Tatsachen dazu:

$$\operatorname{rot}(\nabla u) = 0 \qquad (u \in C^2)$$

<u>Bew</u>: $\begin{pmatrix} \partial_2(\partial_3 u) - \partial_3(\partial_2 u) \\ \vdots \end{pmatrix} = 0$ Lemma von Schwarz

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$$

<u>Bew</u> $\partial_1(\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) + \partial_2(\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) + \partial_3(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) = 0$

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\nabla"] \arrow[rr, bend right, "\operatorname{rot}\circ\nabla = 0"'] & v = \nabla u \arrow[r, "\operatorname{rot}"] \arrow[rr, bend right, "\operatorname{div}\circ\operatorname{rot} = 0"'] & w = \operatorname{rot} v \arrow[r, "\operatorname{div}"] & f = \operatorname{div} w \end{tikzcd}$$

De Rham-Kohomologie

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "d"] & v\,dx \arrow[r, "d"] & w\,dS \arrow[r, "d"] & f\,dV \end{tikzcd}$$

Exakte Sequenz

2023-10-11

Potentiale

Frage 1: Gibt es zu $v: D \to \mathbb{R}^3$

ein u mit: $v = \nabla u$?

Wissen: $\operatorname{rot} v \neq 0 \Rightarrow \nexists u$.

"Notwendige Bed."

Gibt es zu jedem v mit $\operatorname{rot} v = 0$

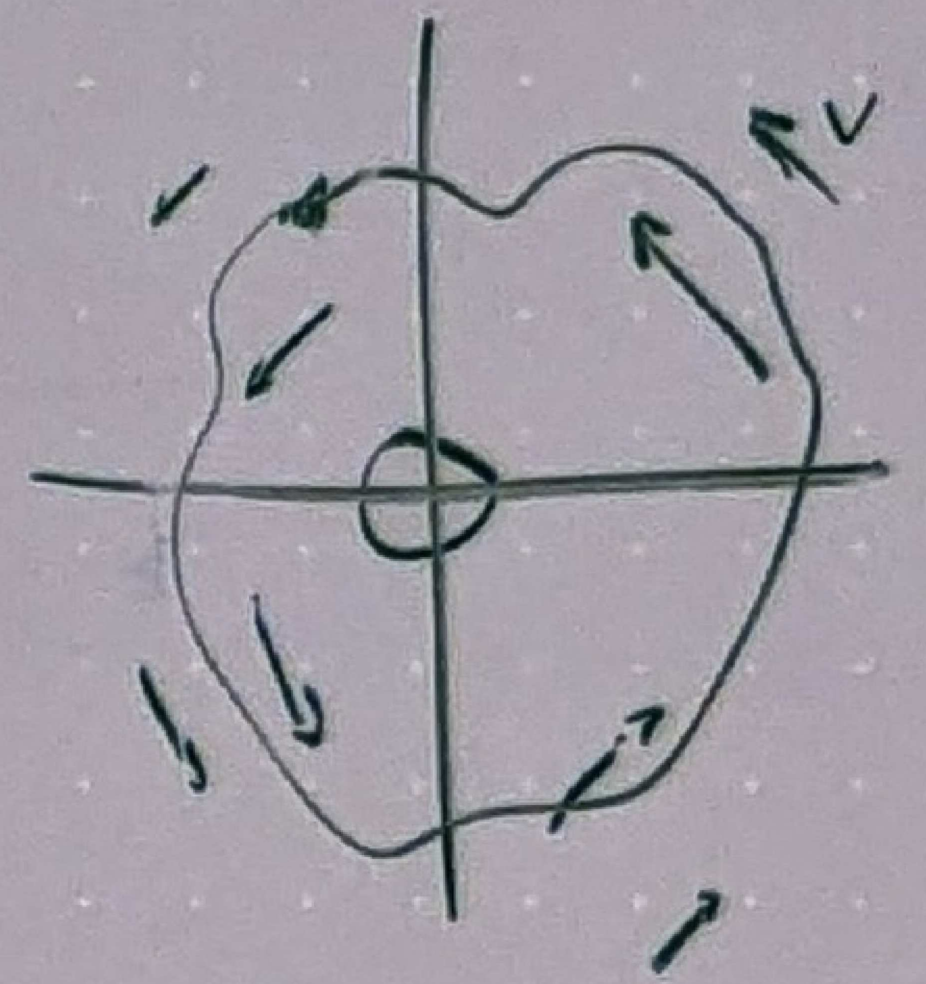
ein u mit $\nabla u = v$?

