

14: Anwendungen der Differentialrechnung

1. Grenzwert-Berechnung mit den Regeln von de l'Hospital
2. Kurvendiskussion: Monotonie, Konvexität und Konkavität, Charakterisierung relativer Extremwerte durch höhere Ableitungen
3. Extremwert-Aufgaben
4. Die Ungleichung zwischen dem gewichteten arithmetischen und geometrischen Mittel
5. Polynom-Interpolation: Der Interpolations-Fehler
6. Berechnung von Nullstellen: Das Newton-Verfahren

Schöne Hilfsmittel zur Grenzwertberechnung liefert der folgende Satz.

Satz 14.1 (Regel von l'Hospital)

Die Funktionen $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar und es gelte $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Falls eine der Voraussetzungen

$$(V_0) \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0 \text{ oder}$$

$$(V_\infty) \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$$

erfüllt ist UND falls

$$(K) \quad \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \text{ existiert (auch als uneigentlicher Grenzwert),}$$

so gilt auch

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = c.$$

Mit den entsprechenden Modifikationen ist die Aussage für $x \rightarrow b-$, $x \rightarrow \infty$ im Fall $D = (a, \infty)$, $x \rightarrow -\infty$ im Fall $D = (-\infty, b)$ sowie für den beidseitigen Grenzwert $x \rightarrow x_0$ im Fall $D = (a, b) \setminus \{x_0\}$ gültig.

Beispiele

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Satz 14.2 (Kriterien für Extrema)

Die Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei n -mal stetig differenzierbar. Für ein $x_0 \in (a, b)$ gelte

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann folgt:

- Ist n gerade, so hat f in x_0 ein relatives Extremum. Im Fall $f^{(n)}(x_0) > 0$ handelt es sich dabei um ein relatives Minimum, und im Fall $f^{(n)}(x_0) < 0$ handelt es sich um ein relatives Maximum.
- Ist n ungerade, so hat f in x_0 kein relatives Extremum, sondern einen sog. Sattelpunkt. Dann ändert sich das Monotonieverhalten von f an der Stelle x_0 nicht.

Definition 14.3 (Konvexität, Konkavität, Wendepunkt)

Gegeben sei eine stetige Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Teilintervall $J \subseteq (a, b)$.

(a) f heißt **KONVEX** in J , wenn für je zwei Punkte $c, d \in J$, $c < d$, die Sekante

$$S(x; c, d) = f(c) + \frac{f(d) - f(c)}{d - c} (x - c), \quad x \in [c, d]$$

oberhalb des Graphen von f liegt, also

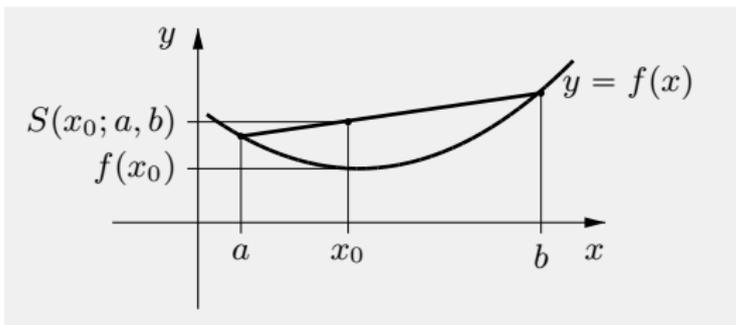
$$f(x) \leq S(x; c, d) \quad \text{für } x \in [c, d] \quad \text{gilt.}$$

(b) f heißt **KONKAV** auf dem Intervall J , wenn für je zwei Punkte $c, d \in J$, $c < d$, die Sekante $S(x; c, d)$ unterhalb des Graphen von f liegt, also

$$f(x) \geq S(x; c, d) \quad \text{für } x \in [c, d] \quad \text{gilt.}$$

(c) f hat an der Stelle $x_1 \in (a, b)$ einen **WENDEPUNKT**, wenn f in x_1 stetig ist und hier ein Konvexitäts- und ein Konkavitätsintervall von f aneinanderstoßen.

$$f \text{ konvex} \iff -f \text{ konkav.}$$



Satz 14.4 (Kriterium für Konvexität)

Die Funktion $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar, $J \subseteq (a, b)$ sei ein Intervall. Dann gilt:

- f ist konvex (linksgekrümmt) in $J \iff f''(x) \geq 0$ für alle $x \in J$
- f ist konkav (rechtsgekrümmt) in $J \iff f''(x) \leq 0$ für alle $x \in J$
- f hat einen Wendepunkt an der Stelle $x_1 \implies f''(x_1) = 0$.

