

HöMa

III

M:

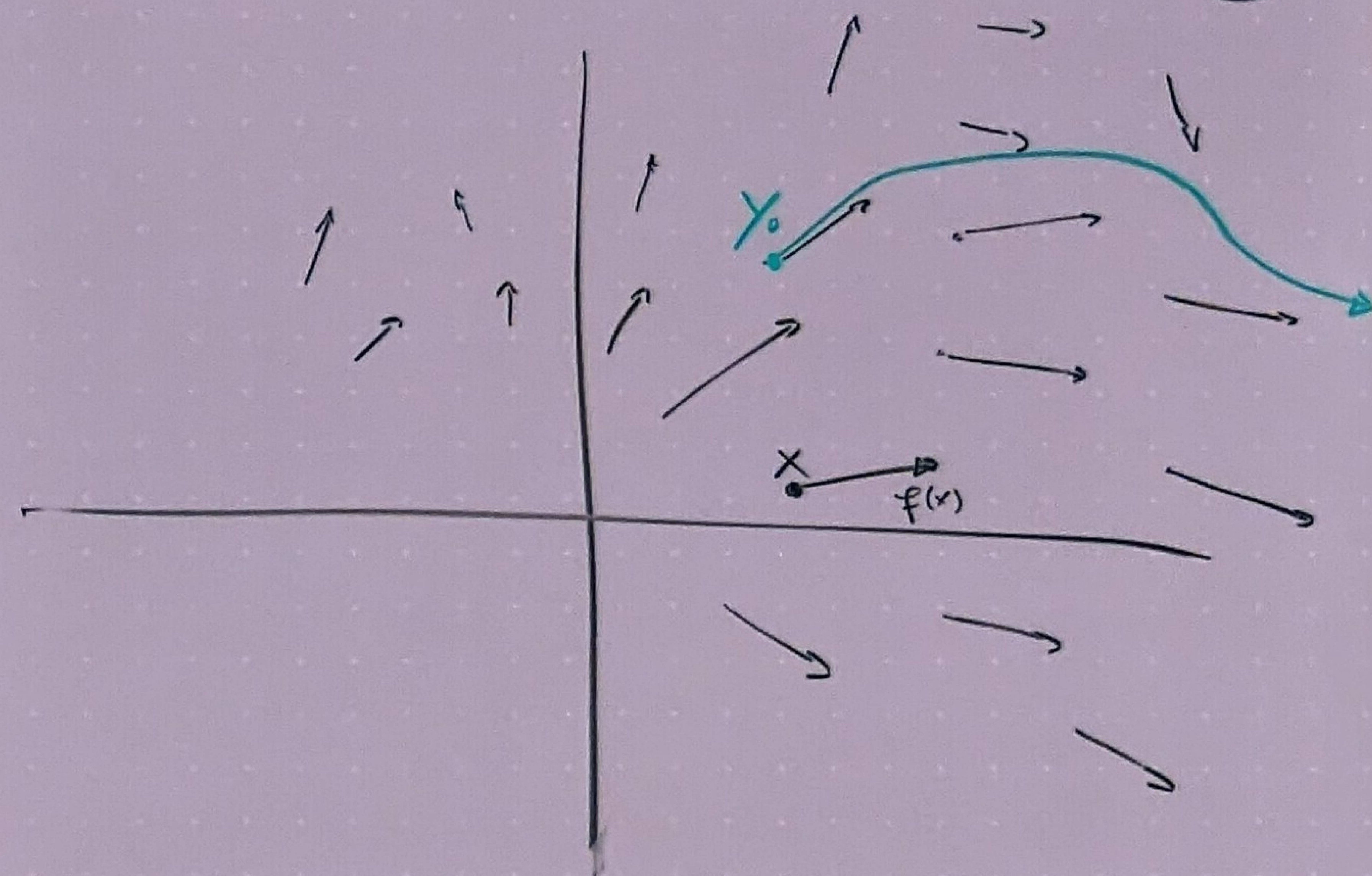
12:00 - 13:30

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

2023-10-09

$n=2$

①



$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t) = f(y(t), t) \quad \forall t \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Ges. (Für $T > t_0$):

Abb: $\gamma: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$
stetig
diffbar auf (t_0, T)

$$\text{mit } \begin{cases} \gamma'(t) = f(\gamma(t), t) \quad \forall t \in (t_0, T) \\ \gamma(t_0) = \gamma_0 \end{cases}$$

Haben:

Peano: $\exists$ Lsg. (lokal)

Warning: $\gamma' = \gamma^2$
hat endl. Ex. Int.