2023-10-11

Falls D einfach zusammenhgd.:

ja!

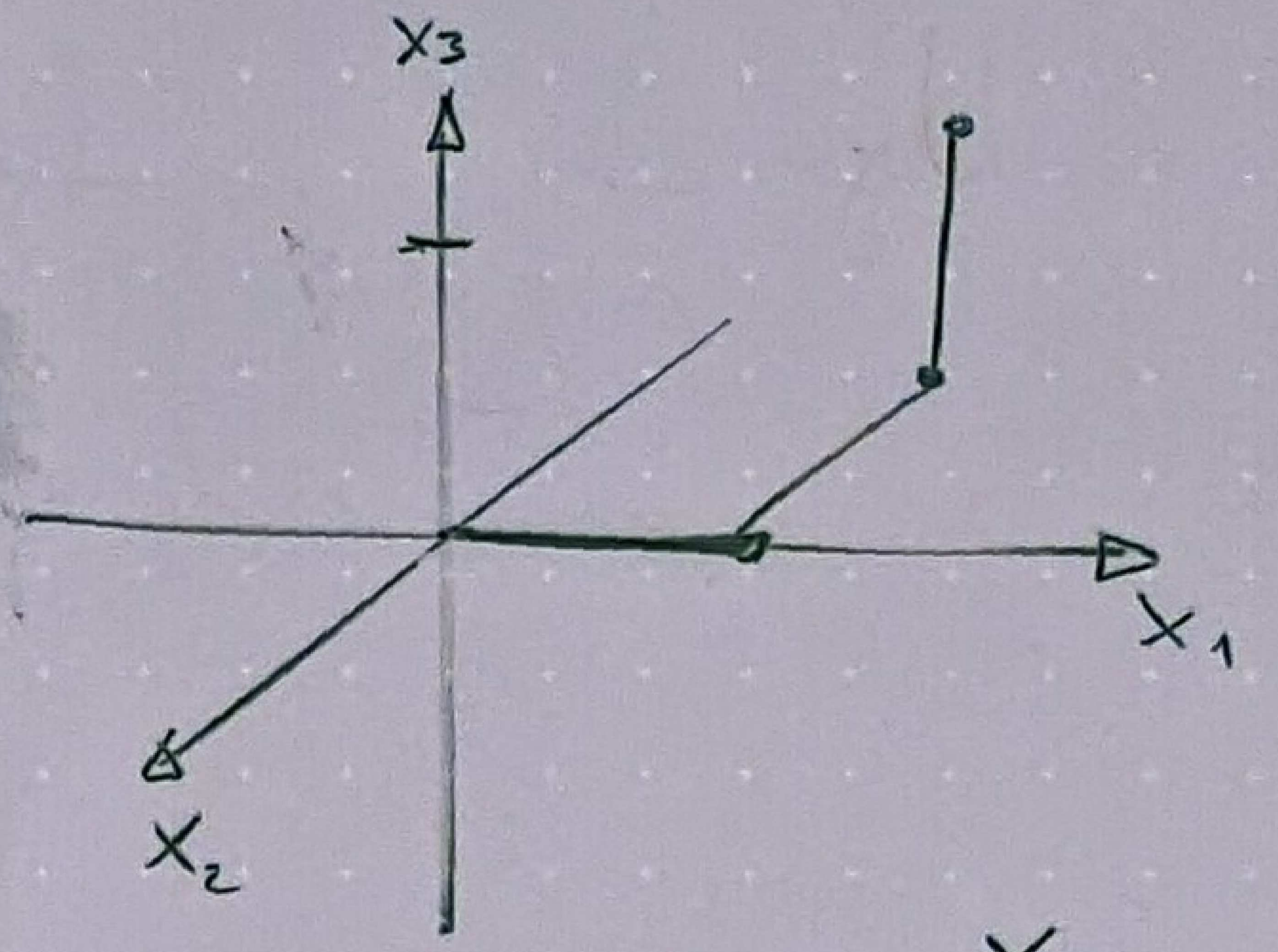
Im Allg.: nein!