Insbesondere ist eine differenzierbare Funktion genau dann konvex, wenn f' monoton wachsend ist.

Kurvendiskussion

Die Differentialrechnung ermöglicht eine genaue Beschreibung der Graphen von Funktionen. Meist ist nur die Abbildungsvorschrift $y = f(x)$ gegeben. Dann gehört zur Kurvendiskussion:

- Definitionsbereich bestimmen (d.h. alle $x \in \mathbb{R}$, für die $f(x)$ erklärt ist, z.B. bei Brüchen auf Nullstellen des Nenners achten, bei Wurzeln und Logarithmen aufpassen)
- einseitige Grenzwerte am Rand und in den Lücken des Definitionsbereichs (auch uneigentliche Grenzwerte, "Polstellen"); Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ ("horizontale Asymptoten")
- Nullstellen von f (d.h. die Schnittpunkte mit der x -Achse) und evtl. den Schnittpunkt $(0, f(0))$ mit der y -Achse
- Berechnen der 1. und 2. Ableitungen, dabei auf Ausnahmestellen achten, an denen die Ableitung nicht existiert (z.B. bei $f(x) = \sqrt[3]{x}$ bei $x_0 = 0$). Falls f dort einen endlichen Grenzwert besitzt, sind die einseitigen Grenzwerte von f' wichtig (welche Steigung, incl. $\pm\infty$, hat der Graph hier?).

- relative Extremwerte und Monotoniebereiche:
 - Zuerst berechnet man alle Nullstellen von f' als **mögliche** Kandidaten für die relativen Extremwerte von f . Die Monotoniebereiche sind dann die Intervalle zwischen den Nullstellen von f' und den evtl. vorhandenen Lücken im Definitionsbereich von f' .
 - Durch Einsetzen je **eines** x -Werts aus jedem Monotonie-Intervall in die 1. Ableitung kann man das Vorzeichen von f' im gesamten Monotonie-Intervall (und damit die Art der Monotonie, also $f' \geq 0$ für monoton wachsendes f und $f' \leq 0$ für monoton fallendes f) bestimmen. Wechselt das Monotonie-Verhalten an der Nullstelle x' von f' , so hat f dort einen relativen Extremwert (relatives Maximum oder Minimum).
 - Manchmal ist auch Satz 14.2 nützlich zur Bestimmung, ob es sich bei x' um ein relatives Minimum, relatives Maximum oder gar kein relatives Extremum (sondern einen Sattelpunkt) handelt. Dann folgt für die gesamten Monotonie-Intervalle links und rechts von x' das entsprechende Monotonieverhalten.

- Wendepunkte und Konvexität bzw. Konkavität (siehe Definition 14.3):
 - Berechne alle Nullstellen von f'' als **mögliche** Kandidaten für die Wendepunkte von f (siehe Satz 14.4). Die Bereiche von Konvexität (Linkskrümmung) und Konkavität (Rechtskrümmung) sind dann die Intervalle zwischen den Nullstellen von f'' und den evtl. vorhandenen Lücken im Definitionsbereich von f'' . Das Vorzeichen von f'' in diesen Intervallen kann wieder durch Einsetzen je **eines** x -Wertes in f'' festgestellt werden. Die Konvexität bzw. Konkavität folgt daraus mit Satz 14.4
- “schräge” Asymptoten: insbesondere bei gebrochen rationalen Funktionen hilft die Polynomdivision oder das Horner-Schema, Asymptoten der Form $g(x) = ax + b$ für $x \rightarrow \pm\infty$ zu bestimmen.

Extremwertaufgaben

Die Suche nach dem **absoluten** Maximum oder Minimum einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ erfordert die Bestimmung aller relativen Extremwerte sowie der Grenzwerte (bzw. Funktionswerte) von f am Rand und in den Lücken des Definitionsbereichs D . (Meistens ist D ein kompaktes Intervall $D = [a, b]$.)