Picard-Lindelöf: $\exists!$ Lsg (lokal)

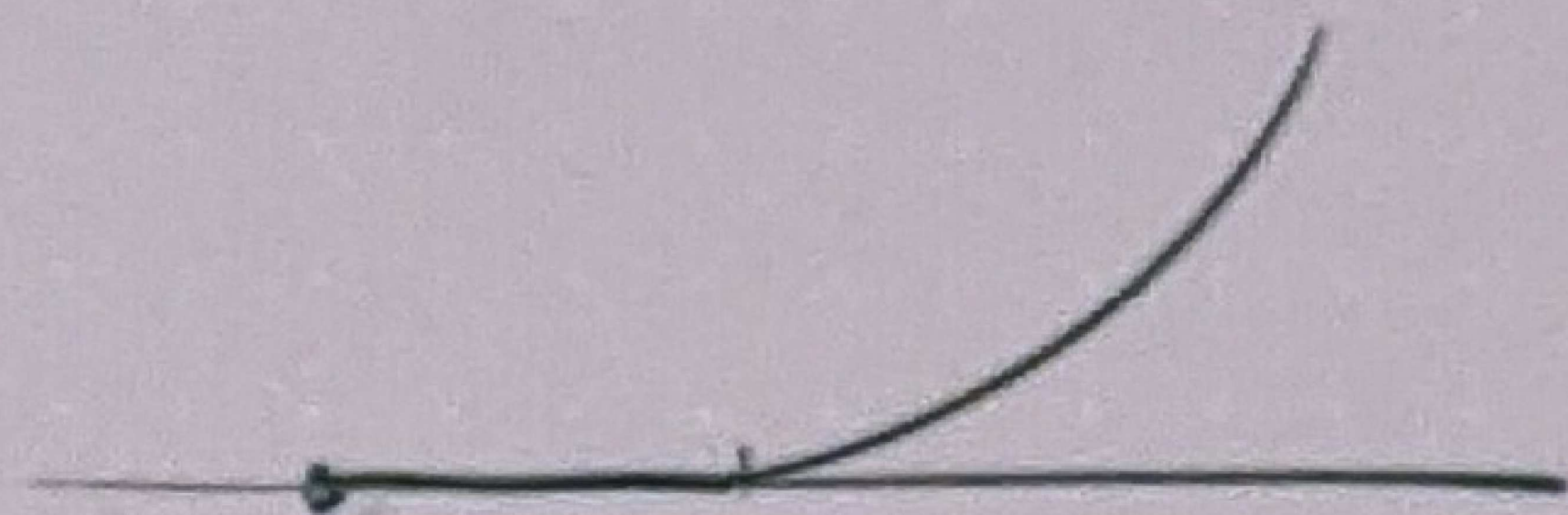
falls $f(\cdot, t)$ Lipschitz-st.

$\exists C$:
(global) Lipschitz: $|f(\gamma_2, t) - f(\gamma_1, t)| \leq C |\gamma_2 - \gamma_1|$
 $\forall t, \gamma_1, \gamma_2$

Tatsächlich: $y' = \sqrt{y}$

hat mehrere Lsg.

$$\text{zu } y(0) = 0$$



Bem: f global Lipschitz
 $\Rightarrow$ Lsg. ex. für alle Zeiten

Konkrete Lösungsmeth.

③

• 1D-Gl. $y'(t) = t y^2$

$$y(t) \in \mathbb{R} \forall t$$
$$n = 1$$

 Trennung der Variablen

• Lineare Systeme ($n \geq 1$)

$$y' = Ay + b$$

$$y(t_0) = y_0$$

• L_H

• spez. Lsg.

