

33. Randwertprobleme

Jetzt wieder: Gewöhnliche DGL

Hier:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = g(x)$$

Gl. zweiter Ordnung (wegen y'')

linear (l.S. linear in y)

inhomogen (falls $g \neq 0$)

Dabei: Funktionen p, q, g
sind vorgegeben.

Gesucht: $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

NEU: Randwertproblem

z.B.: $y(a) = A$
 $y(b) = B$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ gegeben

(Fast) triv. Bsp:

$$y'' = 1$$

Also: $y(x) = \frac{1}{2}x^2$

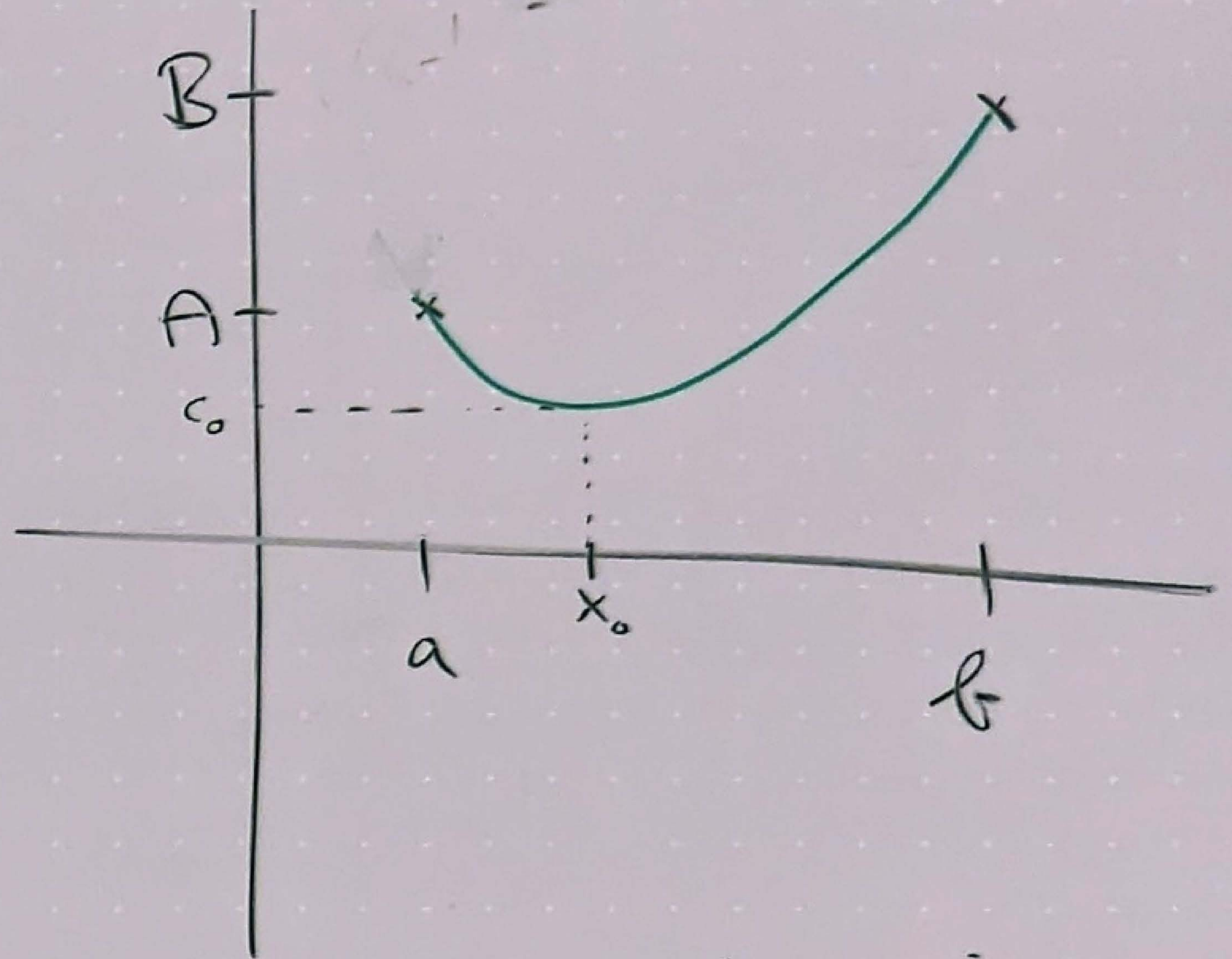
oder

$$y(x) = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 + c_0$$

mit Randwerten:

$$y(a) = A$$

$$y(b) = B$$



Ist so etwas immer lösbar?

33. Randwertprobleme

$$(*) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = g$$

Inhom., lineare DGL zweiter

Ordnung

Randwertaufgabe:

$-\infty < a < b < \infty$ gegeben

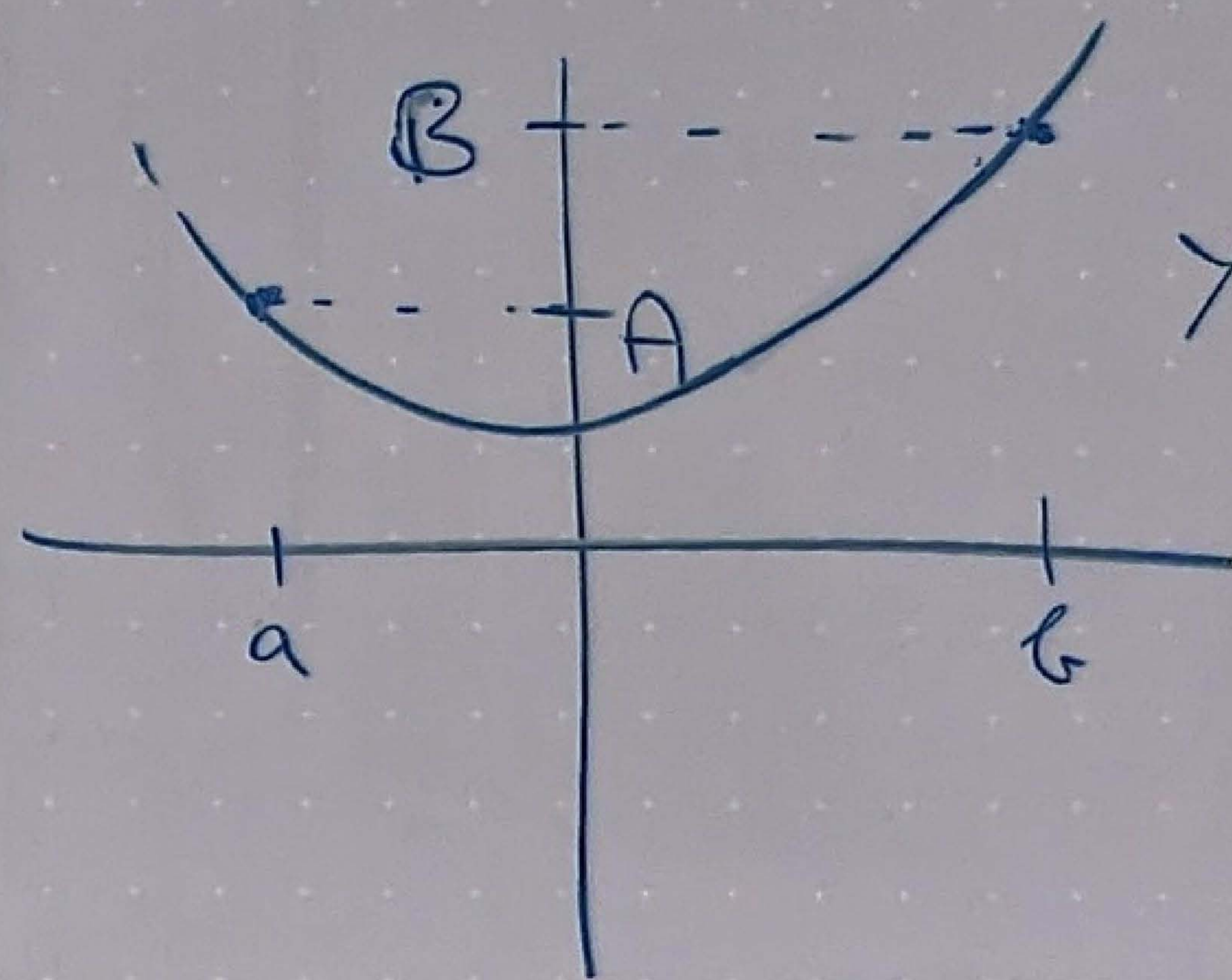
(1)

Gesucht: $y: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

(oder $\mathbb{C}$)

mit (z.B.):

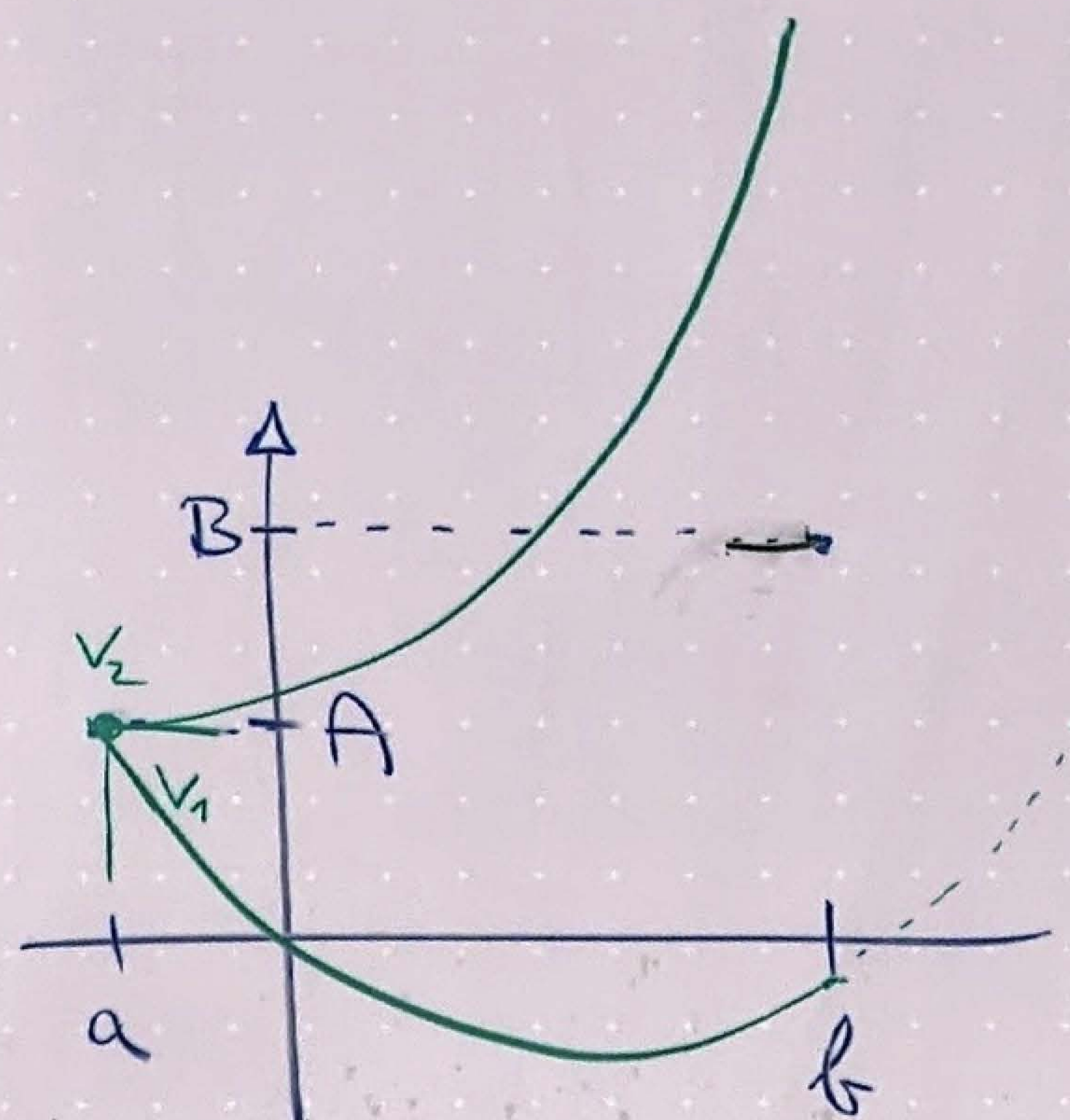
$$y(a) = A, \quad y(b) = B$$



Idee, um das zu lösen:

Was können wir bisher?

⊗ mit $y(a) = A$ und $y'(a) = v$



$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right. A, v \in \mathbb{R}$

Anfangswertproblem

Shooting methode

$y(b) = \text{Funktion von } v$

Ziel: $y(b) = B$

Verallgemeinerung der Aufgabenstellung

Fordere in a , für ein A und für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$R_a(y) := \alpha y(a) + \beta y'(a) = A$$

Ebenso rechts, für $B, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

$$R_b(y) := \gamma y(b) + \delta y'(b) = B$$

②

Bemerkung zu $g \neq 0$

Zu $y(a) = 0$ und $y'(a) = 0$

gibt es eine Lsg y_g von (*)

~ Theorie gew. DGL.

y_g heißt partikuläre Lsg. der
inhomog. Gl.

Suche y in der Form

$$y = y_g + z$$

Gleichung für z ?

$$(y_g + z)'' + p(y_g + z)' + q(y_g + z) = g$$

$$\Leftrightarrow z'' + pz' + qz = 0$$

Es reicht jetzt (wenn y_g bestimmt ist), das homogene P.b. zu lösen.

(3)

Warnung: Randbed. sind
modifiziert

$$\begin{aligned} R_a(z) &= \alpha z(a) + \beta z'(a) \\ &= \alpha (y - y_g) + \beta (y' - y'_g)' \end{aligned}$$

$$R_a(y) = A = \underbrace{A - R_a(y_g)}_{\text{gegeben durch } y_g}$$

Bei unserer Wahl von y_g : $R_a(y_g) = 0$

$$\text{Rechts: } R_b(z) = \underbrace{B - R_b(y_g)}_{\text{gegeben}} \quad (4)$$

Also: AG jetzt o.E. $g = 0$
homogen. Pb.

Funktioniert Shooting-Methode immer?

Beispiel: $y'' - 2y' + 2y = 0$ (*)

Lösungen? $y(x) = e^{\lambda x}$

$$(*) \Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(2 \pm \sqrt{4-8})$$

$$= 1 \pm i$$

Allg. Lsg. in $\mathbb{C}$: $c_1 e^{(1+i)x} + c_2 e^{(1-i)x}$ ⑤

Allg. Lsg. in $\mathbb{R}$: $c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x$

(a) Löse (*) mit $y(0) = 1$
in $\mathbb{R}$, auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ $y(\frac{\pi}{2}) = -1$

Gesucht ist $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$

mit $c_1 = y(0) \stackrel{!}{=} 1$

$$c_2 e^{\pi/2} \cdot 1 = y(\frac{\pi}{2}) \stackrel{!}{=} -1$$

Lösbar: $c_1 = 1$ und
 $c_2 = -e^{-\pi/2}$

Allgemeines Problem:

Seien φ_1 und φ_2 lin. unabh.

Lsg. des homogen. Problems,

Ansatz $y = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$

Randbed. $R_a(y) = A$
 $R_b(y) = B$

wird zu

$$c_1 R_a(\varphi_1) + c_2 R_a(\varphi_2) = A$$

$$c_1 R_b(\varphi_1) + c_2 R_b(\varphi_2) = B$$

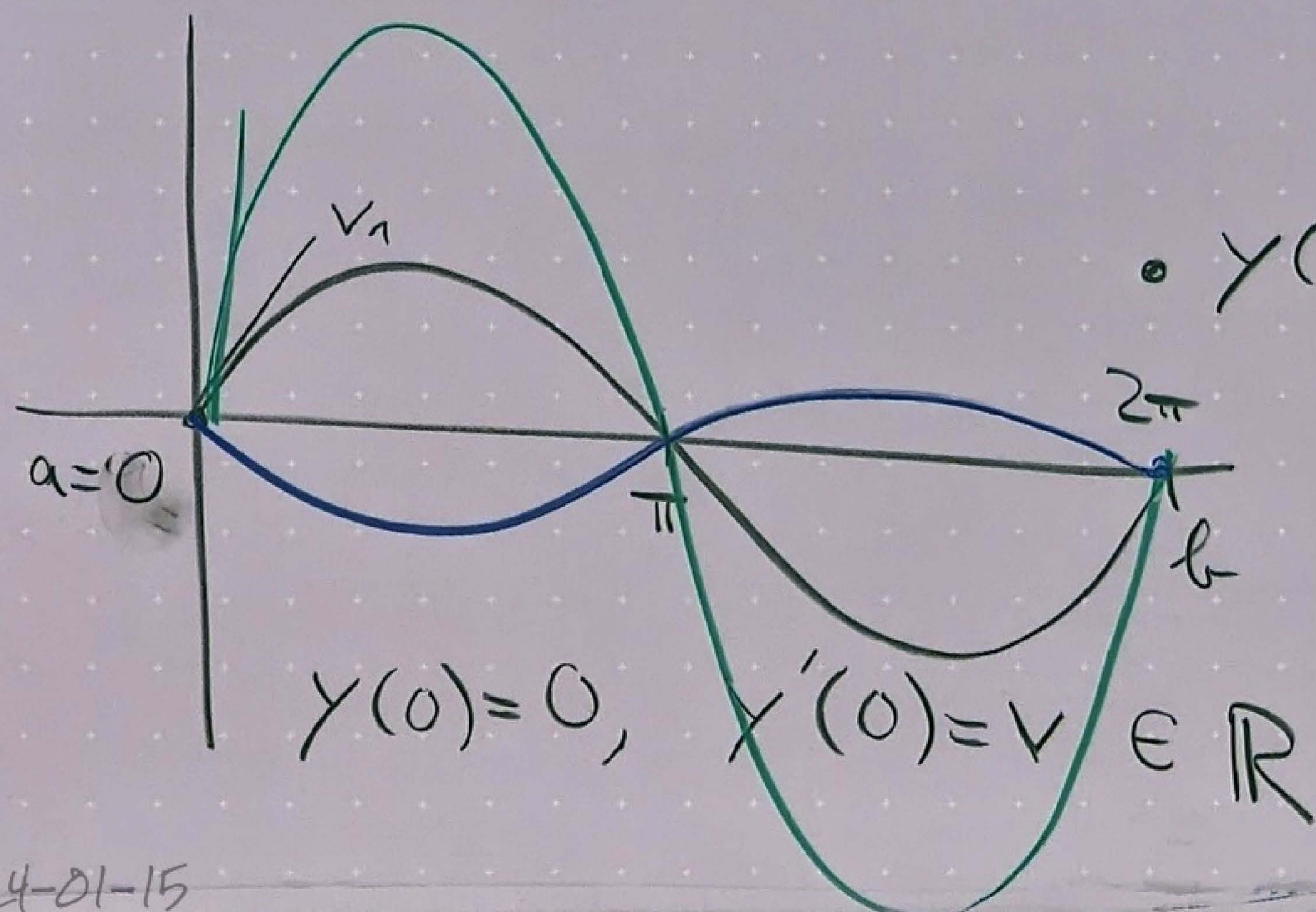
Also: Nach (c_1, c_2) auflösbar,

falls $\begin{pmatrix} R_a(\varphi_1) & R_a(\varphi_2) \\ R_b(\varphi_1) & R_b(\varphi_2) \end{pmatrix}$ invertierbar

Einfachstes Beispiel für
nicht-Invertierbarkeit

$$y'' = -y$$

$$\leadsto \sin x, \cos x$$



In obigem Bsp $(y'' - 2y' + 2y = 0)$ ^⑦

$$a=0, \quad b=2\pi$$

$$R_a(\varphi_1) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha + \beta$$

$$\varphi_1(x) = e^x \cos x$$

$$a=0$$

$$\begin{aligned} \varphi_1'(0) &= e^x \cos x - e^x \sin x \Big|_{x=0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$R_a(\varphi_2) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 = \beta$$

$$\varphi_2 = e^x \sin x$$

$$R_b(\varphi_1) = \gamma e^{2\pi} + \delta e^{2\pi}$$

$$R_b(\varphi_2) = \gamma \cdot 0 + \delta e^{2\pi}$$

Also, die Matrix ist

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \beta \\ e^{2\pi}(\gamma + \delta) & e^{2\pi}\delta \end{pmatrix}$$

Nicht invertierbar, falls

- $\beta = \delta = 0$ (Werte links und rechts vorgeschrieben)

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ e^{2\pi}\gamma & 0 \end{pmatrix} \text{ nicht invertierbar}$$

- $\alpha = \gamma = 0$ (Abl. links & rechts)

$$\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ e^{2\pi}\delta & e^{2\pi}\delta \end{pmatrix} \text{ nicht invertierbar.}$$

⑧

Bild zu Randbed.

Brücke ist oft so:



↳ Randbedingung

$$y(a) = 0 = y(b)$$

Winkel $(y'(a), y'(b))$ frei

Satz: Betrachte $\textcircled{*}$

$\textcircled{9}$

mit R_a und R_b .

Das homogene Randwertproblem

hat eine eind. Lsg., falls

$$M = \begin{pmatrix} R_a(p_1) & R_a(p_2) \\ R_b(p_1) & R_b(p_2) \end{pmatrix} \text{ invertierbar}$$

Falls M nicht invertierbar ist,

gibt es zwei Möglichkeiten:

- 1.) Es gibt keine Lösung
- 2.) Es gibt einen 1-dim. Lösungsraum

Erinnerung wegen Rückfrage:

$$y'' + py' + qy = 0$$

als System: $y_0 := y$

$$y_1 := y'$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ -py_1 - qy_0 \end{pmatrix}$$

Gew. DGL 1. Ordnung

$$\text{Löse zu } \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zum Beweis

(10)

Beispiel zeigt: 1.) ist möglich
($y'' = -y$)

Angenommen, es gibt eine Lösung

$M \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$ hat einen
1-dimensionalen

Lösungsraum.
 $\exists$ Lösungen, weil M nicht invertierbar.

$M \neq 0 \Rightarrow$ Lösungsraum nicht 2-dimensional

Jedes $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ mit $M \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$

liefert eine Lösung $y = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$

löst $\circledast$ ✓ (weil φ_1 & φ_2 Lösungen sind)

löst $R_a(y) = 0$, weil

$$R_a(y) = c_1 R_a(\varphi_1) + c_2 R_a(\varphi_2)$$

$$= \left[M \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right]_1 = 0$$

und $R_a(y) = 0$

Bilde $y_s + y$. Löst Randwertproblem.

Verfahren zur Lösung von

$$\textcircled{*} \quad y'' + p y' + q y = g$$

(p, q, g gegeben)

auf (a, b) (gegeben)

mit Randbed.

$$R_a(y) = A, \quad R_b(y) = B$$

$$\alpha y(a) + \beta y'(a)$$

$$\gamma y(b) + \delta y'(b)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, A, B$ gegeben.

①

1) Bestimme partikuläre Lsg y_g

Stelle homog. Gl. $\textcircled{*}$ auf für

$$(g=0)$$

$$\tilde{y} := y - y_g$$

2) y statt $\tilde{y}$:

Bestimme zwei Lsg. y_1, y_2

→ Fundamentalsystem

Erfülle mit $y := c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$

die Randbed.

$$\leadsto \underbrace{\begin{pmatrix} R_a(\varphi_1) & R_a(\varphi_2) \\ R_b(\varphi_1) & R_b(\varphi_2) \end{pmatrix}}_{=: M} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$y'' + 2y' = e^x \quad \text{mit} \quad y'(0) = 0 \\ y(1) = 1$$

2024-01-17 $(p=2, q=0, a=0, \alpha=0, \beta=1, A=0, \gamma=1, \delta=0, B=1, g(x)=e^x)$

2

Lösung:

$$\textcircled{*} \quad y_g'' + 2y_g' = e^x$$

$$\text{Ansatz } y_g(x) = \lambda e^x$$

$$\textcircled{*} \Leftrightarrow \lambda e^x + 2\lambda e^x = e^x$$

$$\Leftrightarrow 3\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$y_g(x) = \frac{1}{3} e^x$$

Gl. für $\tilde{y} = y - y_g$:

$$\tilde{y}'' + 2\tilde{y}' = 0$$

$$R_a(\tilde{y}) = \tilde{y}'(0) = 0 - y_g'(0) = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} R_b(\tilde{y}) &= \tilde{y}(1) = 1 - y_g(1) \\ &= 1 - \frac{1}{3}e \end{aligned}$$

Fundamentalsystem

③

Ansatz: $\varphi(x) = e^{\mu x}$

$$\leadsto \mu^2 + 2\mu = 0$$

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -2$$

$$\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2 = e^{-2x}$$

$$(\text{löse } y'' + 2y' = 0)$$

Also: $\tilde{y} = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$

$$M = \begin{pmatrix} R(\varphi_1) & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \\ \varphi_1(1) & \varphi_2(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & e^{-2} \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 - \frac{1}{3}e \end{pmatrix} \leadsto (c_1, c_2) =$$

(4)

$$y = y_g + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

$$= \frac{1}{3}e^x + c_1 + \frac{1}{6}e^{-2x}$$

$$c_1 + e^{-2} \overset{\frac{1}{6}}{\downarrow} c_2 = \left(1 - \frac{1}{3}e\right)$$

$$\left(1 - \frac{1}{3}e - \frac{1}{6}e^{-2}, \frac{1}{6}\right)$$

Eigenwertprobleme

Bsp: $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = \delta = 0$, $A = B = 0$.

Problem:
$$\begin{cases} y'' + py' + qy = \mu y \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases}$$

Ges.: a, b, p, q

Ges.: y und μ .

Bem: Linear Algebra: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ⑤
Ges.: $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{C}$: $\boxed{Ax = \lambda x}$
($x \neq 0$)

Hier wird A ersetzt durch

$$\partial_x^2 + p\partial_x + q$$

und $x \in \mathbb{R}^n$ durch $y \in C^2([a, b], \mathbb{C})$

und λ durch μ .

Langweilige Sichtweise:

Altes Problem mit Parameter $\mu \in \mathbb{C}$.

q wird zu $(q - \mu)$.

Frage: Für welches μ finden
wir Lösung $y \neq 0$

$\leadsto$ Für welches μ ist $M = M_\mu$
nicht invertierbar

⑥

Wichtigstes EW-Problem

$$y'' + cy = \mu y \quad (*)$$

$$y(0) = y(b) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} c > 0 \\ c \in \mathbb{R} \\ \text{gegeben} \end{array} \right) \quad (b > 0 \text{ gegeben})$$

Ges.: y, μ

Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$

(für DGL, nicht

$$(*) \Leftrightarrow \lambda^2 + c = \mu \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \pm \sqrt{\mu - c}$$

$$\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad \varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$$

$$y = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

$$\begin{cases} c_1 \varphi_1(0) + c_2 \varphi_2(0) = 0 \\ c_1 \varphi_1(b) + c_2 \varphi_2(b) = 0 \end{cases}$$

für die Randbed.)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\lambda_1 b} + c_2 e^{\lambda_2 b} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow c_1 (e^{\lambda_1 b} - e^{\lambda_2 b}) = 0$$

Lösung mit $c_1 \neq 0 \Leftrightarrow e^{\lambda_1 b} = e^{\lambda_2 b}$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 b - \lambda_2 b \in 2\pi i \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 \in \frac{2\pi i}{b} \mathbb{Z} \quad (**)$$

3 Fälle: • $\mu > c \Rightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ (8)
(μ reell)

Dann $(**) \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \nmid$

• $\mu = c \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Gl. ist $y'' = 0$

Lsg. $\varphi_1(x) = 1, \quad \varphi_2(x) = x$

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 &\Rightarrow c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 b = 0 &\Rightarrow c_2 = 0 \end{aligned}$$

no keine Lsg. $\neq 0$.

$$\begin{aligned} \mu < c &\Rightarrow \lambda_1 = +\sqrt{\mu - c} \\ &= +i\sqrt{c - \mu} \\ \lambda_2 &= -i\sqrt{c - \mu} \end{aligned}$$

$$(**) \Leftrightarrow 2i\sqrt{c - \mu} \in \frac{2\pi i}{b} \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{c - \mu} \in \frac{\pi}{b} \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \mu = c - \frac{\pi^2}{b^2} k^2$$

Dies sind die Eigenwerte des Problems
 $\mu_1 = c - \frac{\pi^2}{b^2}, \mu_2 = c - 4 \frac{\pi^2}{b^2},$

Noch zu zeigen:

$$\mu \notin \mathbb{R} \Rightarrow \nexists \text{ "Lösung"}$$

Sei y eine Lösung mit EW μ .

$$\text{Berechne: } \int_0^b (y'' + cy - \mu y) \cdot \bar{y} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{part. Int.:} \\ y(0) &= y(b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\int_0^b \underbrace{-y' \cdot \bar{y}'}_{=|y'|^2} + \underbrace{cy\bar{y}}_{|y|^2} - \mu |y|^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu \int_0^b |y|^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mu \in \mathbb{R}$$

9

Lösungen sind:

10

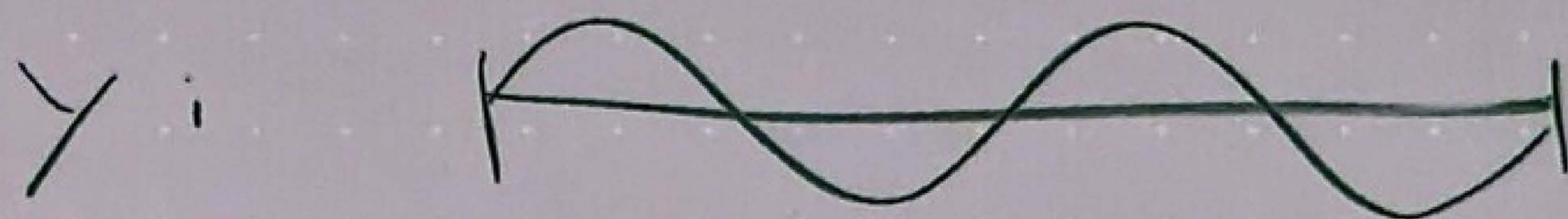
$$\varphi_1 - \varphi_2 = e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x}$$

$$= e^{i\sqrt{c-\mu}x} - e^{-i\sqrt{c-\mu}x}$$

$$\text{Re}(\dots) = \boxed{\frac{1}{2} \sin(\sqrt{c-\mu}x)}$$

$\mathcal{L}_{\text{sg}}$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \sin z$$



Rand-Eigenwertproblem

$$y'' + cy = \mu y$$

$$\text{mit } y(a) = 0 = y(b)$$

Folien:
/ Skript

$$cy'' = \mu y$$

①

Konzept war das
letzte mal:

Behandle μ als
Parameter, löse
wie gewohnt.

Andere Herangehensweise: Ansatz!

$$(*) \quad y(x) = \sin(\omega x)$$

$$\text{Dann: } y'' = -\omega^2 \sin(\omega x) \quad \omega > 0$$

$$\text{Also } y'' + cy = \mu y$$

$$\stackrel{(*)}{\iff} -\omega^2 + c = \mu$$

Randbed.:

$$a=0 \quad b>0$$

$$y(0) = y(a) = \sin(\omega \cdot 0) = 0$$

$$0 \stackrel{!}{=} y(b) = \sin(\omega b) \iff$$

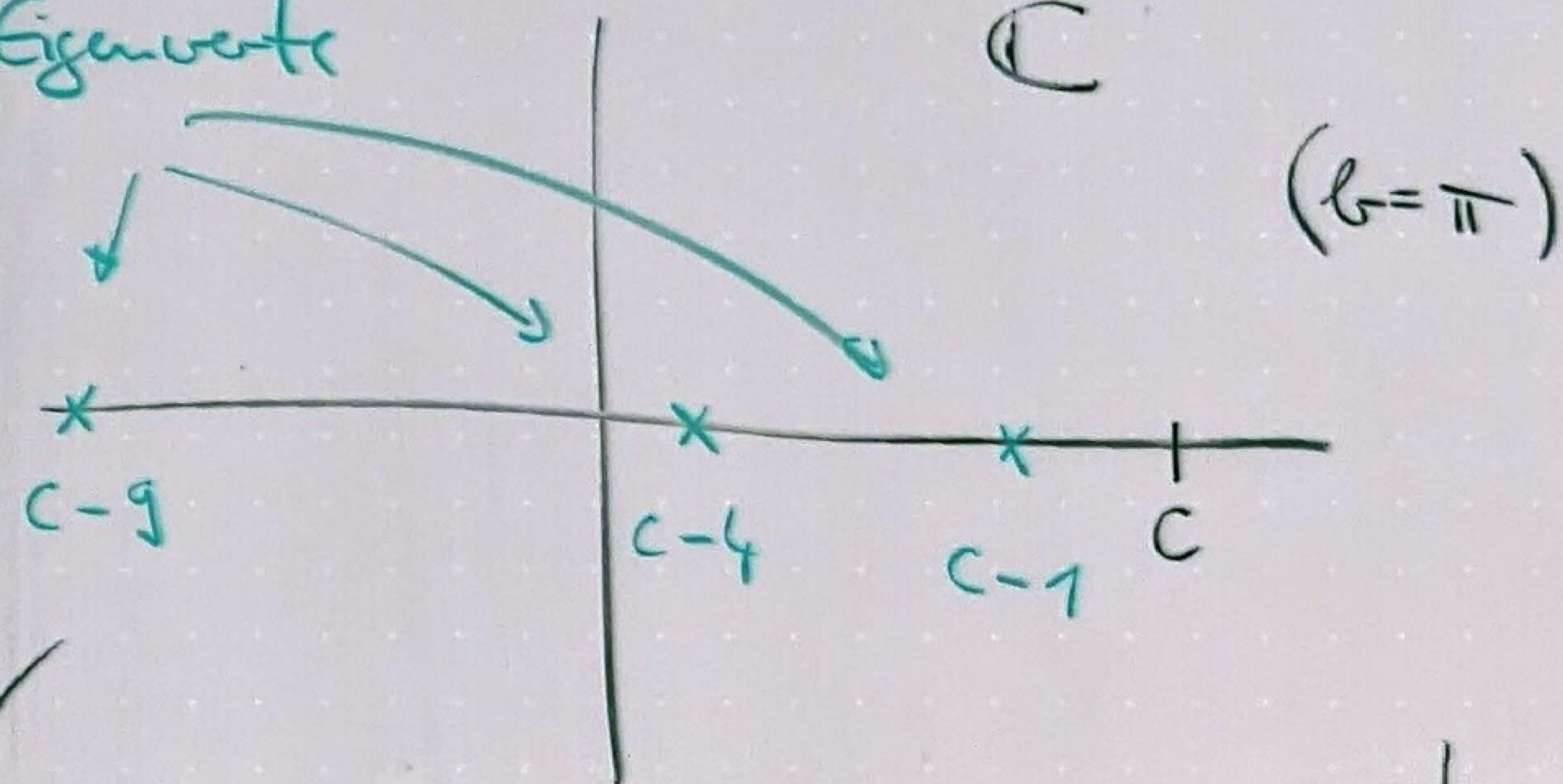
Test: $k \in \mathbb{Z}$
 $\omega := \frac{\pi k}{b}$ $\left\{ \Rightarrow \sin(\omega b) = \sin(\pi k) = 0 \right.$

(2)

Eigenwert:

$$\mu = c - \frac{\pi^2 k^2}{b^2}$$

Eigenwerte



$$\omega b \in \mathbb{Z} \pi, \quad \omega = \frac{\pi k}{b}$$

34 Diffusionsgleichung

In beliebiger Dimension:

$$\partial_t u = c \Delta u$$

In einer Dimension (räumlich)

$$\partial_t u = c \partial_x^2 u$$

③

Gesucht: $u = u(x, t)$

$$x \in [a, b]$$

$$t \in [0, \infty)$$

Abl. nach t kombiniert mit

Abl. nach x 

Partielle DGL

$$\partial_t u(x, t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{u(x, t+h) - u(x, t)}{h}$$

Gleichung benötigt Rand-
bedingung

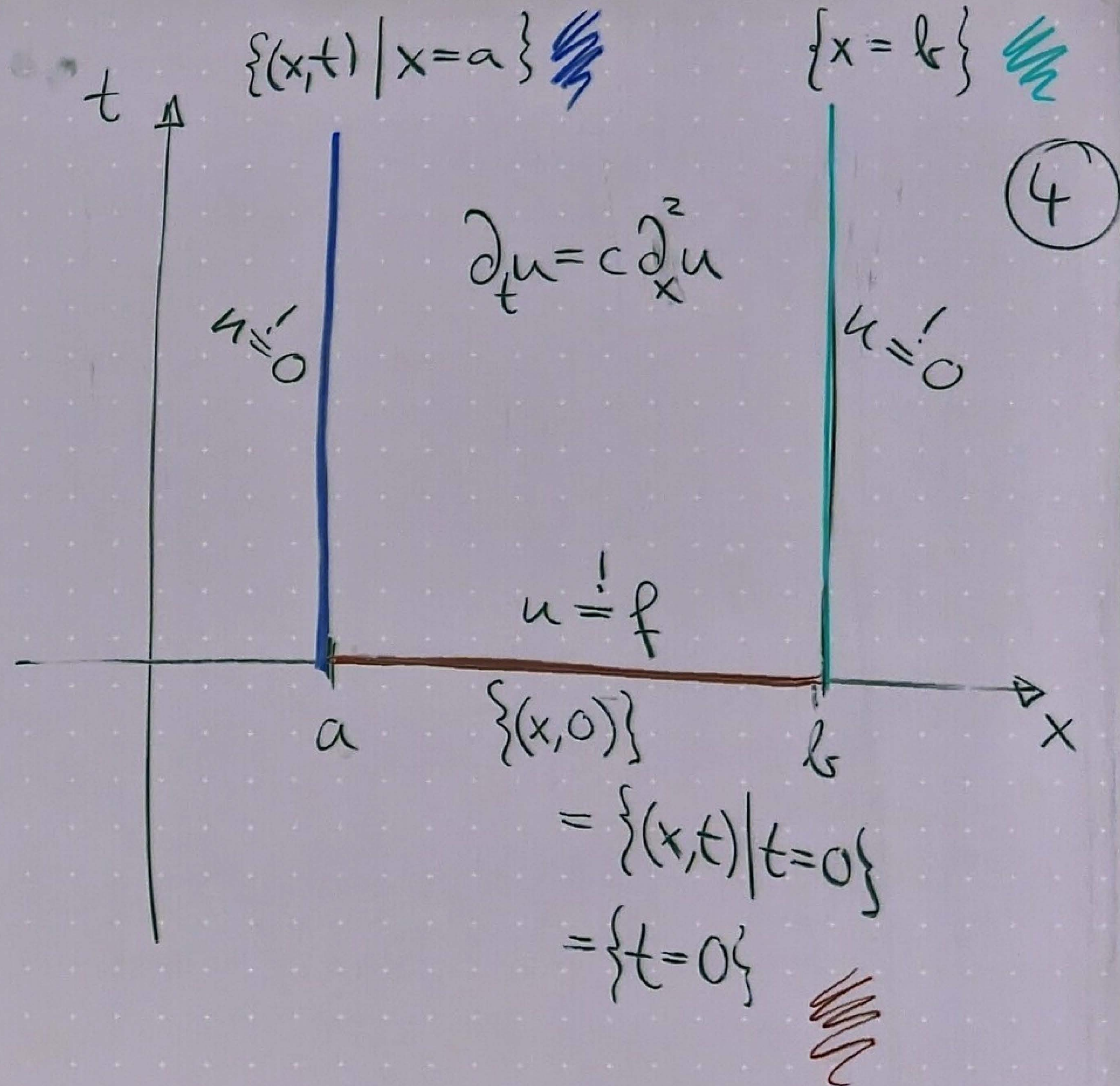
für eindeutige
Lösbarkeit

Denke an Kap 33:

$$\begin{cases} u(a, t) = 0 \\ u(b, t) = 0 \end{cases} \quad \forall t > 0$$

Zusätzlich, wie

bei Gew. DGL: $u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$



$x \in (a, b) \rightarrow$ Anfangsbedingung

→ Fourier: Wärmeausbreitung

Lösung der Gleichung mit Ansatz
 $a=0$
 $b>0$

$$u(x,t) = e^{\lambda t} \sin(\omega x)$$

Randbed: Links

$$u(a,t) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \\ e^{\lambda t} \sin(\omega \cdot 0) \end{array}$$

"
 0

✓

Rechts

$$u(b,t) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \\ e^{\lambda t} \sin(\omega b) \end{array} \leadsto \omega = \frac{\pi k}{b}$$

2024-01-22

$$\text{Gleichung: } \partial_t u = c \partial_x^2 u \quad (5)$$

$$\lambda e^{\lambda t} \sin(\omega x)$$

$$\text{"} \quad -c \omega^2 e^{\lambda t} \sin(\omega x)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -c \omega^2$$

$$\text{Also: Lösung ist } u(x,t) = e^{-c \omega^2 t} \sin(\omega x)$$

Fehlt noch: Erfülle

Anfangsbedingung

für ein $k \in \mathbb{Z}$

Unser u :

$$u(x, 0) = \sin(\omega x)$$

→ sehr spezielle
Anfangsbedingung

Stelle fest: Können lösen
für Anfangswerte

$$\sin\left(\pi \frac{x}{b}\right), \sin\left(2\pi \frac{x}{b}\right), \sin\left(3\pi \frac{x}{b}\right), \dots$$

Lösung für $f(x) = \sin\left(3\pi \frac{x}{b}\right)$: ⑥

$$u(x, t) := e^{-c\left(\frac{3\pi}{b}\right)^2 t} \sin\left(\frac{3\pi x}{b}\right)$$

$$\left(\omega = \frac{3\pi}{b}\right)$$

Fourier-Entwicklung von $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Genaues: von $\tilde{f}$

$$\tilde{f}: [-b, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

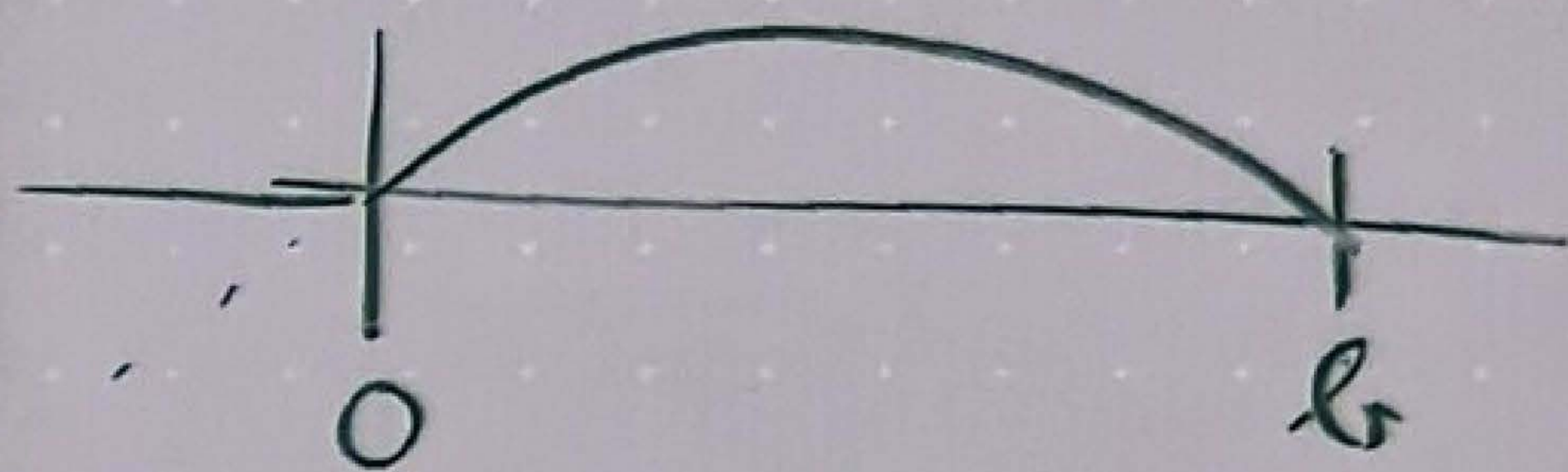
$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ -f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Entwickle $\tilde{f}$ in sin & cos.

$\tilde{f}$ ungerade $\Rightarrow$ nur sin-Terme

$$(a_k \sim \underbrace{\int_{-b}^b \tilde{f}(x) \cos(k \frac{x}{b} \pi) dx}_{\substack{\text{ungerade} \quad \text{gerade}}} = 0)$$

$$[0, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

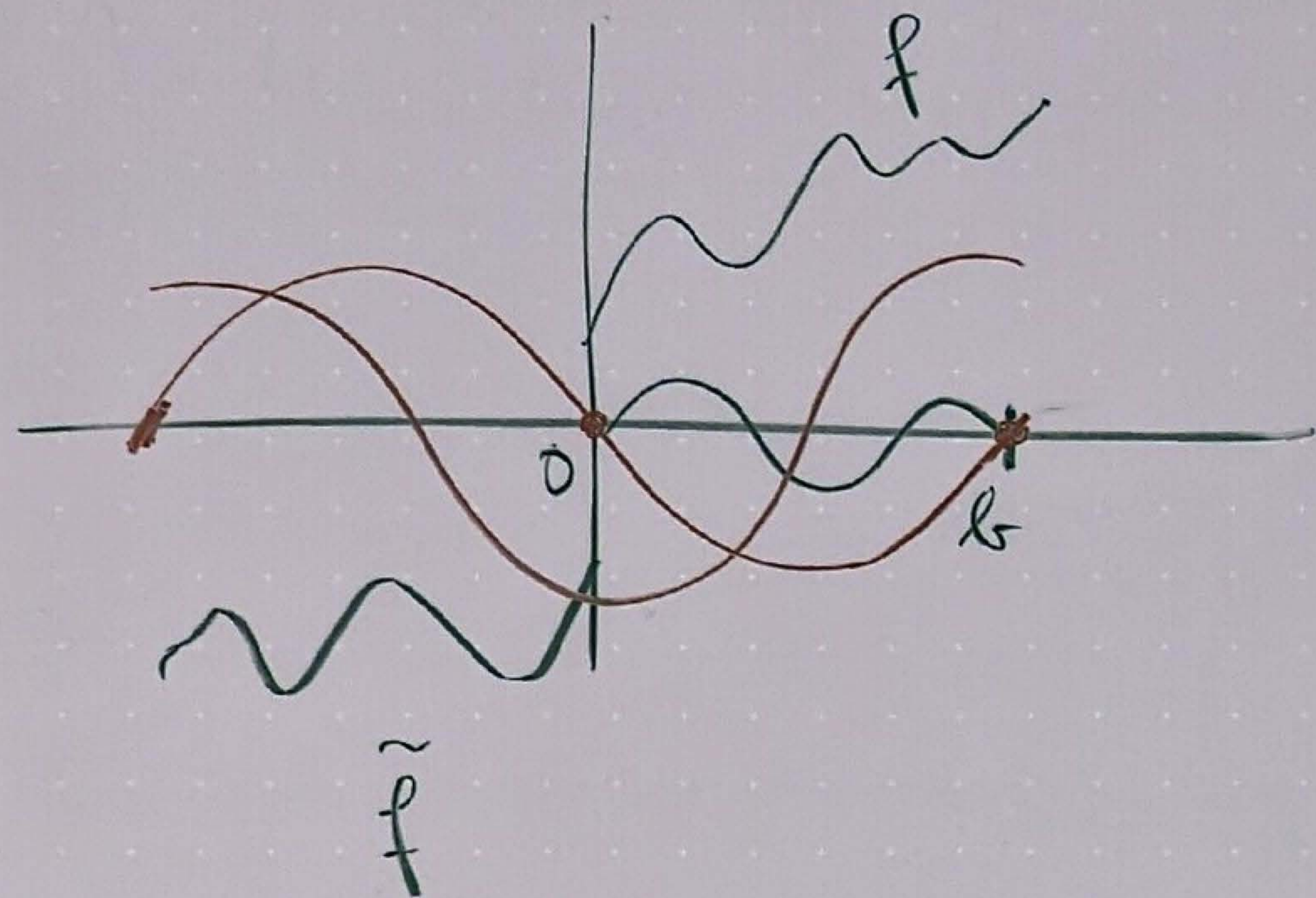


Liefert Koeffizienten $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k \pi \frac{x}{b})$$

(Fourier-Darstellung von f)

(7)



Die Lösung zu diesem f lautet:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\pi \frac{x}{b}\right) e^{-c\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 t}$$

Bemerkungen:

u löst alle Gleichungen!

$$\partial_t u = c \partial_x^2 u \quad \checkmark$$

$$\sum_k b_k \sin\left(\right) \left(-c\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2\right) e^{-c(\)t} \quad \checkmark$$

$$u(a,t) = 0 \quad \checkmark$$

$(a=0)$

$$u(b,t) = 0 \quad \checkmark$$

$$\sin k\pi = 0 \quad \forall k$$

$$u(x,0) = f(x) \quad \checkmark$$

- Lösung ist eindeutig
(Info)

~> wir haben die Lösung
gefunden

- Randbed.:
$$\left. \begin{array}{l} u(a,t) = g(t) \\ u(b,t) = h(t) \end{array} \right\} \forall t$$

g, h gegeben. Dann: $\exists!$ Lsg.

- Auch: $\partial_t u = c \partial_x^2 u + F$ ⑨
 $\uparrow$
 $\exists!$ Lsg. u F gegeben

- Was passiert, falls $f(a) \neq 0$

Lösung kann in $(x,t) = (0,0)$
nicht stetig sein

• Glattheit der Lösung

Nehme an: $f \in L^2([0, b], \mathbb{R})$

Dann: $(b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < \infty$$

$t_0 > 0$

$$u(x, t_0) = \sum_k \underbrace{b_k e^{-c \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 t_0}}_{\text{Koeffizienten wie}} \sin(k\pi \frac{x}{b})$$

Fourier-Reihe von $u(\cdot, t_0)$

2024-01-22

$\leadsto$ u ist ∞ -oft diffbar

(10)

im Gebiet (also:
im Inneren)

• Große Zeiten:

$$t \rightarrow \infty \Rightarrow u(x, t) \rightarrow 0 \quad (\text{exponentiell})$$

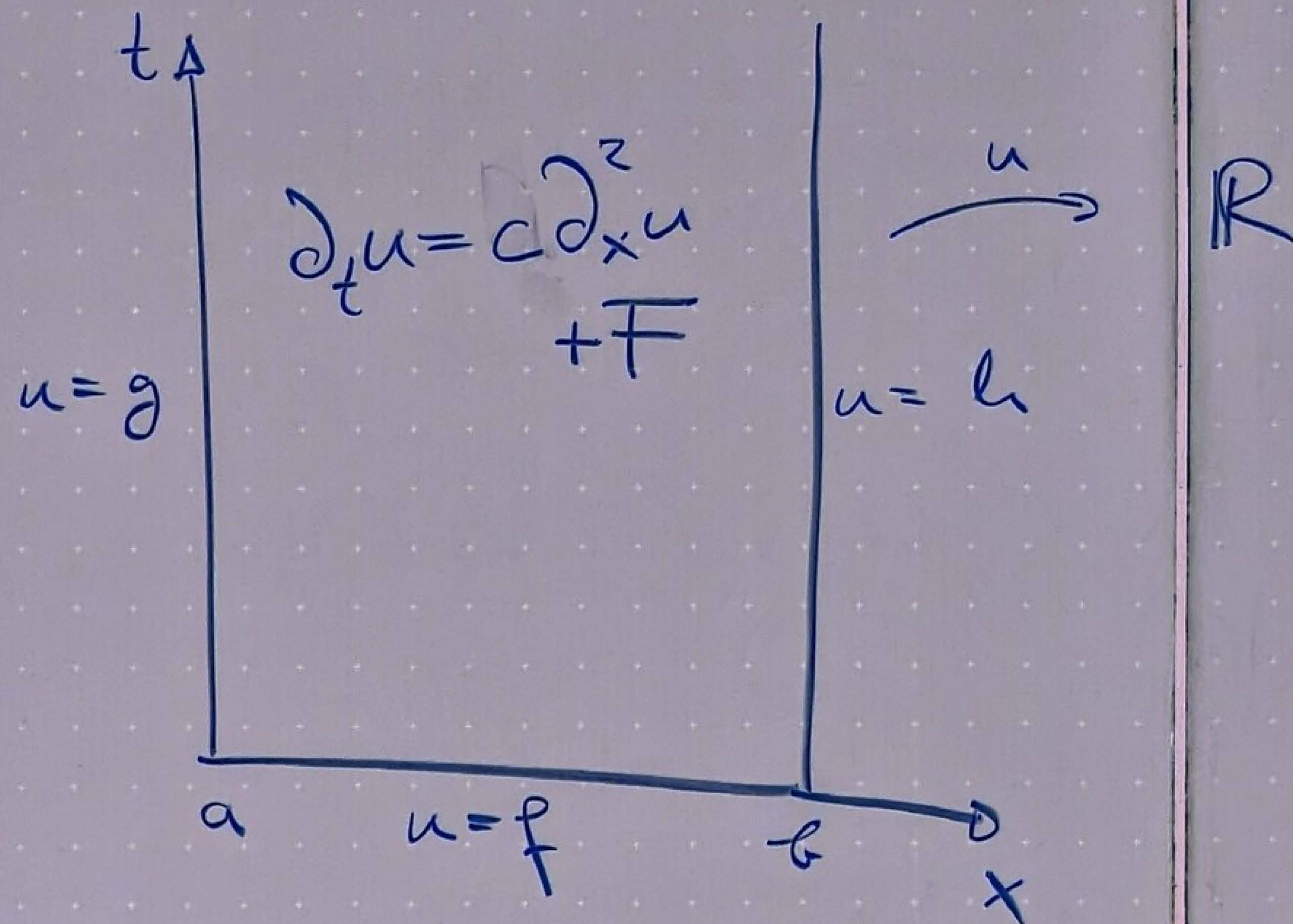
$$\sim e^{-c \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 t}$$

summierbar!

$$b_k e^{-k^2} \quad (\text{sehr schnell abfallend in } k) \leadsto \int_x u \sim \sum b_k e^{-k^2} k^m$$

Wärmeleitungsgl. (= Diffusionsgl.)

1D:



Hier: $g=0, h=0, F=0$

Also:

$$u(a, t) = g(t) \quad \forall t > 0$$

$$u(b, t) = h(t) \quad \forall t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in (a, b)$$

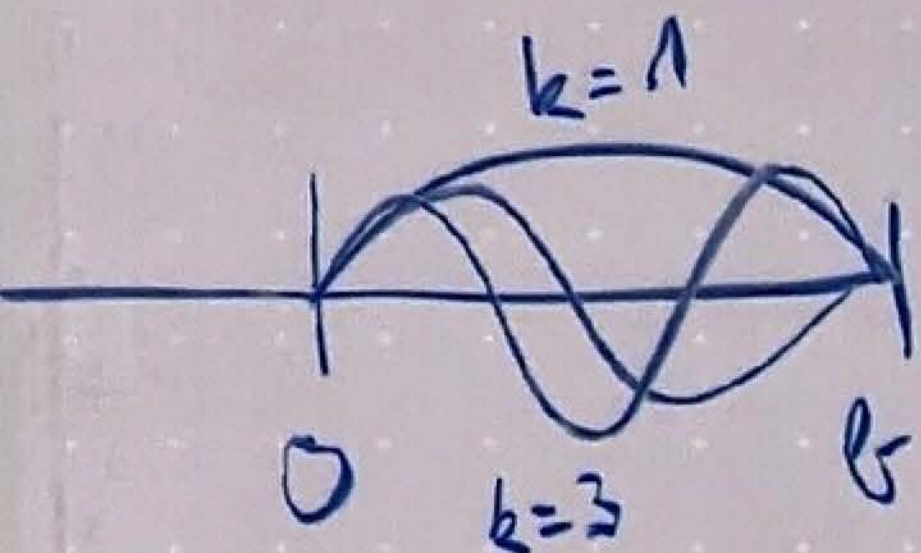
$$\partial_t u(x, t) = \partial_x^2 u(x, t) + F(x, t) \quad \forall x, t$$

Geg.: a, b, g, h, f, F

Ges.: $u: (a, b) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

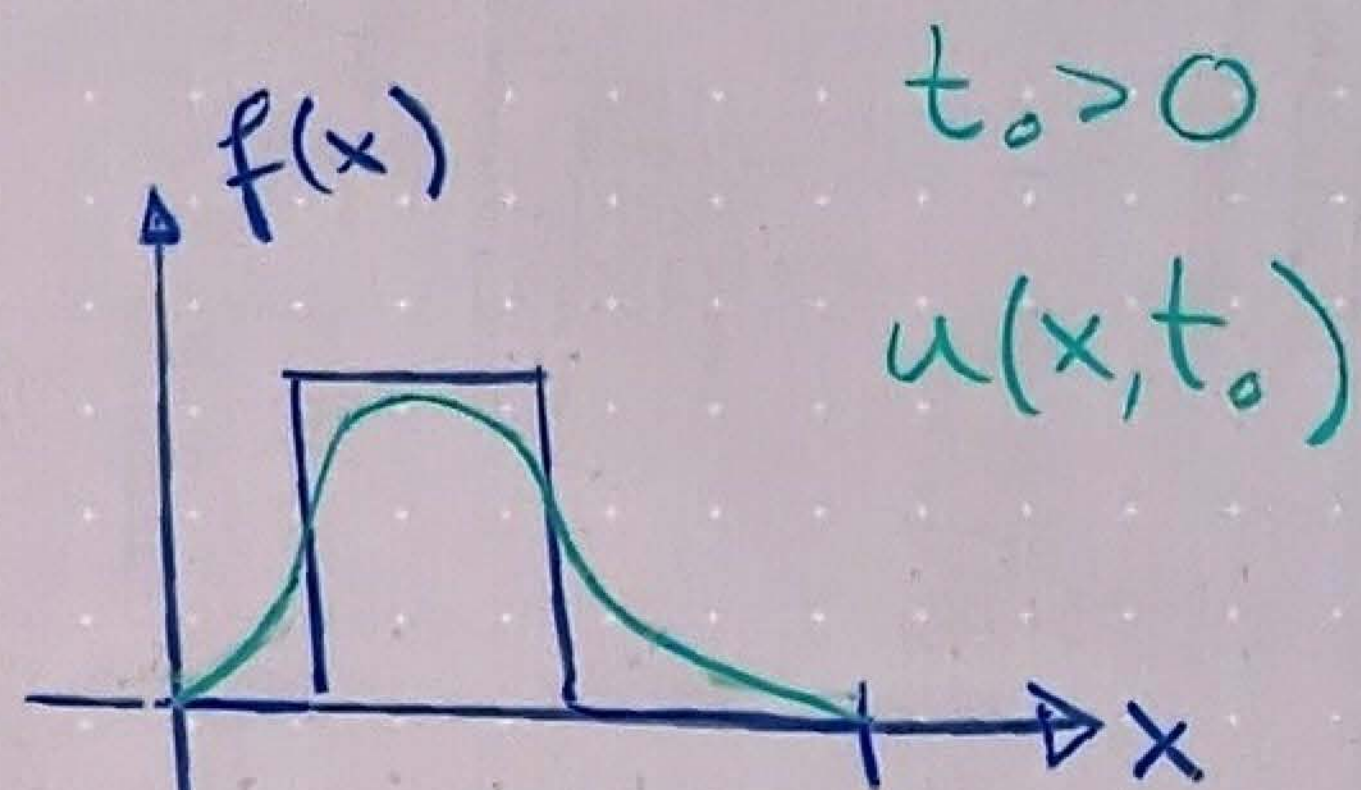
$$a=0.$$

Sei $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\pi \frac{x}{b}\right)$



die Fourier-Entwickl. von f .

Lösung ist: $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(k\pi \frac{x}{b}\right) e^{-c\left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 t}$



$t_0 > 0$

$u(x, t_0)$

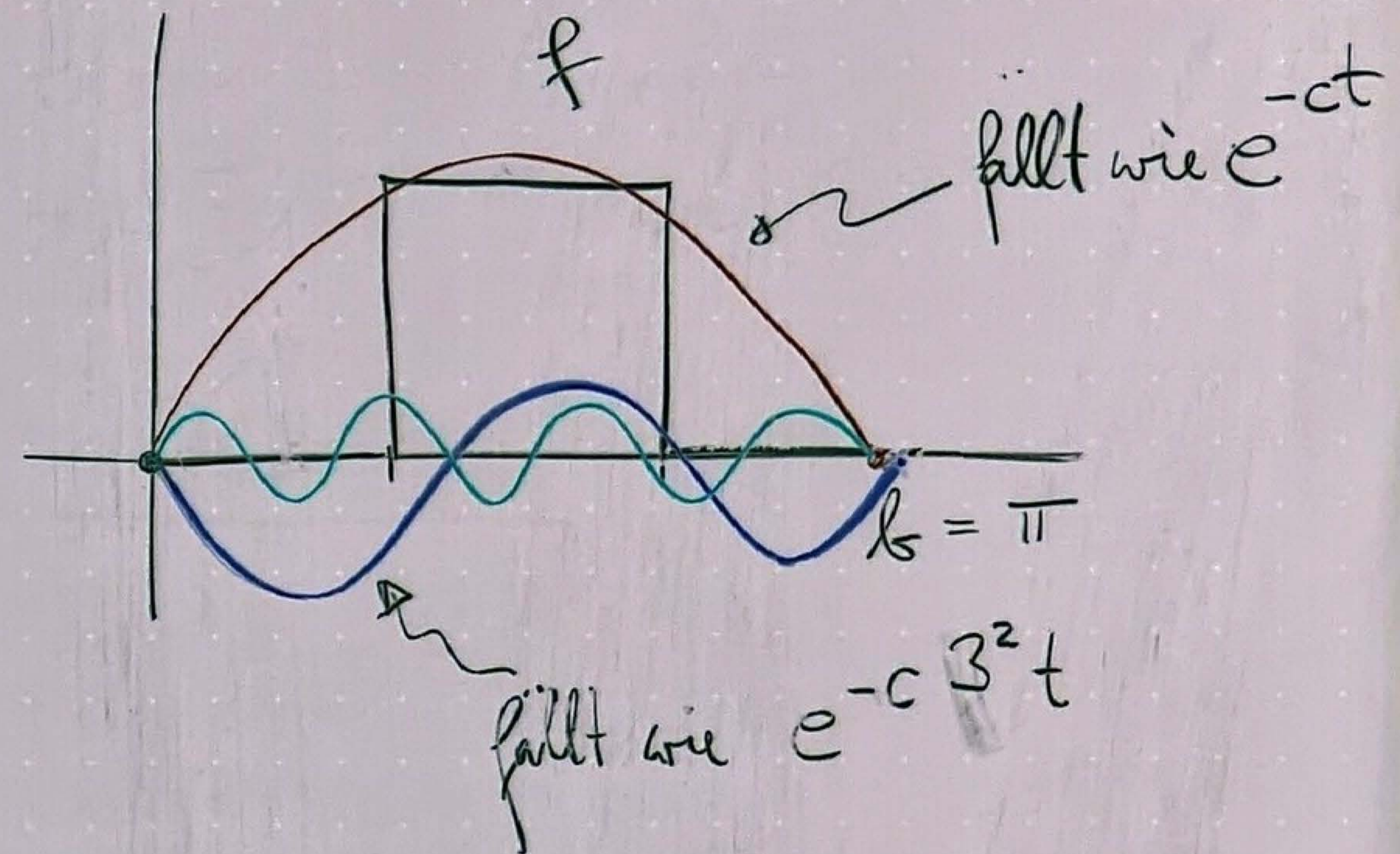
$$\partial_t \left[\sin\left(k\pi \frac{x}{b}\right) e^{\lambda t} \right] \stackrel{!}{=} c$$

$$\lambda \left[\begin{array}{c} \text{''} \\ \end{array} \right]$$

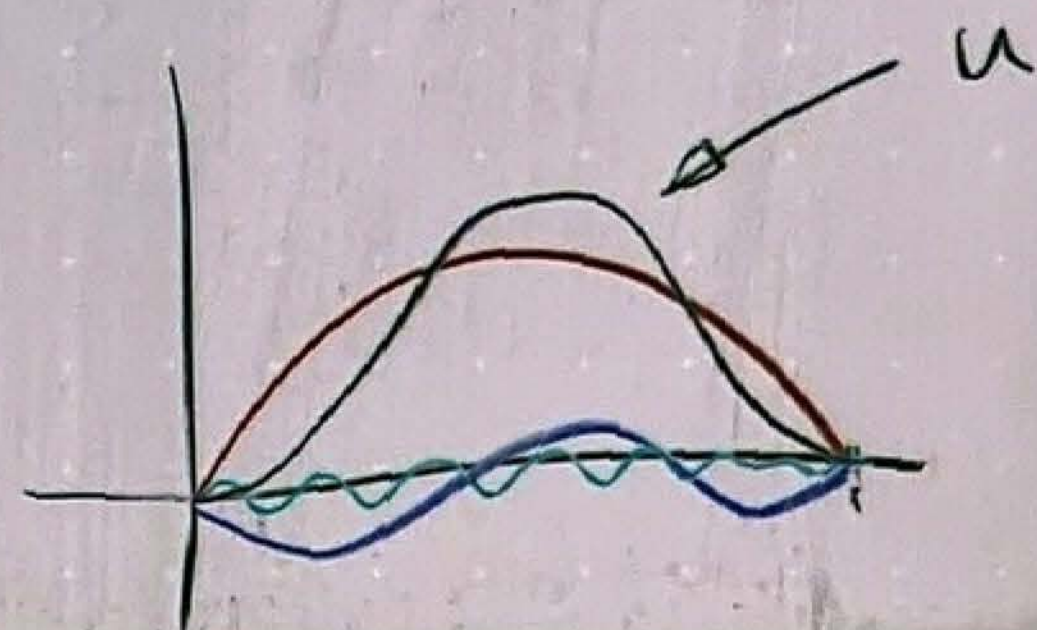
$$\partial_x^2 \left[\begin{array}{c} \text{''} \\ \end{array} \right]$$

$$-c \left(\frac{k\pi}{b} \right)^2 \left[\begin{array}{c} \text{''} \\ \end{array} \right]$$

Idee:



Lösung
 $u(x, t_0)$

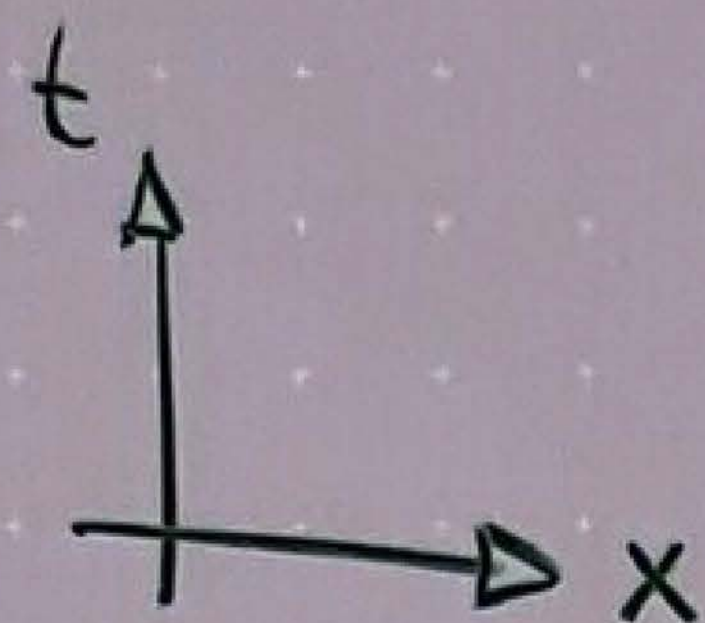


(2)

Andere Randbedingung:

Isolierende Ränder

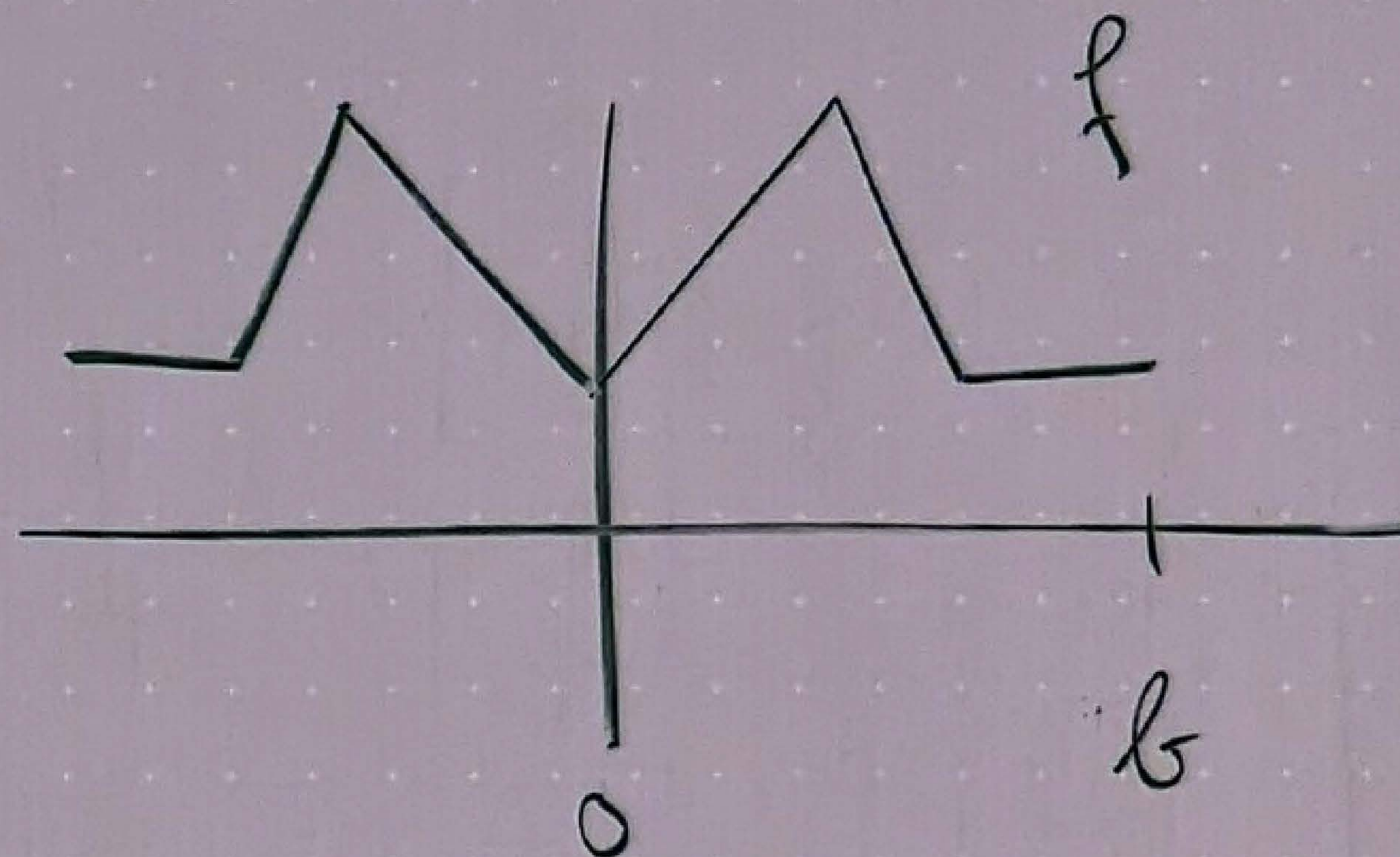
$$\partial_x u = 0$$



$$u = f$$

"Neumann-Problem"

Entwickle in cos!



~ symm. Fortsetzung

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x > 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Entwickle $\tilde{f}$ auf $(-b, b)$ in $\sin$ & $\cos$

Gemeinsam: $\sin\left(k \frac{2\pi}{2b} x\right)$

und $\cos\left(k \frac{2\pi}{2b} x\right)$

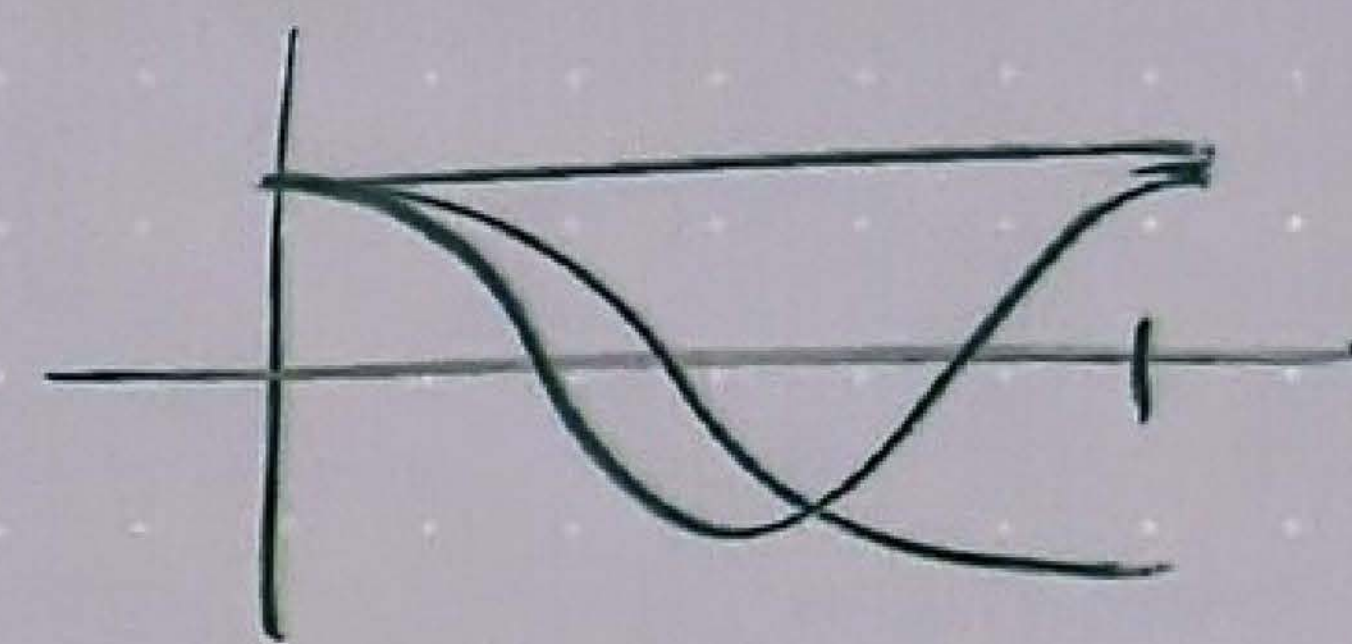
$\tilde{f}$ gerade $\leadsto$ nur cos-Faktoren

Also:
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{\pi}{b} x\right)$$

für geeignete $(a_k)_k$

(ungerade)

(gerade)



(4)

Lösung u ist gegeben durch:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\left(k \frac{\pi}{b} x\right) e^{-c \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2 t}$$

Für $t \rightarrow \infty$ gilt

$$u(x, t) \longrightarrow a_0 \quad (\text{eine konst. Fkt.})$$

$$a_0 = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \tilde{f}(x) \underbrace{\cos(0)}_{=1} dx = \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx$$

= Mittelwert von f .

⑤

Maximumprinzip

Hier: Dirichlet (nicht wesentlich)

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0$$

Erwarte:

$$M := \max_{x \in [a, b]} f(x) \geq 0$$

$$\forall t > 0 \quad \forall x \in [a, b]:$$

$$u(x, t) \leq M.$$

$$\left(\begin{array}{l} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \\ \text{stetig} \end{array} \right)$$

Geometrische Begründung:

Sei u maximal in (x_0, t_0)

$$u(x_0, t_0) > M \quad \begin{matrix} t_0 > 0 \\ x_0 \in (a, b) \end{matrix}$$

Dann: Die Fkt $x \mapsto u(x, t_0)$
 $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

hat Max. in $x = x_0$

$$\leadsto \partial_x u(x_0, t_0) = 0, \quad \partial_x^2 u(x_0, t_0) \leq 0$$

Die Fkt. $t \mapsto u(x_0, t)$ ⑥
ist auf $(0, t_0)$ kleiner (oder
als $u(x_0, t_0)$

$$\Rightarrow \partial_t u(x_0, t_0) \geq 0$$

Also:

$$\underbrace{\partial_t u(x_0, t_0)}_{\geq 0} = \underbrace{c \partial_x^2 u(x_0, t_0)}_{\leq 0}$$

Passet nicht gut zusammen

$\rightarrow$ kein Beweis



Echter Beweis:

u sei Lös.

$$v_\varepsilon(x, t) := u(x, t) e^{-\varepsilon t}$$

$$(\varepsilon > 0)$$

Falls Max-Pr. für v_ε gilt,

so gilt Max-Pr. auch für

u , denn

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon(x, t) = u(x, t)$$

$$v_\varepsilon(x, t) \leq M \quad \forall x, t$$

Im Max. von v_ε gilt

$$\partial_t v_\varepsilon(x, t) \geq 0$$

$$c \partial_x^2 v_\varepsilon(x, t) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (\partial_t v_\varepsilon - c \partial_x^2 v_\varepsilon)(x, t)$$

$$= \left(\underbrace{\partial_t u}_{\geq 0} - \varepsilon u - c \underbrace{\partial_x^2 u}_{\geq 0} \right)(x, t) e^{-\varepsilon t}$$

$$= \underbrace{-\varepsilon u(x, t)}_{> 0} e^{-\varepsilon t}$$

< 0

⚡

⑦

Max-Prinzip impliziert Eindeutigkeit

u und $\tilde{u}$ Lösungen zu g, h, f, F

Dann löst $v := u - \tilde{u}$

$v = u - \tilde{u}$
 $= g - g = 0$

v löst
homogenes
Problem

$$\partial_t v - c \partial_x^2 v = F - F = 0$$

Max-Prinzip
 $\Downarrow$

$$v \equiv 0$$

Also $u = \tilde{u}$, Eindeutigkeit

Zwei Bemerkungen zum Abschluss des Kapitels

$u = 0$ $u = h$
 $h = h(t)$ gegeben
 $a = 0$ $u = 0$
oder beliebig / wird hinterher korrigiert durch λ_0 mit f

Spezielle Situation:

Lösung ist $u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2b}\right) e^{-c\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 t}$



$\sin\left(\frac{\pi x}{2b}\right)$ "xt" $\lambda = -c\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2$

Ist Lsg für $h(t) = e^{-c\left(\frac{\pi}{2b}\right)^2 t}$

Also:
Bestimme $\mathcal{L}^{-1}[h]$

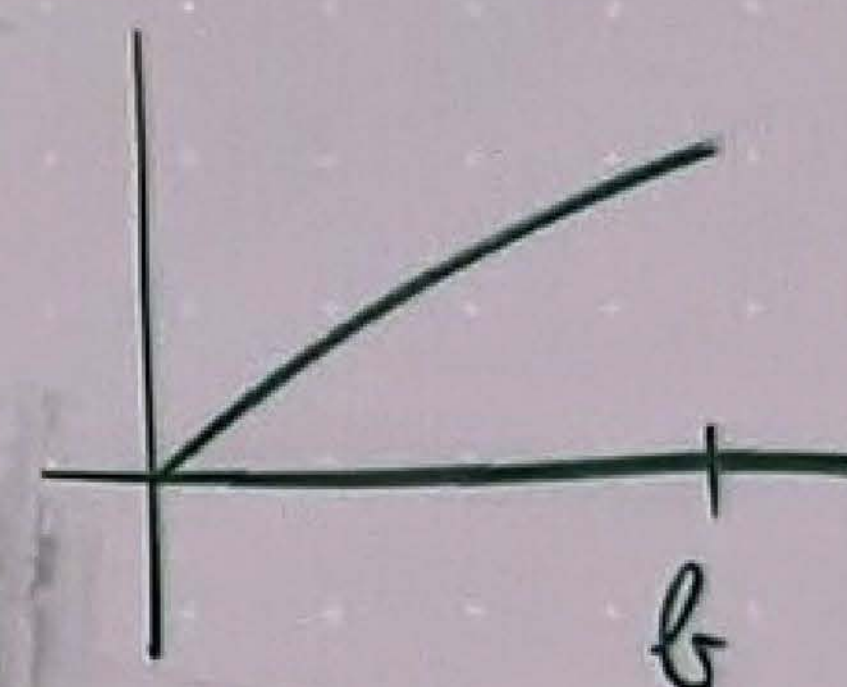
9

Mehr Lösungen:

Für $s > 0$

$\sin(\sqrt{s}x) e^{-cst}$ ebenfalls Lsg.

Damit auch



Lsg, falls
($c=1$)

$u(x,t) = \int_0^{\infty} A(s) \sin(\sqrt{s}x) e^{-cst} ds$

Lsg.

$\mathcal{L}[G](t) = \underbrace{\int_0^{\infty} A(s) \sin(\sqrt{s}b) e^{-cst} ds}_{=: G(s)} = h(t)$

Wärmeleitungsgl.

$$\partial_t u = c \partial_x^2 u$$

Intervall $(0, \pi) \ni x$

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) e^{-ck^2 t}$$

$$\lambda = -ck^2$$

Auch interessant:

①

Wärmeleitung auf $\mathbb{R}$

$$\partial_t u = c \partial_x^2 u$$

$$u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x \in \mathbb{R})$$

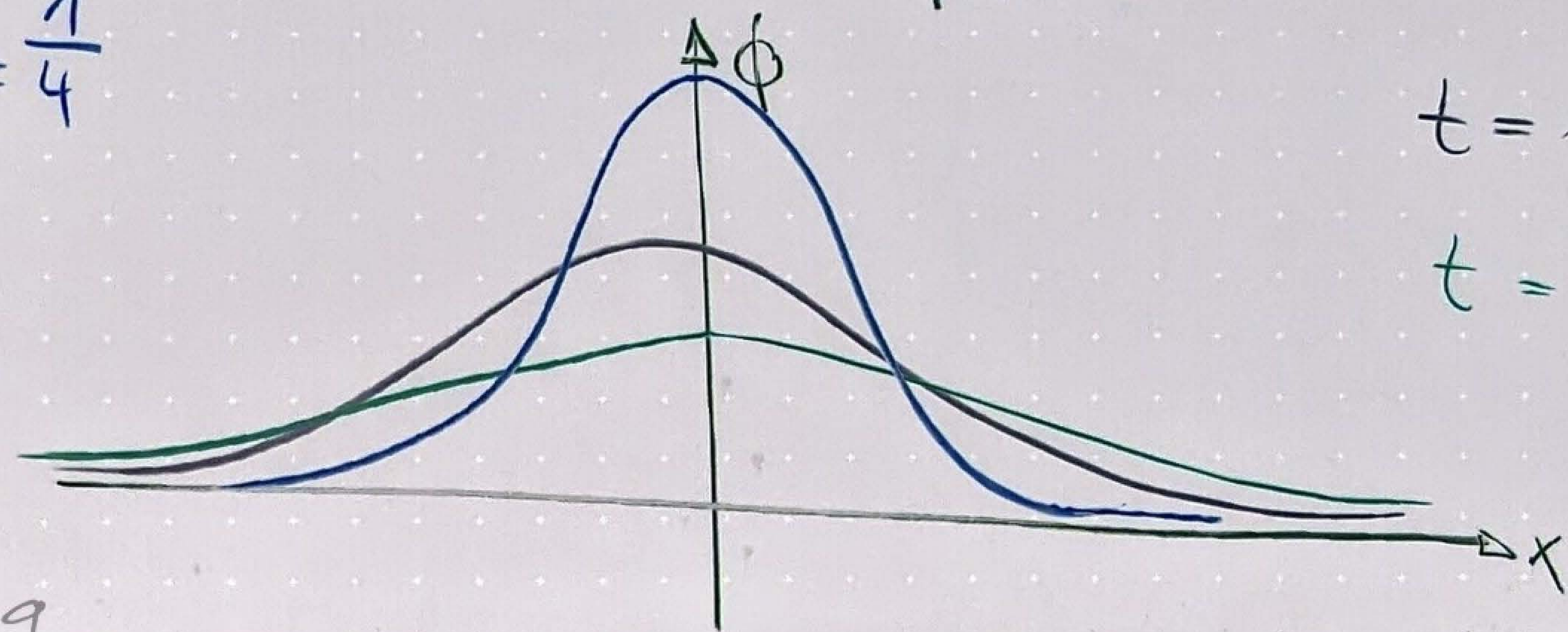
Fundamentallösung
($c = 1$)

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Für uns: $n = 1$ (da $x \in \mathbb{R}^1$)

$$\phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$t = \frac{1}{4}$$



$$t = 1$$

$$t = 3$$

Es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x, t) dx = 1 \quad \forall t > 0 \quad (2)$$

"Lösung":

$$\partial_t \phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \left[\underbrace{\left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2}}_{\text{wavy}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \underbrace{\left(-\frac{|x|^2}{4}\right) (-t^{-2})}_{\text{double underline}} \right] e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$\partial_x \phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \underbrace{\left(-\frac{1}{4t}\right) 2x}_{\text{wavy}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$$\partial_x^2 \phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \frac{-1}{2t^{3/2}} \left[\underline{\underline{1 - x \frac{2x}{4t}}} \right] e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

Es gilt: $\partial_t \phi = \partial_x^2 \phi$

Man kann mit ϕ viele
("alle") Lösungen konstruieren

→ Faltung (!)

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}} f(y) \phi(x-y,t) dy$$

$$(\partial_t - \partial_x^2) u = \int f(y) \underbrace{(\partial_t - \partial_x^2) \phi(x-y,t)}_{=0} dy \quad \textcircled{3}$$

$$= 0$$

$$\leadsto u(\cdot, t) = f * \phi(\cdot, t)$$

ist Lösung

Und: Für $t \downarrow 0$:

Distrib.

$$\phi(\cdot, t) \longrightarrow \delta_0$$

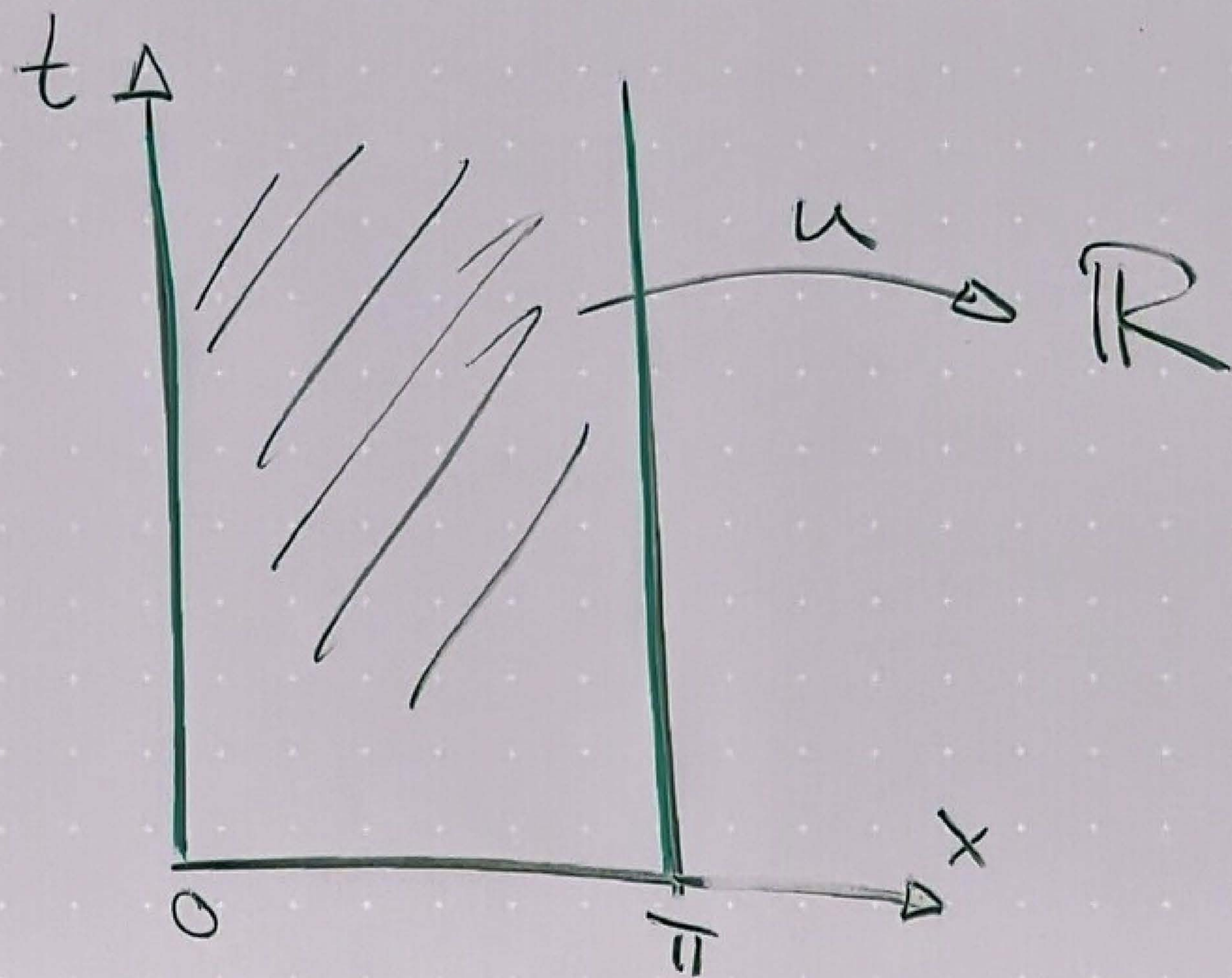
$$u(x,t) \xrightarrow{\mathbb{R}} f(x)$$

Anfangsbedingung $\neq \delta$

35. Die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$$

Auf dem Intervall $(0, \pi)$:



$$\Omega := (0, \pi) \times (0, \infty)$$

(4)

$$u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, u = u(x, t)$$

Randbedingung:

$$u(0, t) = 0 \quad \forall t > 0$$

$$u(\pi, t) = 0 \quad \forall t > 0$$

Anfangsbed:

$$u(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in (0, \pi)$$

und

$$\partial_t u(x, 0) = g(x) \quad \forall x$$

Hier, zur Vereinfachung: $g \equiv 0$

In Ω : $\partial_t^2 u = c \partial_x^2 u$

Gegeben: $b = \pi$, $c > 0$, f, g

Ansatz wie bei Wärmeleitungsgl.:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin(kx)$$

$b_k(t)$ unbekannt; jede Fkt $u(\cdot, t)$ kann so geschrieben werden $\rightarrow$ Fourier-Reihe

Gleichung fordert:

$$\partial_t^2 u(x, t) = c \partial_x^2 u(x, t)$$

//

$$\sum_k \partial_t^2 b_k(t) \sin(kx)$$

$$\sum_k b_k(t) c(-k^2) \sin(kx)$$

Koeffizientenvergleich: $\otimes \partial_t^2 b_k(t) = -c k^2 b_k(t) \quad \forall t, k$

Also: $b_k(t) = b_k^{(1)}(0) e^{\lambda_1 t} + b_k^{(2)}(0) e^{\lambda_2 t}$

$$\lambda^2 = -ck^2, \quad \lambda_{1,2} = \pm i k \sqrt{c}$$

⑤

$$\lambda_2 = -\lambda_1$$

Elementare Lsgen sind:

$$\cos(\sqrt{c}kt) \text{ und } \sin(\sqrt{c}kt)$$

Tatsächlich: Diese lösen $\textcircled{*}$

Lösung für $g=0$:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos(\sqrt{c}kt) \sin(kx)$$

wobei: $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$

⑥

Wiederholung / "geänderte Notation"

$$\textcircled{\times} \quad \partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$$

c^2 statt c besser!

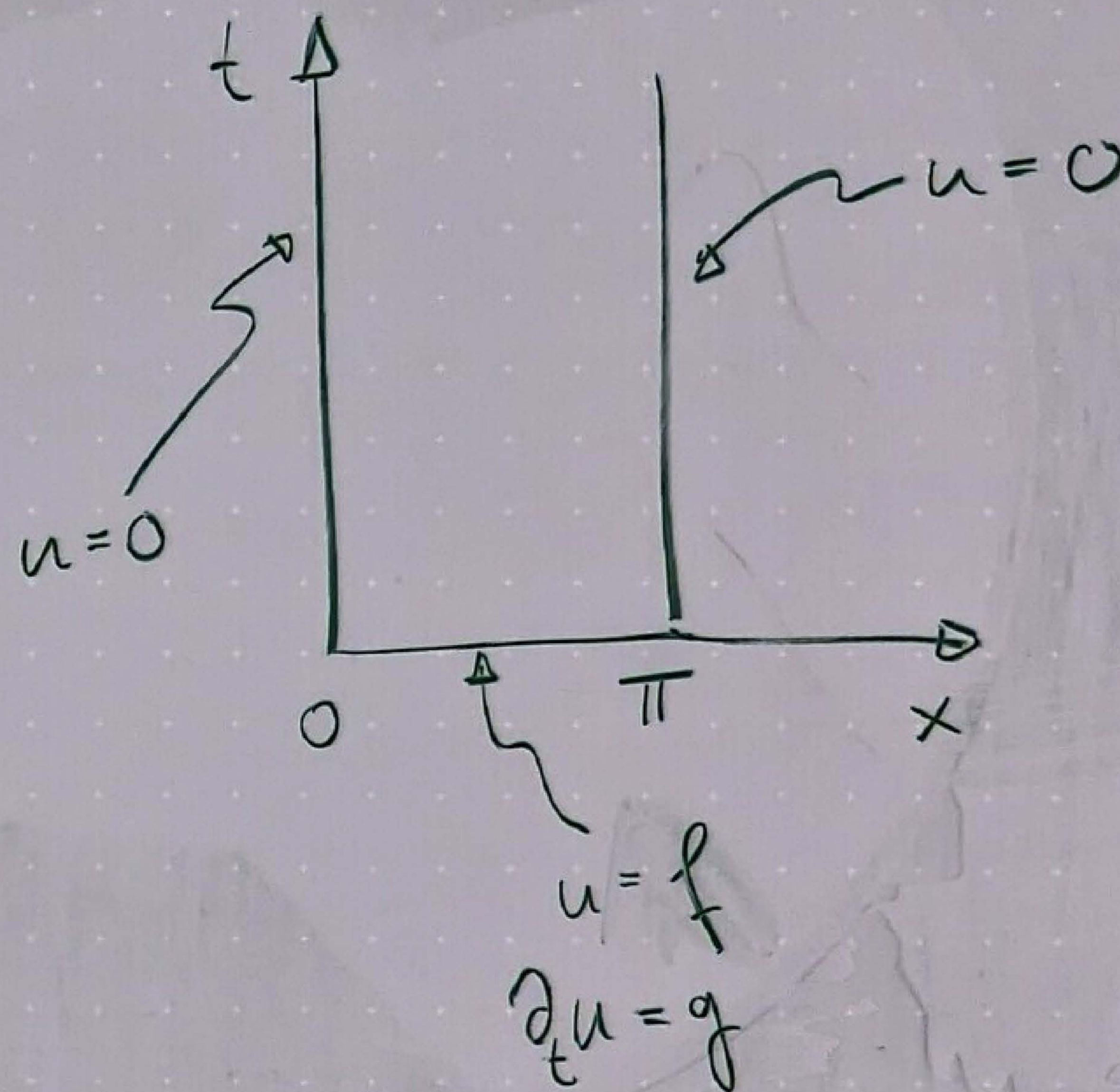
Gebiet: Intervall $(0, \pi)$

Ziel: Löse Gl. mit

$$u(0, t) = 0 \quad \forall t$$

$$u(\pi, t) = 0 \quad \forall t$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad \textcircled{1}$$
$$\partial_t u(x, 0) = g(x) \quad \forall x \in (0, \pi)$$



Lösung für $g=0$.

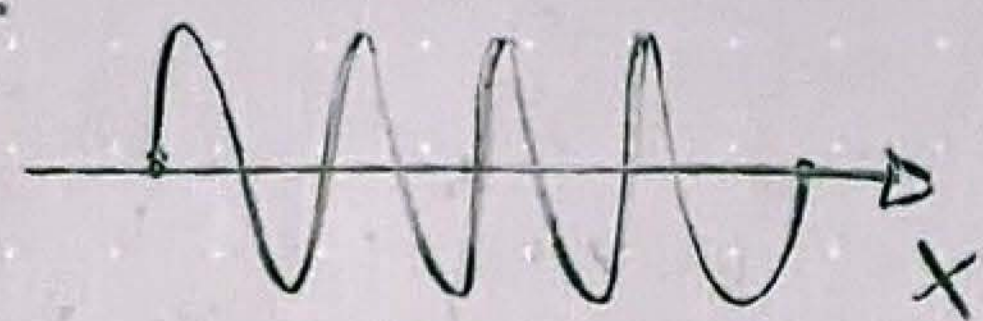
$$\text{und } f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx) \cos(ckt)$$

Test: Einsetzen liefert: ... ist Lsg!

NR:

$$\sin(kx) \cos(ckt)$$



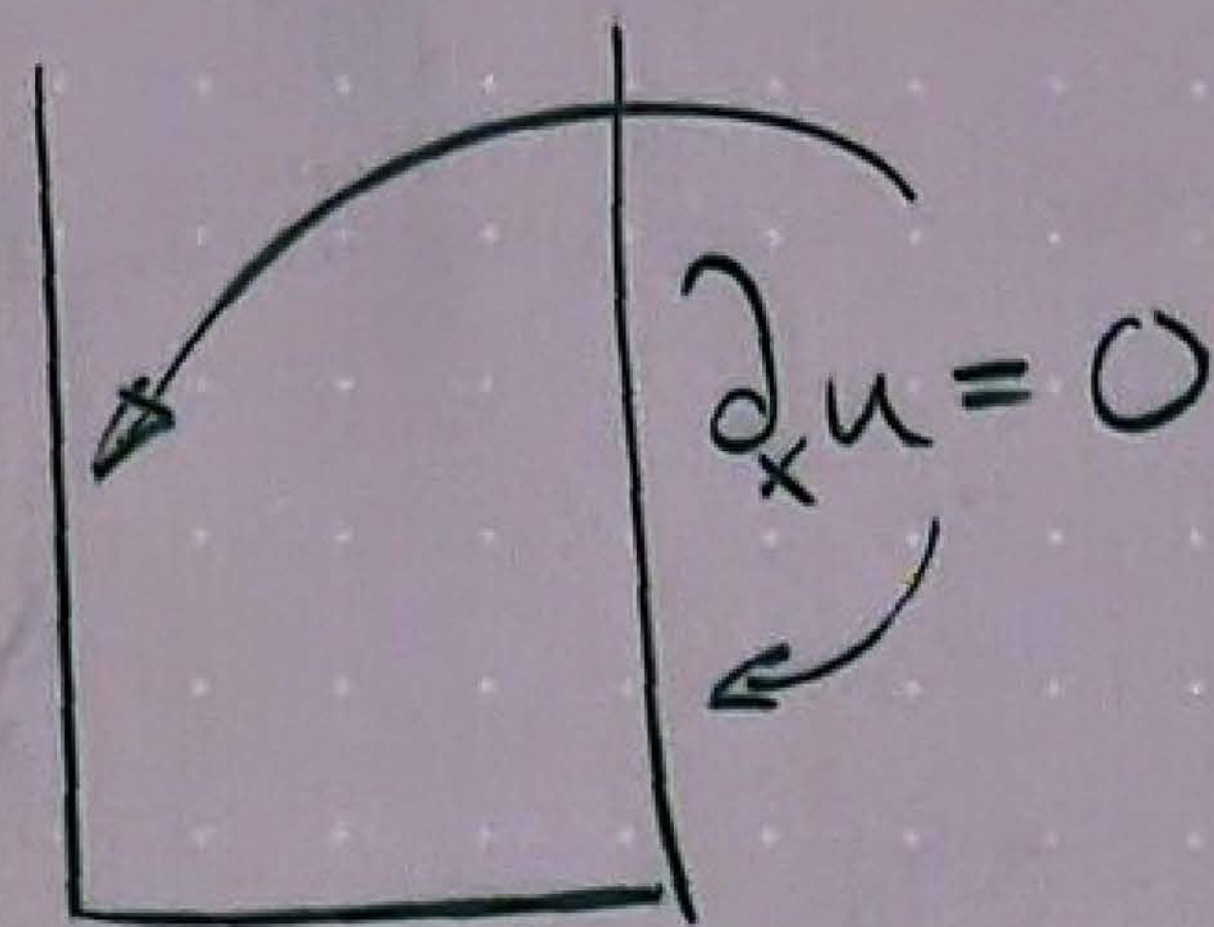
ist Lsg für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Für $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(kx)$ (2)
($f=0$)

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(kx) \frac{1}{ck} \sin(ckt)$$

$f \neq 0$ und $g \neq 0 \leadsto$ addiere diese Lsg.

Neumann - Probleme "genauso":



$$u = f$$

$$\partial_t u = g$$

$$g = 0, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

Setze f gerade auf $(-\pi, \pi)$ fort,

Lsg:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(kx) \cos(ckt)$$

Auch: $\alpha u(\pi, t) + \beta \partial_x u(\pi, t) = 0$

entwickle in Fourier-Reihe. $\leadsto$ Nur cos kommt vor

Bild:

" $\sin 3x$ "

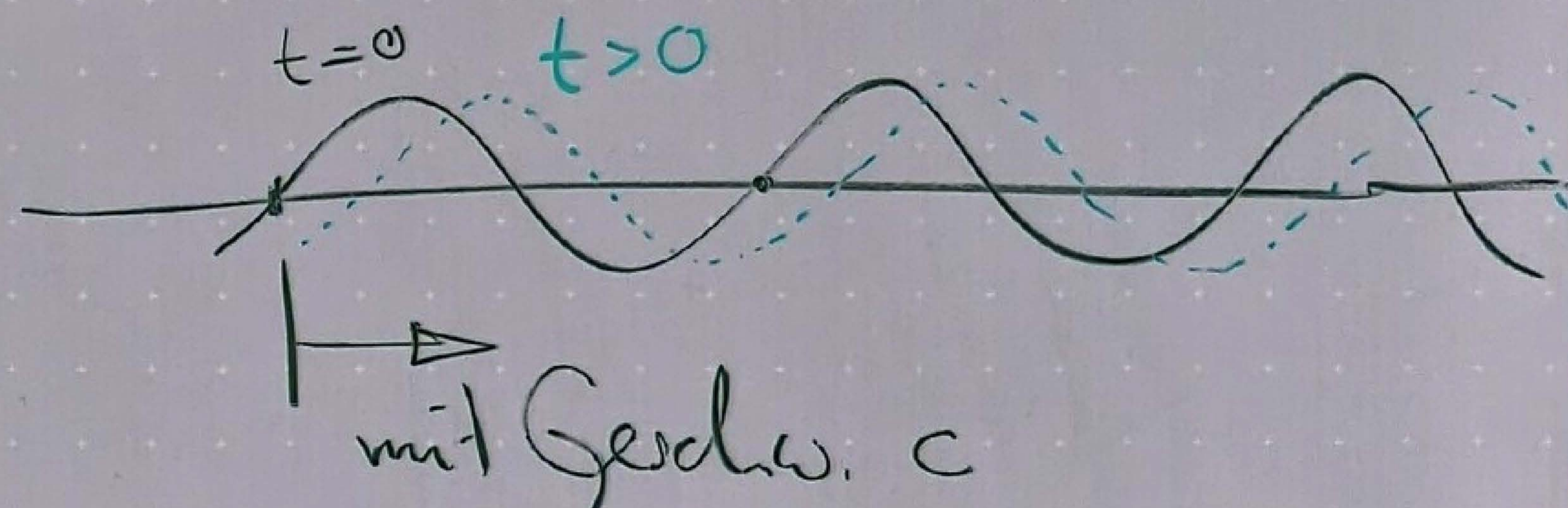


Eine Lsg. auf $\mathbb{R}$:

$$u: \mathbb{R} \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\sin(k(x - ct))$$

Bild:



Punkt ist zur Zeit t
an Position ct

z.B. Maximum

Welle ist $\sin(k(x-ct)) = \frac{1}{2i} \left(\underbrace{e^{ikx}}_{\text{~~~~~}} \underbrace{e^{-ickt}}_{\text{~~~~~}} - \underbrace{e^{-ikx}}_{\text{~~~~~}} \underbrace{e^{ickt}}_{\text{~~~~~}} \right)$

NR: $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ (5)

Mit umgekehrter
Laufrichtung:

$\sin(k(x+ct)) = \frac{1}{2i} \left(\underbrace{e^{ikx}}_{\text{~~~~~}} \underbrace{e^{ickt}}_{\text{~~~~~}} - \underbrace{e^{-ikx}}_{\text{~~~~~}} \underbrace{e^{-ickt}}_{\text{~~~~~}} \right)$

Summe: $\sin(k(x-ct)) + \sin(k(x+ct)) \stackrel{?}{=} 2 \frac{1}{2i} \left(\underbrace{e^{ikx}}_{\text{~~~~~}} - \underbrace{e^{-ikx}}_{\text{~~~~~}} \right) \frac{1}{2} \left(\underbrace{e^{ickt}}_{\text{~~~~~}} + \underbrace{e^{-ickt}}_{\text{~~~~~}} \right)$

$= 2 \sin(kx) \cos(ckt)$

Überlagerung rechtslaufender Welle mit linkslaufender Welle (Amplitude identisch) $\rightarrow$ stehende Welle

$$\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$$

$$u: \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Erstaunliche Beobachtung:

$$\text{Sei } h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

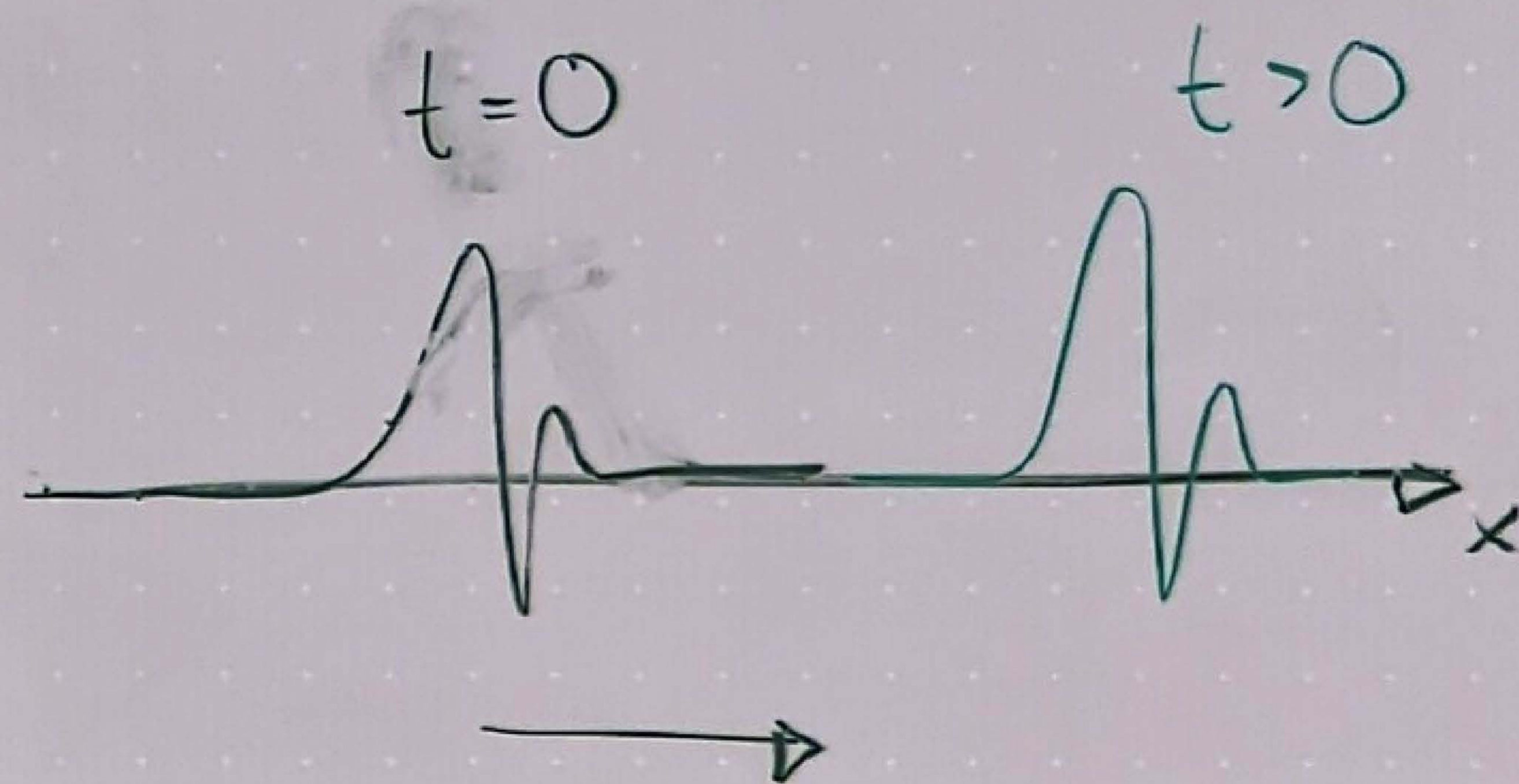
$$\text{Setze } u(x, t) := h(x - ct)$$

Dann:

$$c^2 \partial_x^2 u(x, t) = c^2 h''(x - ct)$$

$$\partial_t^2 u(x, t) = (-c)^2 h''(x - ct)$$

Also: u löst Wellengl.