Beispiel 14.5

Eine elektrische Reihenschaltung bestehe aus einer Spannungsquelle U_0 mit dem Innenwiderstand R_i sowie einem regelbaren Außenwiderstand R_a . Wie groß muss R_a gewählt werden, damit bei vorgegebenem U_0 und R_i die Leistung P_a des Außenwiderstandes maximal wird?

Rechnung:

- Zielfunktion ist die Leistung
 $P_a = R_a \cdot I^2$
- Variable ist $x = R_a$
- Die Stromstärke I ergibt sich aus
$$I = \frac{U_0}{R_a + R_i} = \frac{U_0}{x + R_i}$$

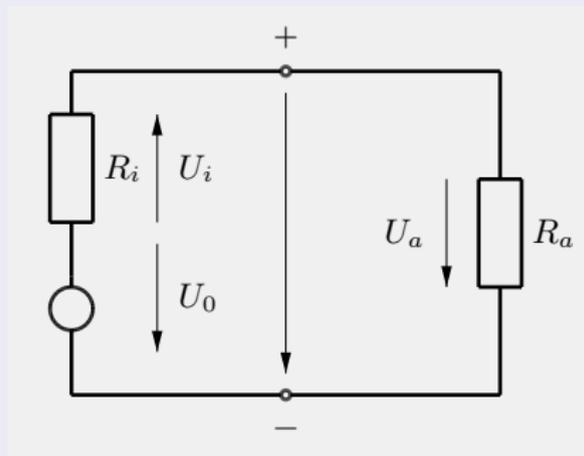
Wir müssen also das absolute Maximum der Zielfunktion

$$P_a(x) = x \cdot \left(\frac{U_0}{x + R_i} \right)^2 = \frac{xU_0^2}{(x + R_i)^2}, \quad x \geq 0,$$

bestimmen. Mit

$$P'_a(x) = \frac{(R_i - x)U_0^2}{(x + R_i)^3}$$

finden wir die einzige Nullstelle von P'_a bei $x_0 = R_i$. Monotonie-Untersuchung ergibt, dass hier ein relatives und sogar absolutes Maximum vorliegt.



Wichtige Ungleichungen der Analysis

Die Konkavität einiger Funktionen führt zu schönen Ungleichungen.

Satz 14.6 (Ungleichung zwischen gewichteten Mitteln)

Für alle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ mit Summe $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$ und alle Zahlen $a_1, \dots, a_n > 0$ gilt die **Ungleichung zwischen dem GEWICHTETEN ARITHMETISCHEN und GEOMETRISCHEN Mittel**

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

Beispiel: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1/2$ ergibt die übliche Ungleichung $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ für alle $a, b > 0$.

Der Satz von Rolle 13.12 hat eine wichtige Konsequenz:

Satz 14.7

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I ein Intervall. Wenn $x_1 < x_2 < \dots < x_r$ Nullstellen von f sind, so hat f' mindestens $r - 1$ Nullstellen $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{r-1}$, und diese trennen die Nullstellen von f , d.h.

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \dots < x_{r-1} < \xi_{r-1} < x_r.$$

Im Abschnitt über Vektorräume werden zu den Knoten

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n$$

die *Lagrange-Grundpolynome* des Grades n

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

definiert.

Definition 14.8 (Polynom-Interpolation)

Gegeben seien $n + 1$ Punkte $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ im Intervall $[a, b]$ und eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt das Polynom P vom Grad n ,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k(x)$$

das INTERPOLATIONSPOLYNOM von f , weil $P(x_j) = f(x_j)$ für $j = 0, 1, \dots, n$.

Wie gut ist die Näherung von $P(x)$ an $f(x)$ für $x \neq x_j$?

Satz 14.9 (Interpolationsfehler)

Die Funktion f sei $n + 1$ -mal differenzierbar. Dann gibt es für jedes $x \in [a, b]$ mit $x \neq x_j$ für alle $j = 0, 1, \dots, n$ ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$f(x) - P(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n).$$

Hierbei ist P das Interpolationspolynom von f und ξ kann im Intervall $J_x := [\min(x, x_0), \max(x, x_n)]$ gewählt werden.