• $Av = \lambda v \Rightarrow v e^{\lambda t}$
ist Lsg

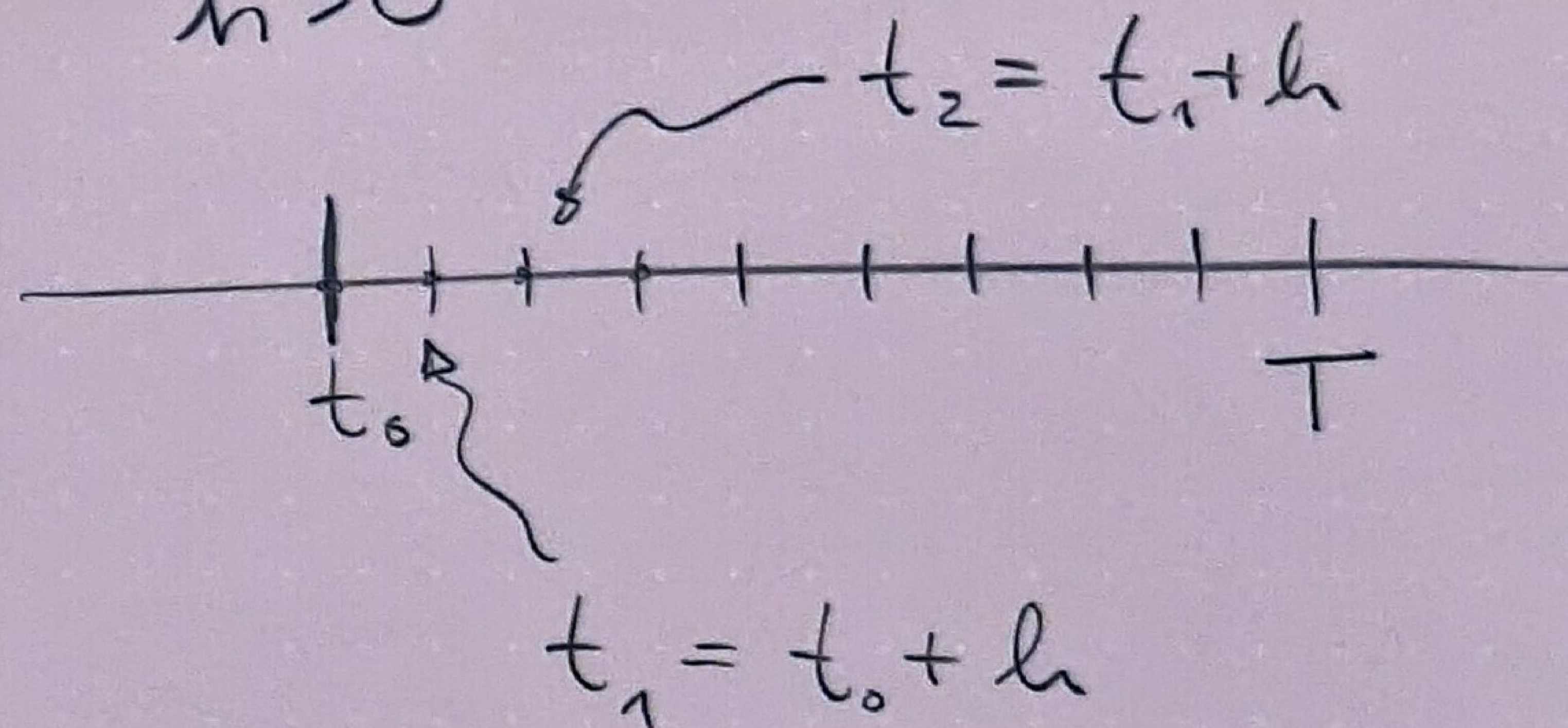
24. Numerische Verfahren

Ziel: Löse (*) $\begin{cases} y' = f(y, t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

numerisch

Diskretisiere Zeitintervall

$$h > 0$$



(4)

$$t_k := t_0 + kh$$

Ziel: Definiere

$$y_0, y_1, y_2, y_3, \dots$$

so, dass:

$$y_k \approx y(t_k)$$

wobei $y = y(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$

die Lösung von (*).

Es gibt viele Methoden dafür!

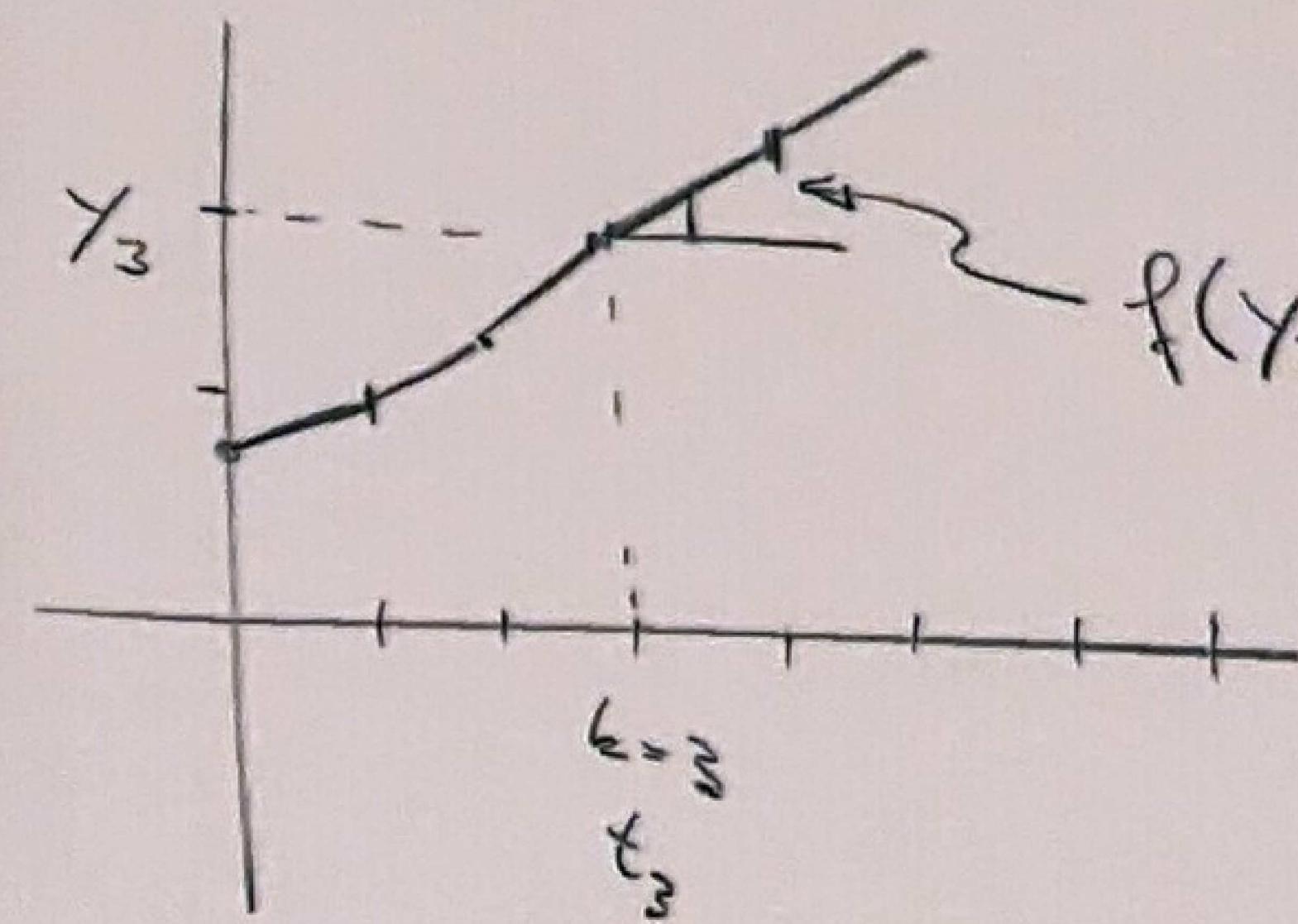
Idee: $y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h}$