Für D ein Würfel oder Kugel

$0 \in D$: Konstruiere Potential

(zu v mit $\operatorname{rot} v = 0$)



$$u(x) := \int_0^{x_1} v_1(t,0,0)\,dt + \int_0^{x_2} v_2(x_1,t,0)\,dt + \int_0^{x_3} v_3(x_1,x_2,t)\,dt$$

2023-10-11

Rechne nach:

$$\partial_3 u(x) = v_3(x) \quad \checkmark$$

$$\partial_2 u(x) = v_2(x_1,x_2,0) + \int_0^{x_3} \underbrace{\partial_2 v_3}(x_1,x_2,t)\,dt$$

$$\operatorname{rot} v = 0 \Rightarrow \partial_2 v_3 = \partial_3 v_2$$

$$= v_2(x_1,x_2,0) + \int_0^{x_3} \underbrace{\partial_3 v_2\,(x_1,x_2,t)}_{= \frac{d}{dt}\left[v_2(x_1,x_2,t)\right]}\,dt$$

$$= v_2(x).$$

$\partial_n = v_1$: Übung

<u>Frage 2:</u> Gibt es zu $w : D \to \mathbb{R}^3$ ein $v : D \to \mathbb{R}^3$ mit $w = \operatorname{rot} v$

<u>Wissen</u> $\operatorname{div} w \neq 0 \Rightarrow \nexists v$.

"Notw. Bed."

Für D Würfel oder Kugel, $0 \in D$

Konstruiere Potential (zu v mit $\operatorname{div} v = 0$)

$$w_1(x) := \int_0^{x_3} v_2(x_1, x_2, t)\,dt - \int_0^{x_2} v_3(x_1, t, 0)\,dt$$

$$w_2(x) := -\int_0^{x_3} v_1(x_1, x_2, t)\,dt$$

$$w_3(x) := 0$$

2023-10-11

Rechne nach: $\quad (\operatorname{rot} w = v\ ?)$

$$(\underbrace{\partial_2 w_3}_{=0} - \partial_3 w_2)(x) = v_1(x) \quad ✓$$

$$(\partial_3 w_1 - \underbrace{\partial_1 w_3}_{=0})(x) = v_2(x) \quad ✓$$

$$(\partial_1 w_2 - \partial_2 w_1)(x) = -\int^{x_3} \partial_1 v_1(\ldots)$$

$$-\int^{x_3} \partial_2 v_2(\ldots) \quad + \underbrace{v_3(x_1, x_2, 0)}_{= v_3(x) - \int^{x_3} \partial_3 v_3(\ldots)} = v_3(x) \quad ✓$$

$m = 0$

2023-10-11

3D: $n = 3$, $\mathbb{R}^3$

$$u \xmapsto{\text{grad}} v = \nabla u \xmapsto{\text{rot}} w = \text{rot}\, v \xmapsto{\text{div}} f = \text{div}\, w$$

$$\text{grad} = \nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}\, v = \nabla \times v = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\text{div}\, w = \nabla \cdot w = \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \partial_2 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

Beobachtung:

$$\text{rot} \circ \text{grad} = 0$$

$$\text{div} \circ \text{rot} = 0$$

2023-10-16

Potentiale: Im Würfel

v mit $\operatorname{rot} v = 0$. Dann $\exists u$: $v = \nabla u$

w mit $\operatorname{div} w = 0$. Dann $\exists v$: $w = \operatorname{rot} v$

Rechnung war: Zu v finde u

Bitte umdrehen: Zu w finde v

2023-10-16

Bemerkung: Potentiale sind ~~eindeutig~~ nicht eindeutig! (2)

Sei u mit $\nabla u = v$. Dann $u + c$ ist auch Potential ($c \in \mathbb{R}$, konst. Fkt.)

Sei v mit $\operatorname{rot} v = w$. Dann: $v + \vec{c}$ auch Potential ($\vec{c} \in \mathbb{R}^3$)

Sogar: Sei u bel. (C^2),

v mit $\operatorname{rot} v = w$

Dann erfüllt $v + \nabla u$:

$$\operatorname{rot}(v + \nabla u) = \operatorname{rot} v + \underbrace{\operatorname{rot}(\nabla u)}_{=0}$$

$$= w$$

$v + \nabla u$ ist auch ein Potential

Vektorpotentiale sind nur "bis auf Gradienten" eindeutig

Rechne:

$$\nabla \cdot (v + \nabla u) = \nabla \cdot v + \Delta u$$

Wähle u so, dass $\Delta u = -\nabla \cdot v$

Dann erfüllt das Potential

$$A := v + \nabla u$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} A = w \\ \operatorname{div} A = 0 \end{array} \right.$$

"Coulomb-Eichung"

2023-10-16

Sogar noch besser:

$$\exists B : W \to \mathbb{R}^3 : \quad A = \operatorname{rot} B$$

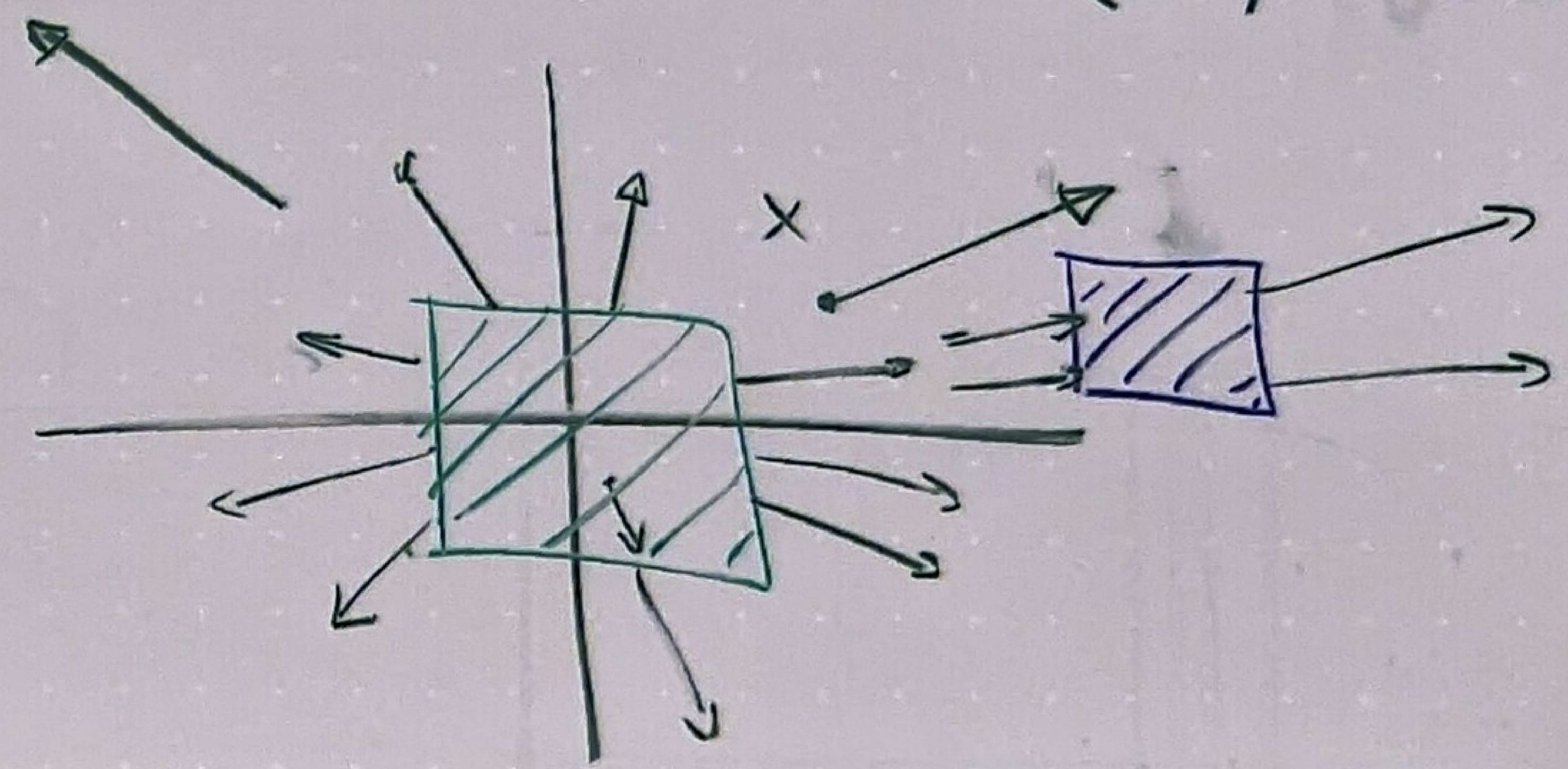
Finde Potentiale, die selbst Rotationen sind

Der Satz von Gauß

Was beschreibt die Divergenz?

Bsp: $v : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$v(x) := x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$



$$(\operatorname{div} v)(x) = (\partial_1 v_1 + \ldots + \partial_n v_n)(x)$$

$$= 1 + \ldots + 1 = n \quad \forall x$$

$v_1(x) = x_1 \Rightarrow \partial_1 v_1 \equiv 1$

div v beschreibt Quellen

(5)

Rechne für Würfel

$W = (0,1)^n$, $v : W \to \mathbb{R}^n$ sei C^1

$$\int_W \nabla \cdot v = ?$$

Zunächst für $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

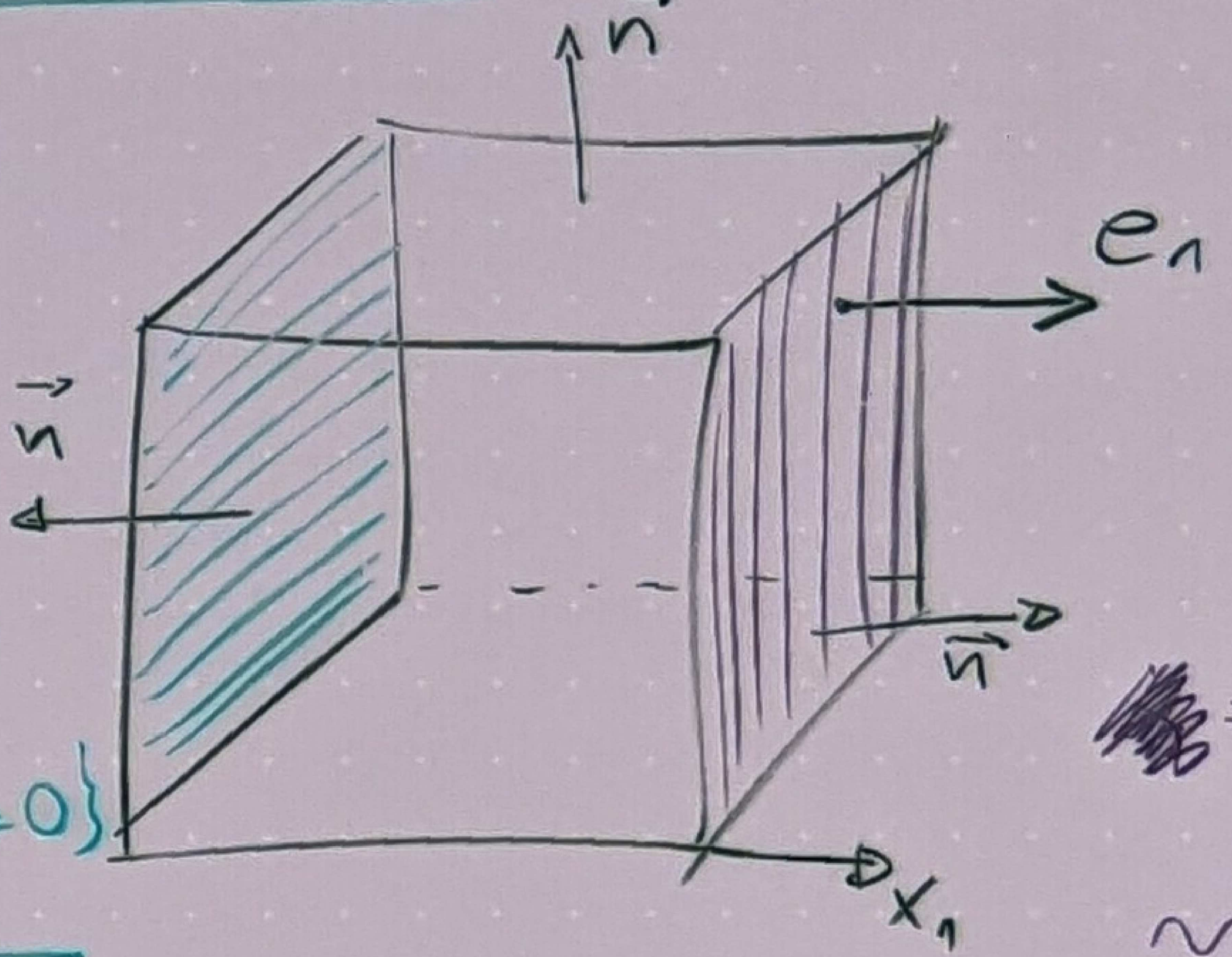
$$\int_W \nabla \cdot v \underset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \cdots \underbrace{\int_0^1 \partial_1 v_1 (x_1, \ldots, x_n)\, dx_1}_{= v_1(x_1, \ldots, x_n)\big|_{x_1=0}^{x_1=1}} \ldots dx_n$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{(n-1)\text{ Integrale}} e_1 \cdot v\,(1, x_2, \ldots, x_n) - e_1 \cdot v\,(0, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n$$

(6)

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$n = 3$



$\{x_1 = 0\}$

$= \{x_1 = 1\}$

= Ausfluss nach rechts (auf rechter Seite)

+ Ausfluss nach links (auf der linken Seite)

$e_1 \cdot v$ = Normalenvektor mal v

Komponente von v nach außen

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ hat keinen weiteren Ausfluss

Ergebnis: $\displaystyle\int_W \nabla v = \int_{\partial W} \vec{n} \cdot v$

$\vec{n}$: äußere Normale der Fläche

2023-10-16

Für $v = (0, v_2, 0, \dots, 0)$ ebenso

$\vdots$

<u>Erhalte:</u> Gauß für Würfel

Sei $v : W \to \mathbb{R}^n$ st. diffbar

Dann:

$$\int_W \nabla \cdot v = \int_{\partial W} \vec{n} \cdot v$$

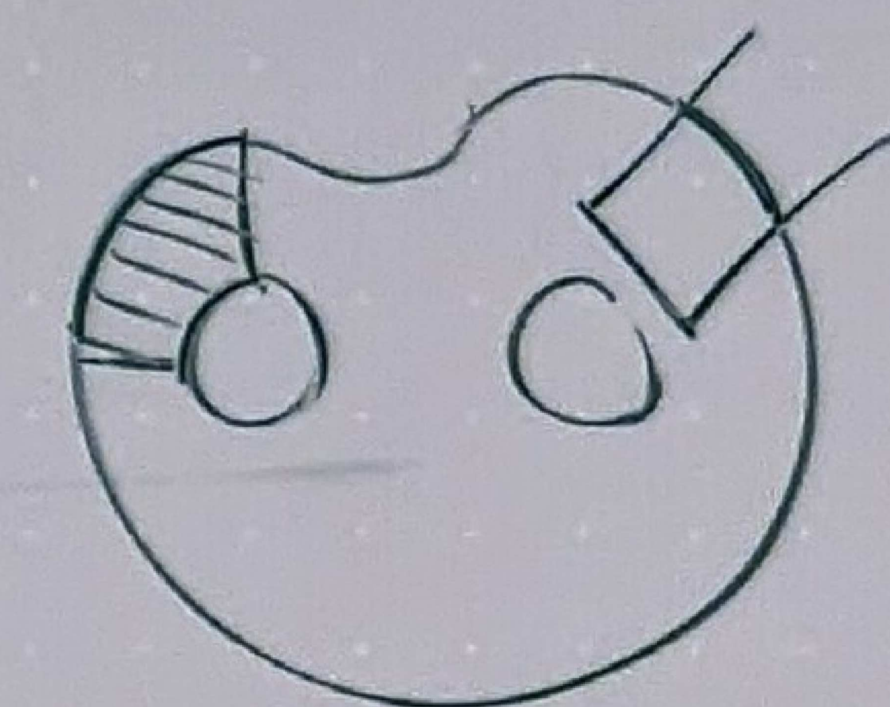
Ziel: Gauß für bel. Gebiete, dieselbe Formel

2023-10-16

Hier: "Schöne Gebiete"