Verfahren zur Nullstellen-Berechnung

Gegeben: $f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(a)f(b) < 0$ (Vorzeichenwechsel)

Gesucht: Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = z$, wobei z Nullstelle von f (siehe Zwischenwertsatz)

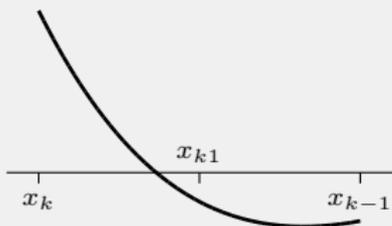
14.10 (Verfahren zur Nullstellenbestimmung)

1. Wähle zwei Startwerte x_0 und x_1 mit $f(x_0)f(x_1) < 0$.
2. Berechne für $k = 1, 2, \dots$

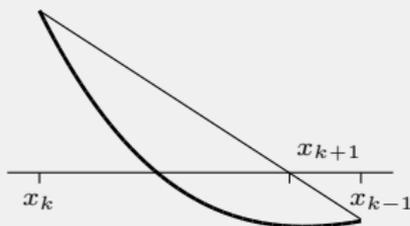
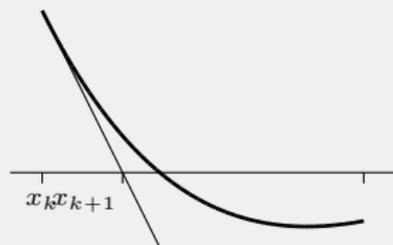
$$x_{k+1} = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \quad (\text{BISEKTIONSVERFAHREN})$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k) \quad (\text{REGULA FALSI})$$

und verwirfe entweder x_{k-1} oder x_k je nach Vorzeichen von $f(x_{k+1})$.



Bisektionsverfahren

Sekantenverfahren und
Regula falsi

Newtonverfahren

14.11 (Sekanten-Verfahren)

1. Wähle zwei Startwerte x_0 und x_1 .
2. Berechne für $k = 1, 2, \dots$ die Nullstelle der Sekante zu x_{k-1} und x_k , also

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k).$$

Im Gegensatz zur Regula falsi kann es beim Sekantenverfahren passieren, dass die Nullstelle für einige Iterationsschritte nicht mehr zwischen x_k und x_{k+1} liegt.

Definition 14.12 (Newton-Verfahren)

Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

1. Wähle einen Startwert x_0 .
2. Berechne für $k = 0, 1, \dots$ die Nullstelle der Tangente zu x_k , also

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Geogebra Newton

Konvergenzbetrachtungen: Sei z die einzige Nullstelle von f in $[a, b]$.

- Bisektionsverfahren: $|x_{k+1} - z| \leq 2^{-k}|x_1 - x_0|$
- Newton-Verfahren: $|x_{k+1} - z| \leq C|x_k - z|^2$, falls
 - $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar ist,
 - $f'(x) \neq 0$ in (a, b) gilt,
 - der Startwert x_0 nahe genug bei z gewählt wird.

Das Quadrat in $|x_k - z|^2$ bewirkt, dass sich die Anzahl der **exakten Dezimalstellen** ungefähr in jedem Schritt **verdoppelt**. Man sagt, dass das Newton-Verfahren für hinreichend gut gewählte Startwerte x_0 **quadratisch** gegen die Nullstelle konvergiert.

15: Potenzreihen

Im Kapitel über Differenzierbarkeit haben wir für unendlich oft differenzierbare Funktionen die **Taylorreihe**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

aufgestellt. Wir werden solche POTENZREIHEN nun zur Definition einiger elementarer Funktionen einsetzen.

Die Definition wird direkt für komplexe Potenzreihen (mit komplexem Entwicklungspunkt z_0 und komplexen Koeffizienten a_k) angegeben.

Definition 15.1 (Potenzreihe)

Es seien komplexe Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ sowie ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

eine **POTENZREIHE** mit dem **ENTWICKLUNGSPUNKT** z_0 . Diejenigen Punkte z in \mathbb{C} , für die die Reihe konvergiert, bilden den **KONVERGENZBEREICH** D der Potenzreihe, und

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

ist die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion.