Also: y_{k+1} löst $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(y_k, t_k)$

Name: Euler-Verfahren (explizites)

Also: $y_{k+1} := y_k + h f(y_k, t_k) \quad \forall k \geq 0$ ⑤

liefert alle y_k



Euler-Polygonzug-Verf.

Bessere Verfahren

- Runge-Kutta-Verfahren
(explizit; ein-Schritt)
- Mehrschrittverfahren
- Implizite Verfahren

Beispiel für implizites Verf.

⑥

Impliziter Euler:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} \stackrel{(!)}{=} f(y_{k+1}, t_{k+1})$$

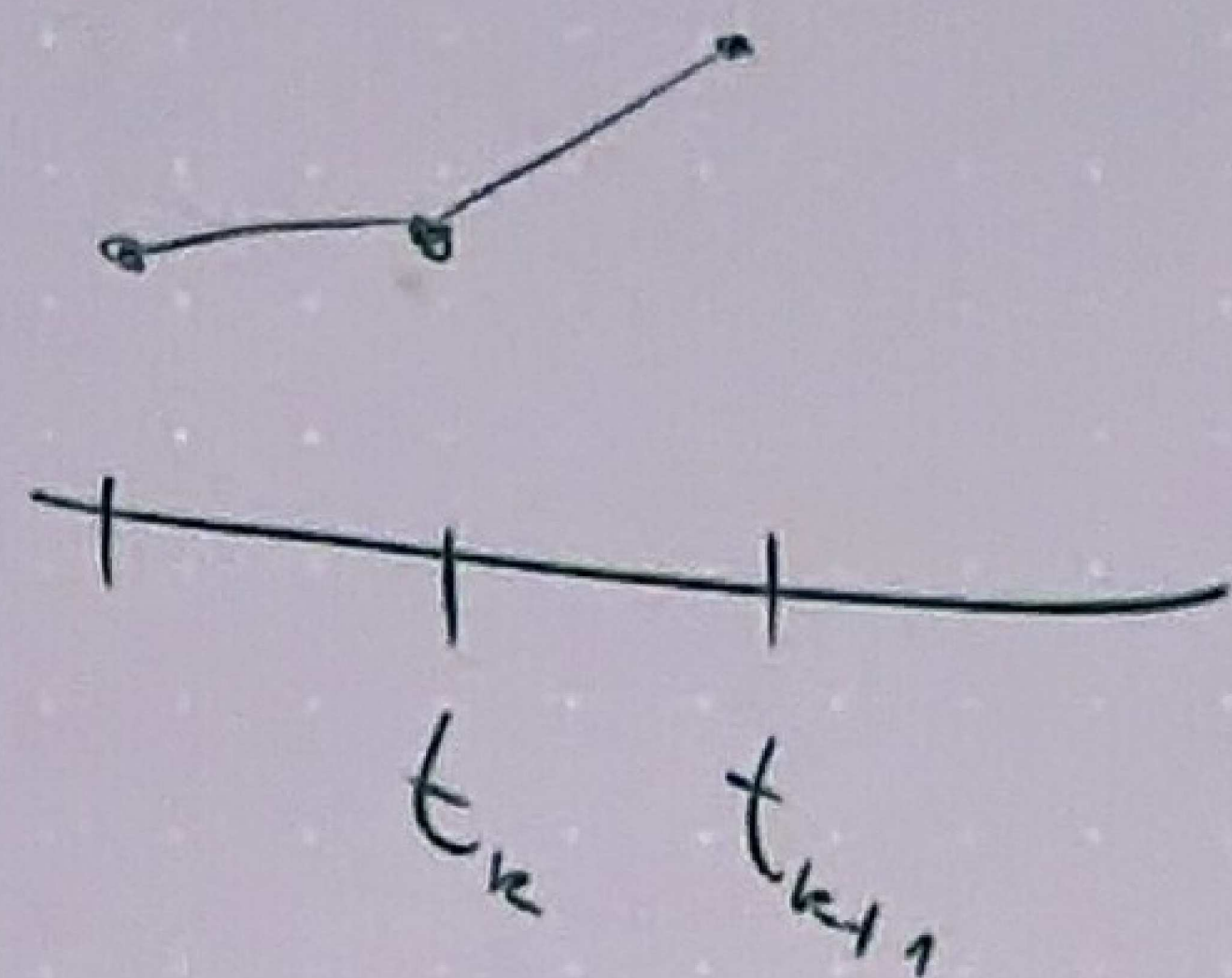
- höherer Aufwand pro
Zeitschritt
+ manchmal schneller
(trotzdem)

Bsp. für Mehrschrittverf.

Adams - Bashforth

$$y_{k+1} = y_k + \frac{3}{2} h f(y_k, t_k)$$

$$- \frac{1}{2} h f(y_{k-1}, t_{k-1})$$



(Besserals
expl. Euler)

§ Löse $y' = f(y)$

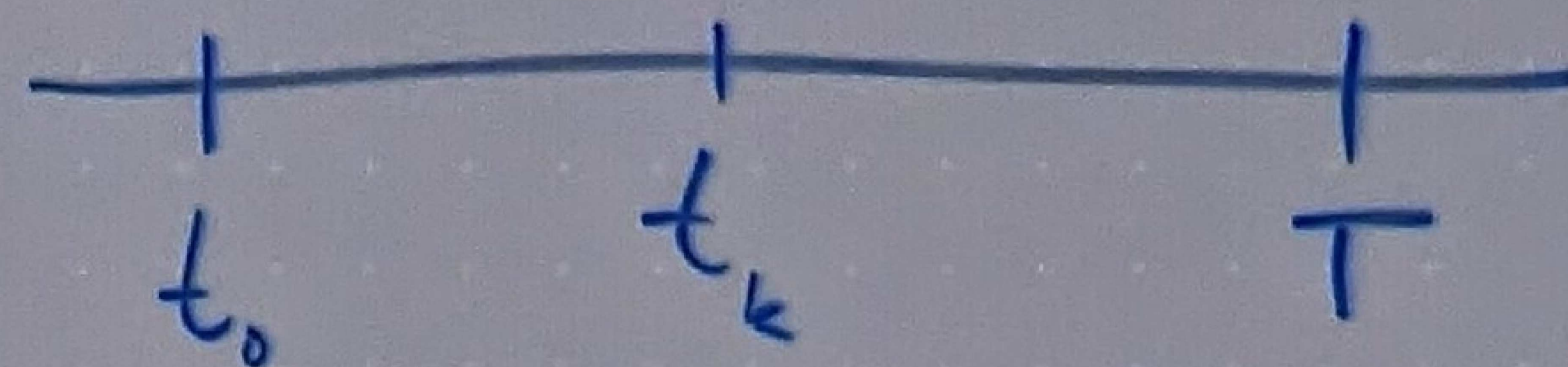
Gegeben: $y: [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$y'(t) = f(y(t), t) \forall t$$

Und: $y(t_0) = y_0$

Numerisches Verfahren ?