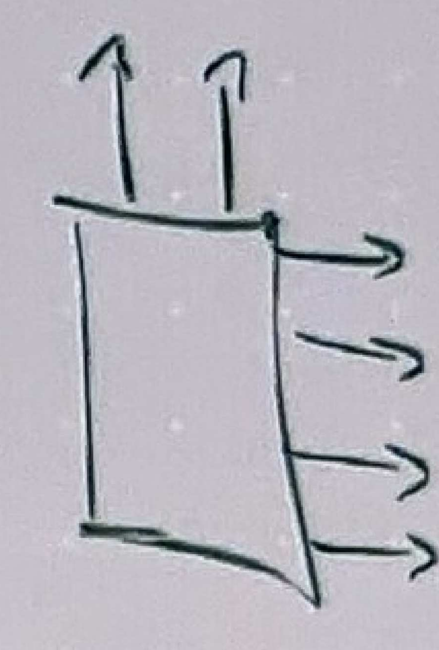
$\longrightarrow$ Normalgebiete

<u>Richtig:</u> Lipschitzgebiete



Brauche: Normalenvektor $\vec{n}$

in (fast) jedem Randpunkt.



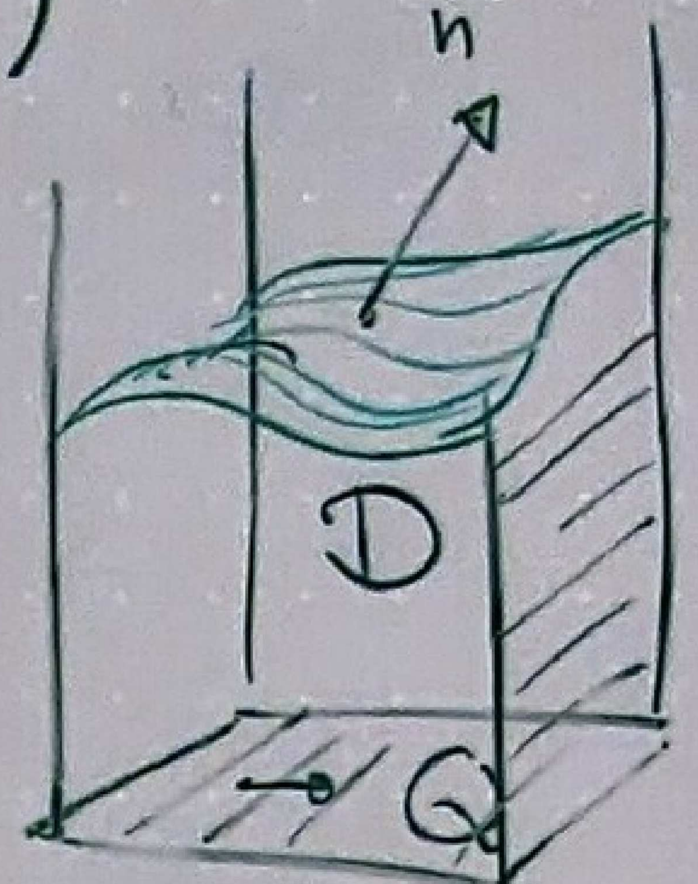
Betrachte folgende Situation

$Z := Q \times \mathbb{R}_+$, $\quad Q = (0,1)^{n-1}$

$h : Q \to \mathbb{R}_+$

Höhenfunktion

(C^1)



$D := \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in Z \;\middle|\; x_n < h(x_1,\dots,x_{n-1}) \right\}$

$v : D \to \mathbb{R}^n$ sei C^1, $\quad v \equiv 0$ auf ∂Z

2023-10-16

Also: $v = 0$ unten und seitlich

Gleich: Berechne $\int_D \nabla \cdot v = \dots$

$\vec{n}$ am oberen Rand, also:

$$x = (\underbrace{x_1,\dots,x_{n-1}}_{=:\tilde{x} \in Q}, h(\underbrace{x_1,\dots,x_{n-1}}_{\tilde{x}})) \qquad x = (\tilde{x}, x_n)$$

$$\vec{n} = \vec{n}(x) = \frac{(-\partial_1 h, \dots, -\partial_{n-1} h, 1)}{\underbrace{\sqrt{1 + |\partial_1 h|^2 + \dots + |\partial_{n-1} h|^2}}_{①}}(x)$$

Bem: Warum ist das der Normalenvektor?