Beachte:

- Für ein festes $z \in \mathbb{C}$ sind $a_n(z - z_0)^n$ die Summanden einer Zahlenreihe (siehe 11.17). Diese Zahlenreihe konvergiert für $z \in D$ und divergiert für $z \notin D$.
- Die a_n bezeichnet man (wie bei Polynomen) als die **KOEFFIZIENTEN** der Potenzreihe.
- Wir betrachten in vielen Fällen auch den **reellen** Konvergenzbereich $D \cap \mathbb{R}$.

Beispiele:

- a) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist eine Potenzreihe mit dem Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und den Koeffizienten $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Ihr Konvergenzbereich (in \mathbb{C}) ist der offene Einheitskreis (ohne den Rand)

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$$

und es gilt

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{für alle } z \in D.$$

- b) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ hat den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ und die Koeffizienten $a_0 = 0$, $a_n = \frac{1}{n^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Ihr Konvergenzbereich (in \mathbb{C}) ist der abgeschlossene Einheitskreis (mit Rand)

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}.$$

Also ist durch die Potenzreihe eine Funktion definiert:

$$g : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

Wir zeigen später, dass diese Funktion stetig und sogar unendlich oft differenzierbar ist.

Der Konvergenzbereich D der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ist

- ein **Kreis** in \mathbb{C} mit dem Mittelpunkt z_0 (mit oder ohne einige der Randpunkte),
- ein **Intervall** in \mathbb{R} mit dem Mittelpunkt z_0 (mit oder ohne Randpunkte).

Denn es gilt:

Satz 15.2 (Konvergenzradius)

Zu der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ existiert eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $r \geq 0$ oder $r = \infty$, so dass gilt:

- Die Reihe konvergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ (bzw. $z \in \mathbb{R}$) mit $|z - z_0| < r$,
- Die Reihe divergiert für jedes $z \in \mathbb{C}$ (bzw. $z \in \mathbb{R}$) mit $|z - z_0| > r$.

Die Zahl r heißt der **KONVERGENZRADIUS** der Potenzreihe.

Achtung: Es kommt vor, dass für einige z auf dem RAND des Kreises (also für $|z - z_0| = r$) Konvergenz und für andere Divergenz vorliegt.

Beispiele für reelle Potenzreihen:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat den Konvergenzradius 1 mit Konvergenzbereich $(-1, 1)$.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ hat den Konvergenzradius 1 mit Konvergenzbereich $[-1, 1)$.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ hat den Konvergenzradius 1 mit Konvergenzbereich $[-1, 1]$.

Der Konvergenzradius besitzt eine **Berechnungsformel**.

Satz 15.3 (Berechnung des Konvergenzradius)

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit den Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ besitzt den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Spezialfälle:

- $r = 0$, also Konvergenz nur im Punkt z_0 , falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$,
- $r = \infty$, also Konvergenzbereich $D = \mathbb{C}$, falls $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$,

Bemerkung: Oft konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$. Dann ist der Konvergenzradius der Kehrwert ihres Grenzwertes (incl. der Fälle $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$).

In vielen Fällen ist eine weitere Berechnungsformel gültig.

Satz 15.4 (Alternative Berechnungsformel)

Für die Koeffizienten der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ existiere ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$. Weiter gelte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = c$$

(incl. der Fälle $c = 0$ und $c = \infty$). Dann ist der Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{c} \quad (\text{incl. der Fälle } 1/0 = \infty \text{ und } 1/\infty = 0).$$

Eine Verallgemeinerung von Eigenschaften der Polynome ist der folgende Satz:

Satz 15.5 (Identitätssatz)

Falls zwei Potenzreihen

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n && \text{für } |z - z_0| < r_1, \\ g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n && \text{für } |z - z_0| < r_2 \end{aligned}$$

mit $r_1, r_2 > 0$ an allen Stellen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einer komplexen Zahlenfolge mit paarweise verschiedenen Folgengliedern übereinstimmen und falls diese Folge einen Häufungspunkt besitzt, so sind die Potenzreihen identisch, d.h. $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Darauf begründet sich die Methode des “Koeffizientenvergleichs”.

Definition 15.6 (Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen)

Sei I ein Intervall und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge, $f_n : I \rightarrow \mathbb{C}$ und $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion.

- i) Die Folge (f_n) KONVERGIERT PUNKTWEISE auf I gegen f , wenn für jedes $x \in I$ die Zahlenfolge $f_n(x)$ gegen $f(x)$ konvergiert.
- ii) Die Folge (f_n) KONVERGIERT GLEICHMÄSSIG auf I gegen f , wenn

$$\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

Geogebra x^{η}

Satz 15.7

- i) $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig $\implies f_n \rightarrow f$ punktweise.
- ii) Sind alle f_n stetig, und konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f , dann ist auch f stetig.
- iii) Sind alle f_n differenzierbar und konvergiert die Folge der Ableitungen f'_n gleichmäßig gegen eine Funktion g und die Folge (f_n) an einer Stelle $x_0 \in I$ gegen einen Grenzwert, dann gilt:
- Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion f .
 - f ist differenzierbar mit $f' = g$.

Wir behandeln ab jetzt **reelle** Potenzreihen mit Konvergenzradius $r > 0$, betrachten also für $0 < r < \infty$ nur noch die reellen Konvergenzbereiche

$$D = (x_0 - r, x_0 + r), \quad (x_0 - r, x_0 + r], \quad [x_0 - r, x_0 + r), \quad [x_0 - r, x_0 + r],$$

und im Fall $r = \infty$ den Konvergenzbereich $D = \mathbb{R}$.

Satz 15.8 (Konvergenz von Potenzreihen)

Eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ mit dem Konvergenzradius $r > 0$ konvergiert
GLEICHMÄSSIG UND ABSOLUT auf jedem kompakten Teilintervall

$$D_\rho = [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$$

von D mit $0 < \rho < r$.

Satz 15.9 (Eigenschaften von Potenzreihen)

Die durch eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ im Konvergenzintervall D dargestellte Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ist

- stetig in D (incl. der Randpunkte, die in D liegen; dies ist der ABELSCHER GRENZWERTSATZ),
- unendlich oft differenzierbar im offenen Intervall $D = (x_0 - r, x_0 + r)$ bzw. $D = \mathbb{R}$. Die Potenzreihen der Ableitungen ergeben sich durch gliedweises Differenzieren

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}, \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2}, \dots$$

und all diese Potenzreihen haben den gleichen Konvergenzradius r .

Satz 15.10 (Weitere Rechenregeln)

Zwei Potenzreihen

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r_f,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r_g,$$

können im *Durchschnitt* der Konvergenzbereiche (also für $|x - x_0| < \min\{r_f, r_g\}$) addiert, subtrahiert und multipliziert werden. Das Produkt ist die Potenzreihe

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < r,$$

mit den Koeffizienten

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \quad (\text{CAUCHY-PRODUKT})$$

und einem Konvergenzradius $r \geq \min\{r_f, r_g\}$.

Satz 15.11

Potenzreihen können ineinander eingesetzt werden und - falls die Nennerreihe nicht Null ist - durcheinander dividiert werden.

Das Ergebnis ist jeweils eine konvergente Potenzreihe.

Alle diese Regeln gelten analog in \mathbb{C} .

Satz 15.12 (Potenzreihen und Taylorreihen)

Die Funktion $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei an der Stelle $x_0 \in (a, b)$ unendlich oft differenzierbar. Ihre TAYLORREIHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

habe den Konvergenzradius $r > 0$ (oder $r = \infty$). Weiterhin gelte $R_n(x) \rightarrow 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Dann stimmen Potenzreihe und Taylorreihe auf $\{|x - x_0| < r\}$ überein.

Definition 15.13 (Die komplexe Exponentialfunktion)

Durch

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

wird die komplexe Exponentialfunktion $f(z) = e^z$ definiert.

- Der Konvergenzradius der Potenzreihe der Exponentialfunktion ist $r = \infty$, denn für die Koeffizienten $a_n = \frac{1}{n!}$ gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Also ist der Konvergenzbereich die gesamte komplexe Ebene \mathbb{C} (siehe 15.4).

(Man erhält hier noch einmal als Folgerung $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.)

- Funktionswerte: $e^0 = 1$, $e^1 = e = 2.71828182845904\dots$, $e^{i\pi} = -1$.

