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut-integrierbar, $c > 0$ und $\tau \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Funktionen $h_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch

$$h_1(t) := f(ct) \quad \text{und} \quad h_2(t) := f(t-\tau)\,.$$

Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierten der Funktionen h_i gegeben sind durch

$$\hat{h}_1(\omega) = \frac{1}{c}\hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right) \quad \text{und} \quad \hat{h}_2(\omega) = \exp(-\mathrm{i}\tau\omega)\hat{f}(\omega)\,.$$

b) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte der Funktion

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad g(t) = 3\exp\left(-t^2\right) - \exp\left(-\frac{t^2}{2} + 2t - 2\right)\,.$$

Nachname, Vorname:

Aufgabe 4. [17 Punkte]

Es seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe, $U \subset G$ und $g \in G$.

a) Wann nennt man U eine *Untergruppe* von G und wann einen *Normalteiler* in G?

b) Wann nennt man G *einfach*? Geben Sie eine nicht triviale einfache Gruppe an.

Es sei $U \leq G$ eine Untergruppe.

c) Zeigen Sie, dass die Menge gUg^{-1} eine Untergruppe von G ist.

d) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathrm{int}_g \colon U \to gUg^{-1}, \; u \mapsto gug^{-1}$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Nachname, Vorname:

Aufgabe 5. [17 Punkte]

a) Wir betrachten die symmetrische Gruppe $\mathcal{S}_3$ gegeben durch

$$\mathcal{S}_3 = \{\mathrm{Id}, (12), (13), (23), (123), (132)\} \ .$$

(i) Geben Sie einen Normalteiler $U_1 \trianglelefteq \mathcal{S}_3$ mit $\{\mathrm{Id}\} \neq U_1 \neq \mathcal{S}_3$ an.

(ii) Geben Sie eine Untergruppe $U_2 \leq \mathcal{S}_3$ an, die kein Normalteiler ist.

Begründen Sie kurz, warum Ihre Beispiele die Bedingungen erfüllen.

b) Geben Sie eine *abelsche* und eine *nicht abelsche* Gruppe mit 8 Elementen an. Begründen Sie kurz, warum Ihre Beispiele die Bedingungen erfüllen.

Nachname, Vorname:

Aufgabe 6. [17 Punkte]

a) Es seien $\mathbb{R}^n$ der Phasenraum, $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und $y_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Ruhelage des autonomen Systems $\partial_t y(t) = F(y(t))$. Wann nennt man eine Funktion $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *Ljapunovfunktion*?

b) Wir betrachten für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ das lineare System $\partial_t y(t) = Ay(t)$ mit Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie Matrizen A mit den folgenden Eigenschaften an:

   (i) Die Ruhelage 0 ist *asymptotisch stabil.*

   (ii) Die Ruhelage 0 ist *stabil* aber nicht *attraktiv.*

   (iii) Die Ruhelage 0 ist *instabil* und nicht *attraktiv.*

   Begründen Sie kurz, warum Ihre Beispiele die Bedingungen erfüllen.

c) Wir betrachten das System

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_2(y_3-1) \\ -y_1(y_3-1) \\ -y_3^3(y_1^2+y_2^2+1) \end{pmatrix} =: F(y_1,y_2,y_3)$$

   mit Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^3$. Linearisieren Sie das System. Erhalten Sie aus der Linearisierung Informationen über die (asymptotische) Stabilität der Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^3$? Zeigen Sie, dass die Funktion

$$V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,,\ (y_1,y_2,y_3) \mapsto y_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$$

   eine Ljapunovfunktion ist. Zeigen Sie, dass die Ruhelage $0 \in \mathbb{R}^3$ stabil ist.

Nachname, Vorname:
Matrikelnummer:

Nachname, Vorname:
Matrikelnummer: