Der Baire'sche Kategoriensatz

B. Schweizer[1]

28. Juni 2024

1. Der Satz von Baire und erste Konsequenzen

Der Baire'sche Kategoriensatz wird meist mit Begriffen formuliert, die viele Mathematiker eigentlich nur im Umfeld dieses Satzes benötigen: "nirgends dicht", "mager", "erste Kategorie", "zweite Kategorie". Wir wollen mit dem hier vorgestellten Beweis klarmachen, dass es sich eigentlich um einen sehr einfachen Satz handelt.

Der Satz kann so formuliert werden:

> Wenn eine abzählbare Vereinigung abgeschlossener Mengen einen inneren Punkt hat, dann muss schon eine einzelne der abgeschlossenen Mengen einen inneren Punkt haben.

Theorem 1.1 (Baire'scher Kategoriensatz). *Sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subset X$ abgeschlossen. Die Vereinigung enthalte einen inneren Punkt, also: Für ein $x \in X$ und ein $\delta > 0$ gilt*

$$\overline{B_\delta(x)} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \,. \tag{1.1}$$

Dann hat für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ die Menge A_{n_0} einen inneren Punkt.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass alle Mengen A_n keinen inneren Punkt haben.

Konstruktion der Folge. Die Menge A_1 hat keinen inneren Punkt, also kann sie $B_\delta(x)$ nicht überdecken. Wir finden daher einen Punkt $b_1 \in B_\delta(x) \setminus A_1$. Da $B_\delta(x)$ offen ist und A_1 abgeschlossen, ist auch $B_\delta(x) \setminus A_1$ offen; wir finden daher einen Radius $r_1 > 0$ mit

$$\overline{B_{r_1}(b_1)} \subset B_\delta(x) \setminus A_1 \,.$$

Durch eventuelles Verkleinern von r_1 können wir $r_1 \leq \delta/2$ erreichen.

Dieser Prozess wird nun fortgesetzt. Da A_2 keinen inneren Punkt hat, kann diese Menge $B_{r_1}(b_1)$ nicht überdecken. Wir finden $b_2 \in B_{r_1}(b_1)$ und $r_2 > 0$ mit

$$\overline{B_{r_2}(b_2)} \subset B_{r_1}(b_1) \setminus A_2 \,.$$

Wir können dabei $r_2 \leq r_1/2$ erreichen.

Dieser Prozess wird fortgesetzt, er liefert eine Folge $(b_n)_n$ in X.

Der Widerspruch. Für zwei Indizes $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k > n$ gilt $b_k \in B_{r_k}(b_k) \subset B_{r_{k-1}}(b_{k-1}) \subset \ldots \subset B_{r_n}(b_n)$. Wegen $r_n \searrow 0$ ist damit insbesondere $(b_k)_k$ eine Cauchy-Folge. Die Vollständigkeit von X impliziert, dass die Folge konvergiert, es gibt also $b \in X$ mit $b_k \to b$ für $k \to \infty$.

[1]Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik, Vogelpothsweg 87, D-44227 Dortmund, ben.schweizer@tu-dortmund.de

Die Relation $b_k \in B_{r_n}(b_n)$ liefert auch für den Limes $b \in \overline{B_{r_n}(b_n)}$. Diese Kugel hat einen leeren Schnitt mit der Menge A_n, es gilt also $b \notin A_n$.

Wir finden: Der Limes b ist wie alle Folgenglieder ein Element von $\overline{B_\delta(x)}$. Andererseits liegt b in keinem A_n, also auch nicht in der unendlichen Vereinigung. Dies liefert den gewünschten Widerspruch zu (1.1). □

Der folgende Satz ist der Satz von Osgood (von 1898!) mit dem einzigen Unterschied, dass statt $\mathbb{R}$ ein allgemeiner vollständiger Raum betrachtet wird.

Theorem 1.2 (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)**.** *Sei X ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und Y ein normierter Raum. Gegeben sei eine Menge von stetigen Abbildungen von X nach Y, also eine Menge $\mathcal{F} \subset C^0(X,Y)$. Diese Menge sei punktweise beschränkt, es gelte also*

$$\forall x \in X \; : \qquad \sup\left\{\|f(x)\|_Y \mid f \in \mathcal{F}\right\} < \infty \,. \tag{1.2}$$

Dann ist die Menge auch auf einer Kugel sogar gleichmäßig beschränkt: Für ein $y \in X$ und ein $\delta > 0$ gilt

$$\sup\left\{\|f(x)\|_Y \mid f \in \mathcal{F}\,,\; x \in B_\delta(y)\right\} < \infty \,. \tag{1.3}$$

Beweis. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge

$$A_k := \left\{x \in X \mid \|f(x)\|_Y \le k \;\forall f \in \mathcal{F}\right\}.$$

Diese Menge ist der (möglicherweise überabzählbare) Schnitt von abgeschlossenen Mengen,

$$A_k = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} \left\{x \in X \mid \|f(x)\|_Y \le k\right\}.$$

Daher ist A_k abgeschlossen.

Wegen (1.2) ist jeder Punkt $x \in X$ in einer Menge A_k enthalten, es gilt also

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \,.$$

Die Vereinigung der A_k hat also einen inneren Punkt. Theorem 1.1 liefert, dass dann auch eine der Mengen A_{k_0} einen inneren Punkt hat, es gibt also $B_\delta(y) \subset A_{k_0}$. Dies zeigt (1.3). □

Wenn wir nur die Klasse linearer Abbildungen betrachten, so erhalten wir den folgenden Satz.

Theorem 1.3 (Banach-Steinhaus gleichmäßige Beschränktheit)**.** *Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Vektorraum, $\mathcal{T} \subset L(X,Y)$ eine Menge von stetigen linearen Abbildungen von X nach Y. Die Menge sei punktweise beschränkt:*

$$\forall x \in X \; : \qquad \sup\left\{\|T(x)\|_Y \mid T \in \mathcal{T}\right\} < \infty \,. \tag{1.4}$$

Dann ist die Familie $\mathcal{T}$ beschränkt:

$$\sup\left\{\|T\| \mid T \in \mathcal{T}\right\} < \infty \,. \tag{1.5}$$

Beweis. Theorem 1.2 ist anwendbar und liefert ein $y \in X$, ein $\delta > 0$ und eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $\xi \in X$ mit $\|\xi\| < \delta$ und alle $T \in \mathcal{T}$ gilt:

$$\|T(y + \xi)\| \le C \,.$$

Damit aber auch wegen Linearität $\|T(\xi)\| \leq C + \|T(y)\|$, die Operatoren sind also alle auf einer offenen Kugel gleichmäßig beschränkt, also in ihren Normen beschränkt. □

Satz 8.5 des Buches "Grundkurs Funktionalanalysis" von W. Kaballo hat den Namen Banach-Steinhaus. Er ergibt sich als einfaches Corollar.

Corollar 1.4 (Banach-Steinhaus für Folgen). *Sei X ein Banachraum und Y ein normierter Vektorraum, $(T_n)_n$ eine Folge in $L(X,Y)$ mit punktweiser Konvergenz:*

$$\forall x \in X\ \exists y =: Tx \qquad y = \lim_n T_n(x)\,. \tag{1.6}$$

Dann gilt $T \in L(X,Y)$, $\|T\| \leq \sup_n \|T_n\| < \infty$ und $T_n \to T$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von X.

Beweis. Theorem 1.3 ist auf $\mathcal{T} := \{T_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ anwendbar und liefert eine Konstante $C > 0$ mit $\|T_n\| \leq C$ für alle n. Die Linearität von T folgt mit Rechnungen wie $T(x_1 + x_2) = \lim T_n(x_1 + x_2) = \lim T_n x_1 + \lim T_n x_2 = Tx_1 + Tx_2$. Zudem gilt für jedes x mit $\|x\| \leq 1$, dass $\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq \sup_n \|T_n\|$. Insbesondere ist T stetig.

Die Konvergenz stetiger Funktionen auf kompakten Mengen ist immer gleichmäßig. Dies ist eine Standardaussage, die mit einem einfachen Widerspruchsargument folgt: Wenn nicht, so gäbe es x_n mit $T_n x_n - T x_n \not\to 0$. Wegen Kompaktheit für eine Teilfolge $x_n \to x$. Man findet einen Widerspruch mit der Dreiecksungleichung $0 < \varepsilon \leq \|T_n x_n - T x_n\| \leq \|T_n x_n - T_n x\| + \|T_n x - T x\| + \|T x - T x_n\| \to 0$. □