Geogebra Potenzreihe exp

- **Funktionalgleichung:** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $e^{z+w} = e^z e^w$.

$$\begin{aligned}
 e^z e^w &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \frac{w^\ell}{\ell!} && \text{(Summation über } \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^m \frac{z^n}{n!} \frac{w^{m-n}}{(m-n)!} && \text{(Umordnung nach Diagonalen } m = k + \ell) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} z^n w^{m-n} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(z+w)^m}{m!} && \text{(binomische Formel)} \\
 &= e^{z+w}.
 \end{aligned}$$

- Hieraus folgt $e^{-z} e^z = e^0 = 1$, also
 - $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$,
 - $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Die Eulersche Formel 3.8

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{für } x \in \mathbb{R}$$

wird nun wie folgt begründet:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Die Potenzreihen auf der rechten Seite sind die Taylorreihen von $\cos x$ bzw. $\sin x$. Sie haben beide den Konvergenzradius ∞ , denn: Die erste Reihe hat die Koeffizienten

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerades } n \in \mathbb{N}, \\ \frac{(-1)^{n/2}}{n!} & \text{für gerades } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Also ist

$$r = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Ebenso ergibt sich $r = \infty$ für die zweite Reihe. Weil die Funktionen \cos und \sin mit ihren Taylorreihen im gesamten Konvergenzbereich übereinstimmen, gilt die Eulersche Formel für alle $x \in \mathbb{R}$.

Die reelle Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad \exp(x) = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

ist positiv, stetig, unendlich oft differenzierbar, bijektiv, streng monoton wachsend und konvex:

- **Positivität:** Aus der Funktionalgleichung in 15.13 folgt $1 = e^0 = e^x \cdot e^{-x}$, also hat die Funktion keine reelle Nullstelle. Mit $e^0 = 1$ und dem Zwischenwertsatz 12.12 folgt

$$e^x > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Die Ableitung lautet nach Satz 15.9 b)

$$(e^x)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x,$$

also ist auch jede höhere Ableitung wieder $\exp^{(k)}(x) = e^x$. Aus $e^x > 0$ folgt weiter, dass die Exponentialfunktion streng monoton wachsend und konvex ist.

- **Grenzwerte:** Aus $e^x \geq 1 + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ für $x > 0$ und festes $n \in \mathbb{N}$ folgt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \quad \text{insbesondere} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty.$$

Mit $e^{-x} = 1/e^x$ folgt ebenso

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^n e^x = 0, \quad \text{insbesondere} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist der
NATÜRLICHE LOGARITHMUS

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Diese Funktion ist stetig, unendlich oft differenzierbar, bijektiv, streng monoton wachsend und konkav:

- Aus $e^{\ln x} = x$ für alle $x > 0$ folgt

$$e^{\ln(xy)} = xy = e^{\ln x} e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y},$$

also ergibt sich die **Funktionalgleichung der Logarithmusfunktion**

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x, y > 0.$$

Ebenso erhält man

$$\ln(1/x) = -\ln x, \quad \ln(x^y) = y \ln x, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}.$$

- Die Regel zur Ableitung der Umkehrfunktion ergibt

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Also ist die Logarithmusfunktion unendlich oft differenzierbar, die höheren Ableitungen sind

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $\ln x$ ist in $(0, \infty)$ monoton wachsend ($(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$) und konkav ($(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2} < 0$). Die einzige Nullstelle ist $x_0 = 1$.
- Grenzwerte: Aus den Eigenschaften der Exponentialfunktion oder mit der Regel von de l'Hospital leitet man her

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty, \quad \text{jedoch} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{für jedes } \alpha > 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty, \quad \text{jedoch} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0 \quad \text{für jedes } \alpha > 0.$$