Ebenso mit linkslaufenden Wellen:

$$u(x,t) := h(x+ct)$$

löst Wellengl.

Damit: Löse Wellengl. mit $u(x,0) = f(x)$
 $\partial_t u(x,0) = 0$

$$u(x,t) := \frac{1}{2} (f(x-ct) + f(x+ct))$$

u Lsg ✓

2024-01-31

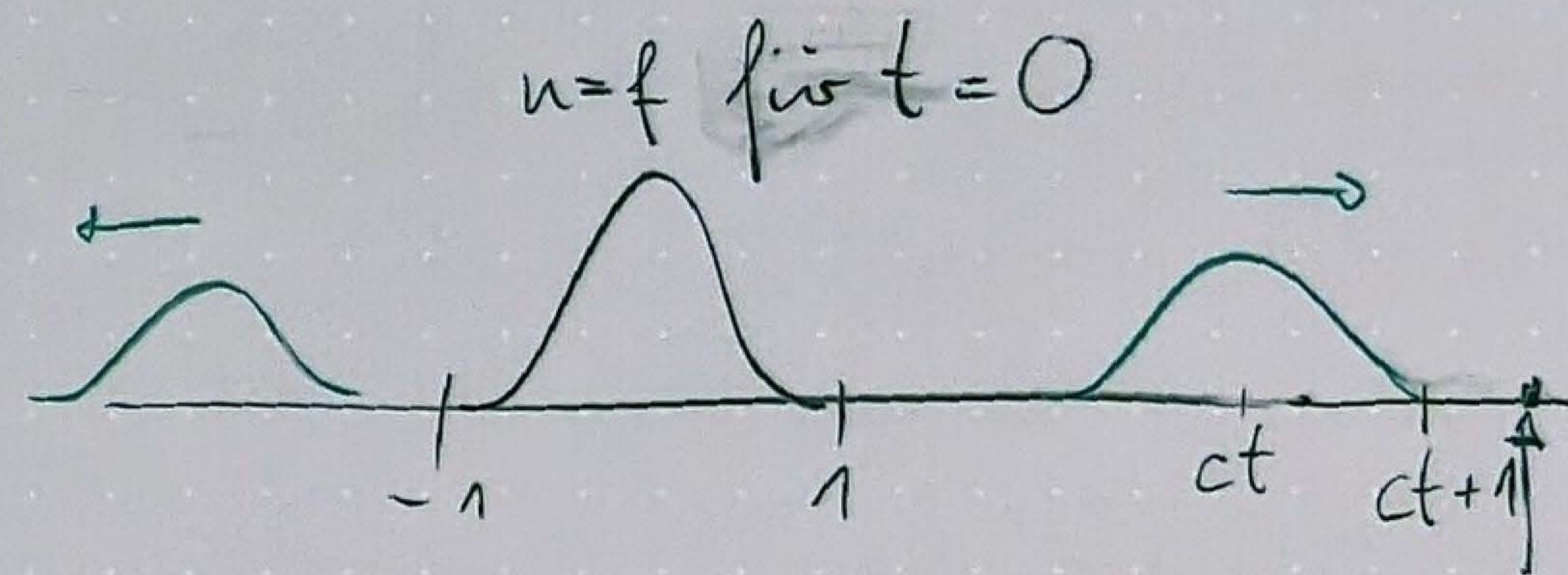
$$u(x,0) = f(x) \quad \checkmark$$

$$\partial_t u(x,0) = \frac{1}{2} (-c f'(x-ct) + c f'(x+ct)) \Big|_{t=0} = 0 \quad \checkmark$$

Beobachtungen

⑦

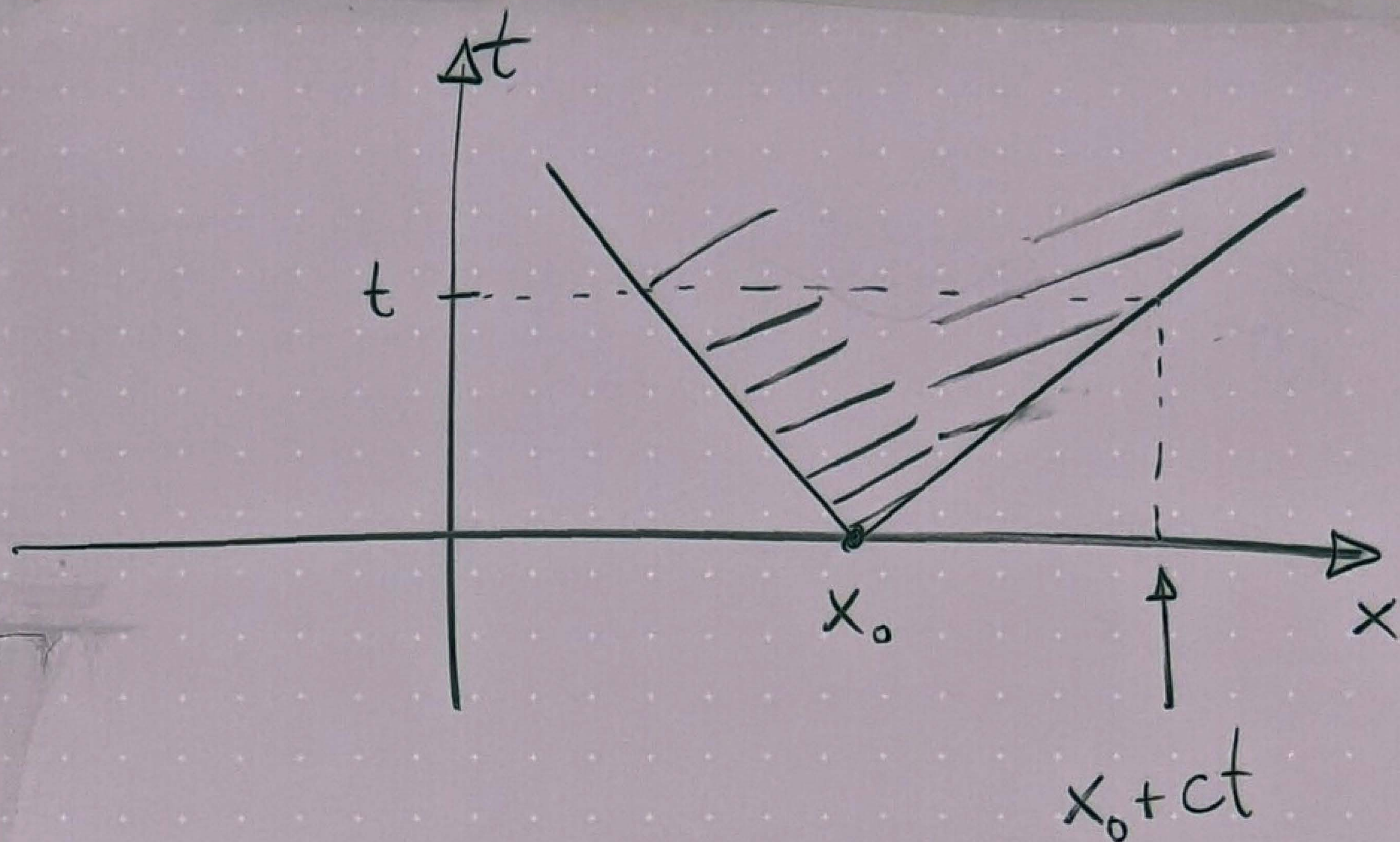
- Endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit



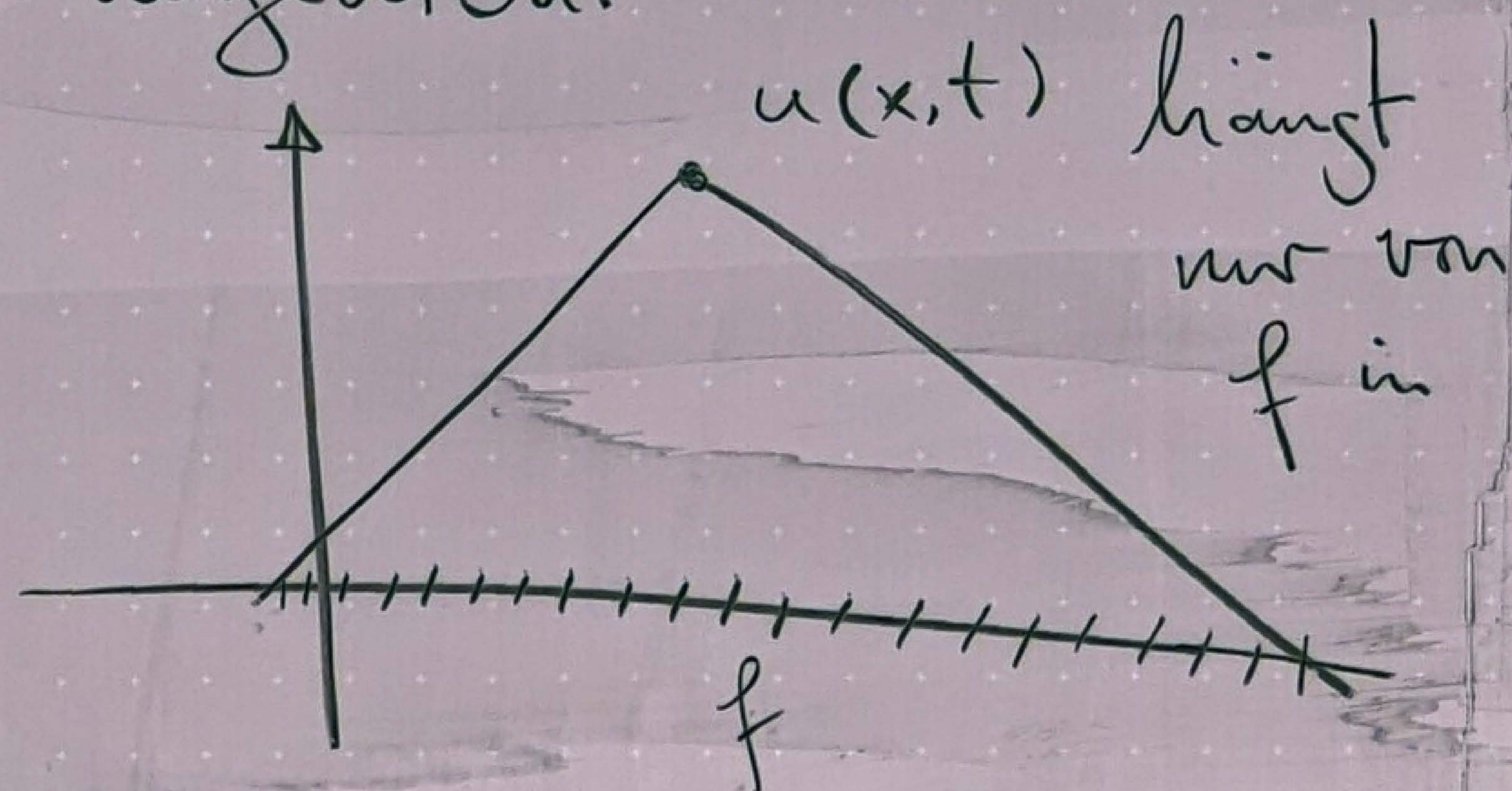
$$f(x) = 0 \quad \forall x \notin [-1, 1]$$

Sei x mit $x > ct+1$. Dann: $u(x,t) = 0$

8



Auch ungedreht:



$(x-ct, x+ct)$
als

Lösung für $f=0$, $g \neq 0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

Hängt nur von $x+ct$ und von $x-ct$ ab

$\leadsto$ ist Lsg.

$$\partial_t \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds \stackrel{\text{HS}}{=} c g(x+ct) - (-c) g(x-ct)$$

In $t=0$: $2c g(x)$

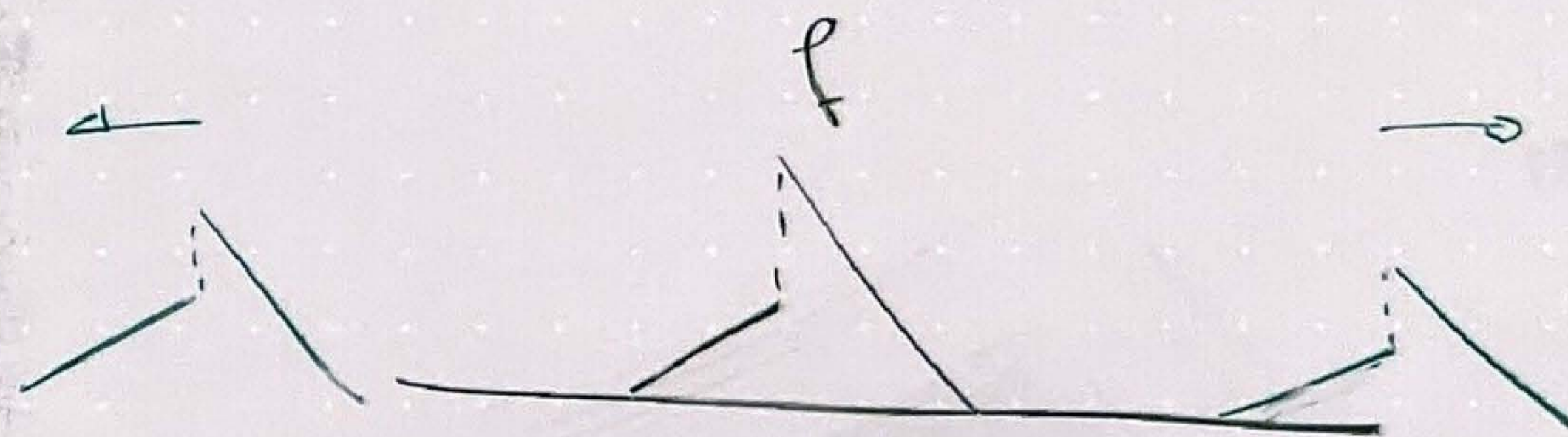
2024-01-31

Lsg. zu allg. f und g lautet

9

$$u(x,t) = \frac{1}{2} (f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$$

• Die Wellengl. "verbessert" die Lsg.
nicht"



Kanten werden
nicht geglättet!

Was bedeutet $\partial_x^2 u$ dann?