Ein Weg durch Fläche ist

$$\gamma(t) := \big(x_1 + t, x_2, \dots, x_{n-1}, h(x_1+t, x_2, \dots, x_{n-1})\big)$$

$$\frac{d}{dt}\gamma(t)\Big|_{t=0} = \gamma'(0) = \big(1, 0, \dots, 0, \partial_1 h(\tilde{x})\big)$$

ein Tangentialvektor

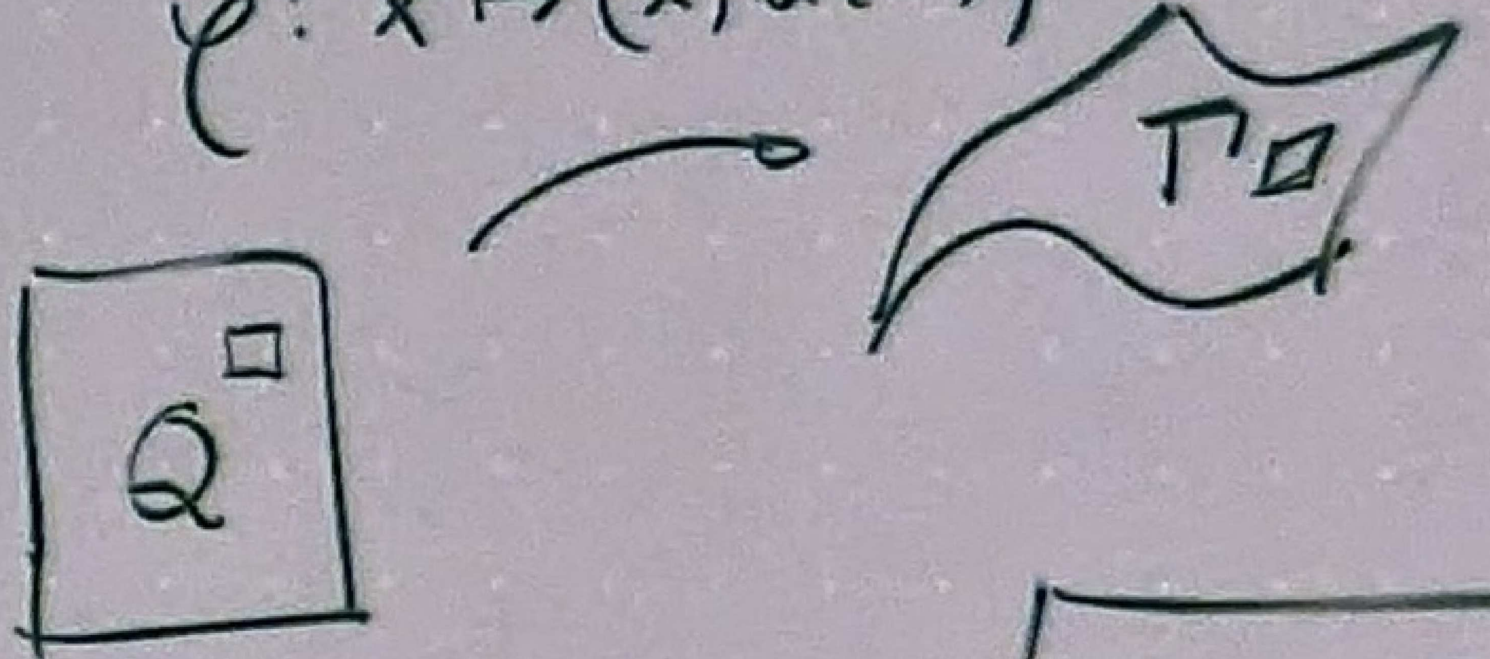
Test: $\vec{n} \cdot \gamma'(0) = (-\partial_1 h + \partial_1 h)/\sqrt{\ } = 0$

Flächenintegral

$$T := \{(\tilde{x}, x_n) \mid \tilde{x} \in Q, x_n = h(\tilde{x})\}$$

$$\int_T f = \int_Q f(\tilde{x}, h(\tilde{x})) \underbrace{\sqrt{g}}_{②} \, d\tilde{x}$$

$$\varphi : \tilde{x} \mapsto (\tilde{x}, h(\tilde{x}))$$



$$\sqrt{g} = \sqrt{\det D\varphi^T \cdot D\varphi}$$

$$\overset{(!)}{=} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{n-1} |\partial_j h|^2}$$