①

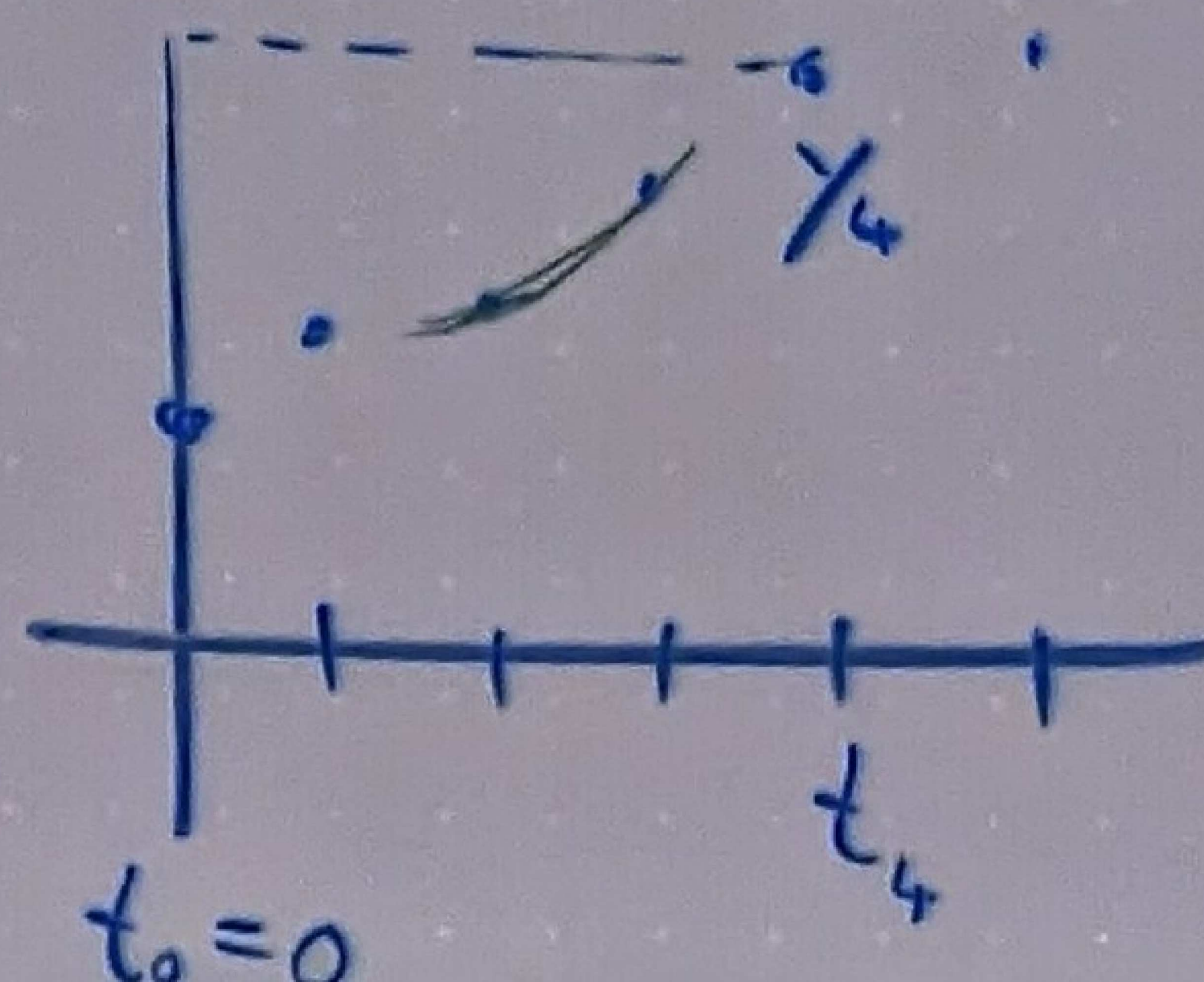


$$t_k = t_0 + h \cdot k$$

$$h > 0$$

Schrittweite

Ziel: $y_k \approx y(t_k)$



Explizites Euler-V.: $\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(y_k, t_k)$

Schreibe auch: $K = K_{(k)} := f(y_k, t_k)$

$$y_{k+1} = y_k + h K$$

Impl. Euler:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(y_{k+1}, t_{k+1})$$

Muss erst gelöst werden nach

Mehrschrittverfahren:

Nutze neben y_k auch $y_{k-1}, \dots$.

Runge-Kutta

Hier: 3-stufiges R.-K.

y_{k+1} !

②

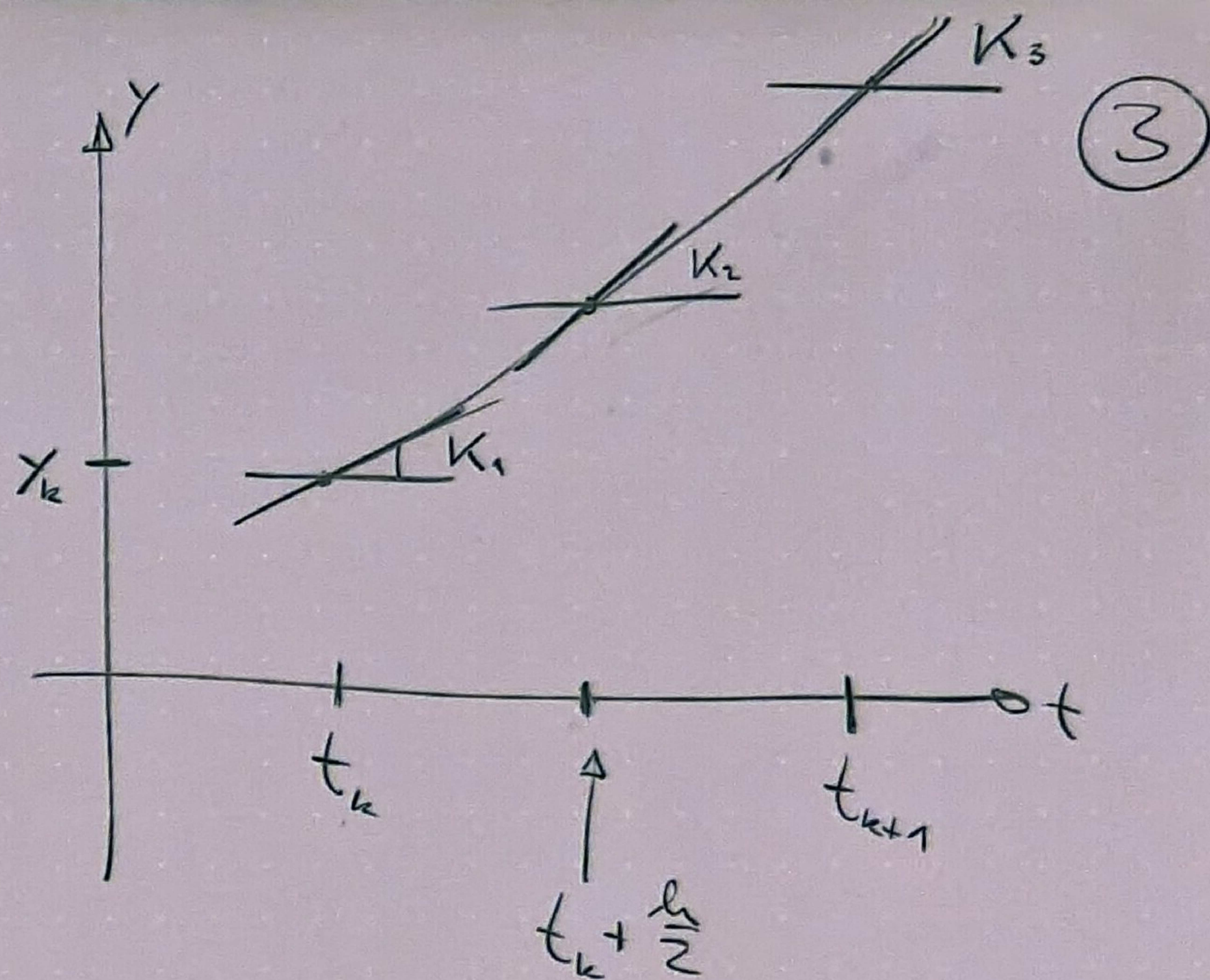
Haben: $t_k, t_{k+1} = t_k + h, y_k$

Näherung für y' ??

$$K_1 := f(y_k, t_k)$$

$$K_2 := f\left(y_k + \frac{h}{2} K_1, t_k + \frac{h}{2}\right)$$

$$K_3 := f\left(y_k + \frac{3}{2} h K_2 - \frac{1}{2} h K_1, t_{k+1}\right)$$



Setze:

$$y_{k+1} := y_k + h \left(\frac{1}{6} K_1 + \frac{4}{6} K_2 + \frac{1}{6} K_3 \right)$$

Es gilt:

Verfahren ist Ordnung 3,

es gilt:
 $\exists C > 0:$

$$|y_k - y(t_k)| \leq C h^3$$

$\forall k$

Bsp: $h = 10^{-3}$

Verfahren 1. Ordn. (z.B.: Euler)

Fehler $\sim 10^{-3}$

Verfahren 3. Ordn. (R-K 3. Ordn.):

Fehler $\sim 10^{-9}$

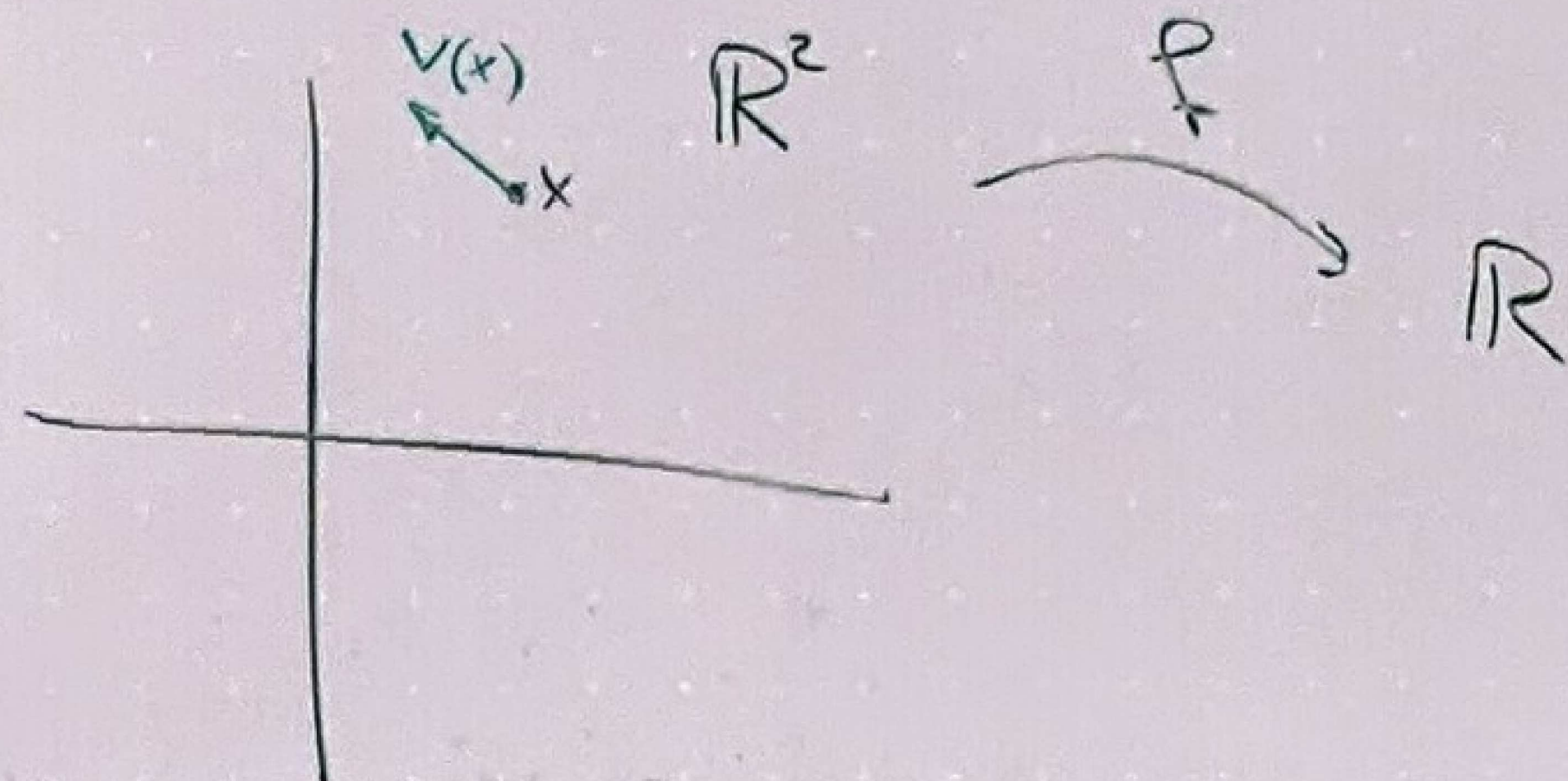
25. Vektoranalysis, Gauß etc.

Betrachte Funktionen

(Skalarfeld) $u, f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

(Vektorfeld) $v, w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

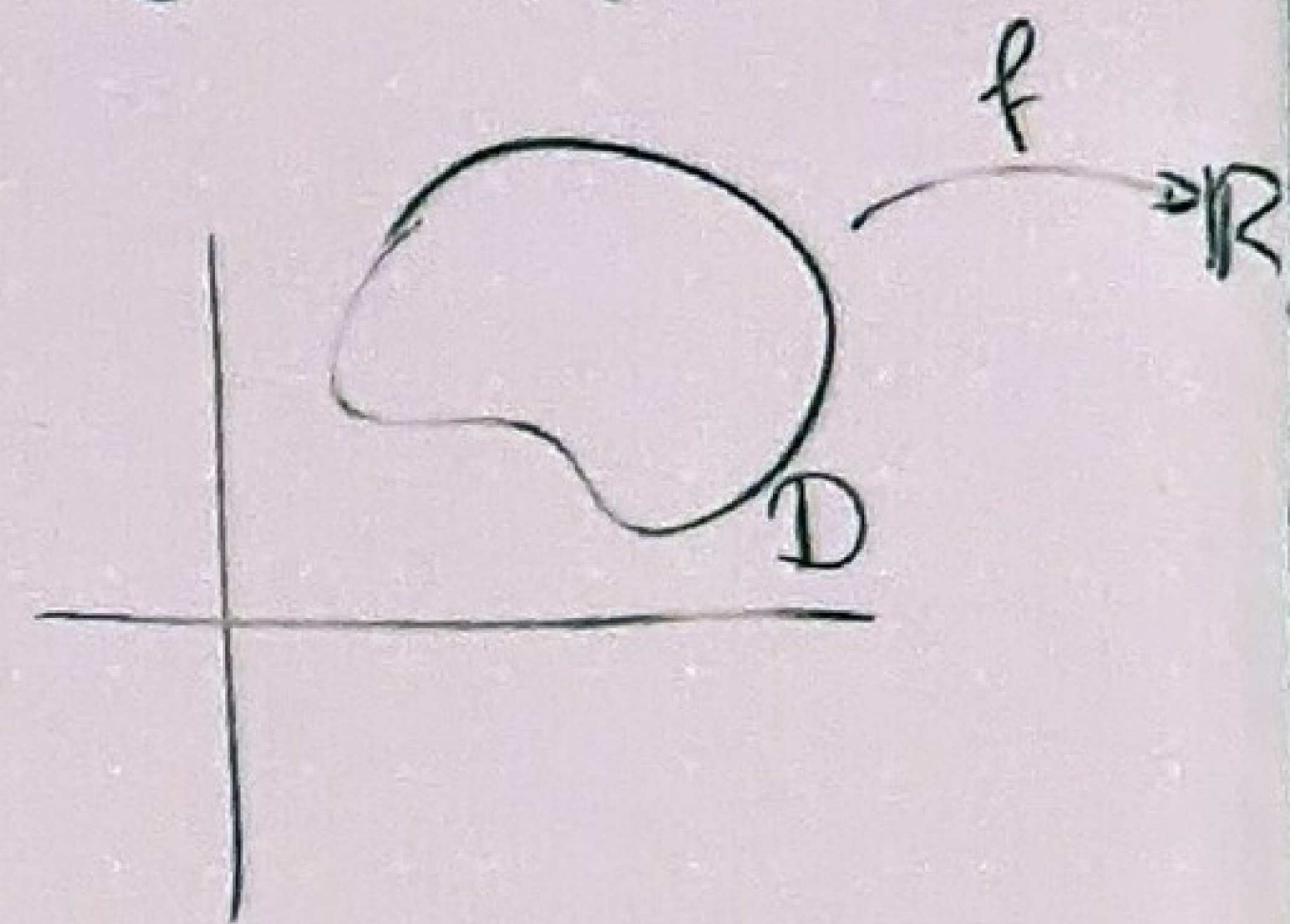
diffbar



2023-10-11

Auch für $D \subset \mathbb{R}^n$

$u, f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad v, w : D \rightarrow \mathbb{R}^n$



⑤

Differentialoperatoren

⑥

Grundlage: $\partial_j v_k(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v_k(x + h e_j) - v_k(x)}{h}$

(Auch: $\frac{\partial}{\partial x_j} v_k = \partial_{x_j} v_k = \boxed{\partial_j v_k}$ In Physik auch $v_{k,j}$)

Def:

Gradient:

$$\nabla u(x) := \begin{pmatrix} \partial_1 u \\ \partial_2 u \\ \vdots \\ \partial_n u \end{pmatrix}(x)$$

Divergenz:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot v(x) &:= \operatorname{div}(v)(x) \\ &:= (\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \dots + \partial_n v_n)(x) \\ &= \sum_{j=1}^n \partial_j v_j(x) \end{aligned}$$

Laplace-Op.:

$$\Delta u(x) = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 u(x) = (\nabla \cdot \nabla) u(x) = \operatorname{div} \operatorname{grad} u(x)$$

n=3

Rotation

$$\nabla \times v(x) := \operatorname{rot}(v)(x)$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}(x)$$

$$\begin{aligned} &(\partial_1, \dots, \partial_n) \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} u(x) \\ &\quad \parallel \end{aligned}$$

⑦