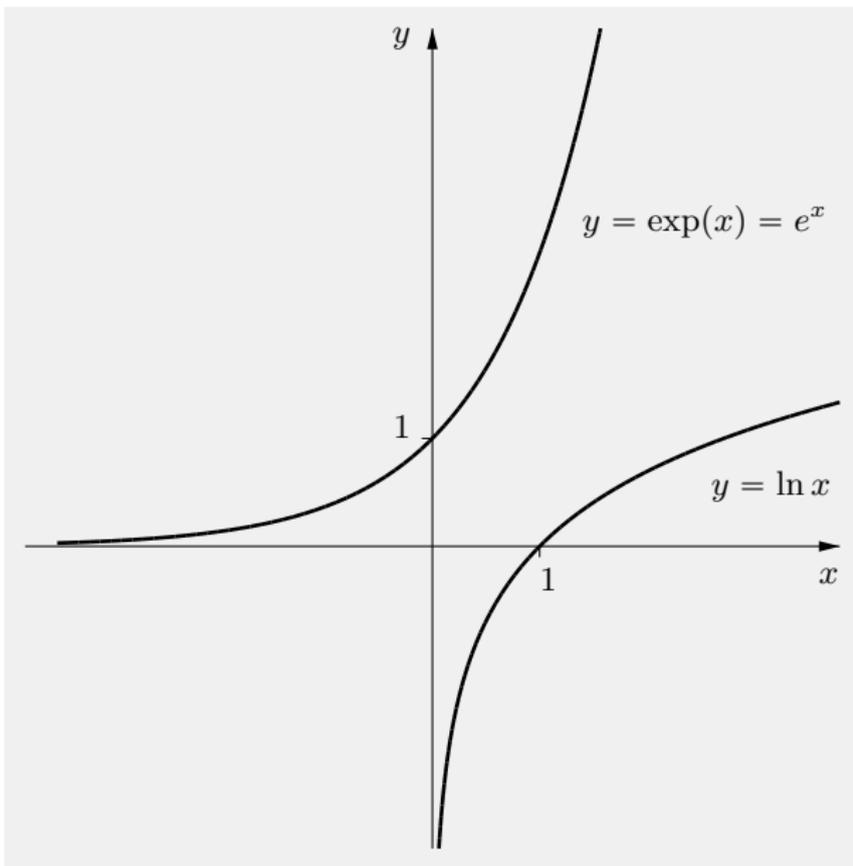
- Die Taylorreihe von $\ln x$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ ist

$$\ln x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n, \quad x \in (0, 2],$$

ihr Konvergenzradius ist $r = 1$. Mit dem Abelschen Grenzwertsatz 15.9 a) folgt die schöne Formel

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$$

für die Leibniz'sche Reihe.



Definition 15.14 (Allgemeine Potenz)

- Die ALLGEMEINE POTENZ ist definiert durch

$$a^b := \exp(b \ln a), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}$$

- Ist $f(x) > 0$, so definiert man $f(x)^{g(x)} := \exp(g(x) \ln f(x))$.

Weitere Beispiele:

- a) Für festes $a \in \mathbb{R}$ ist die allgemeine BINOMIAL-FUNKTION

$$f : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = (1+x)^a = e^{a \ln(1+x)}$$

definiert. Ihre Taylorreihe zum Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ lautet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n, \quad |x| < 1.$$

Hierbei wird der VERALLGEMEINERTE BINOMIALKOEFFIZIENT

$$\binom{a}{n} := \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}, \quad \binom{a}{0} := 1,$$

verwendet. Für $a \notin \mathbb{N}_0$ ist der Konvergenzradius der Reihe $r = 1$; für $a \in \mathbb{N}_0$ (also wenn f ein Polynom ist) ist der Konvergenzradius $r = \infty$.

b) Sinus und Cosinus haben die Potenzreihen

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

die wir schon in 13.17 als Taylorreihen gefunden haben. Der Konvergenzradius ist $r = \infty$. Mit Satz 15.9 liest man nochmals die Beziehungen $(\sin x)' = \cos x$ und $(\cos x)' = -\sin x$ ab.

Sinus und Cosinus können durch die Reihen auch auf ganz \mathbb{C} definiert werden. Es gilt die Eulersche Formel

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

und die Beziehungen

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) \quad \text{und} \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

- c) Der Arcus-Tangens $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ hat die Ableitung

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

also mit $\arctan 0 = 0$ und Satz 15.9 die Taylorentwicklung

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

- Kurvendiskussion: \arctan ist unendlich oft differenzierbar, ungerade, bijektiv, streng monoton wachsend in \mathbb{R} , konvex in $(-\infty, 0)$ und konkav in $(0, \infty)$. Die einzige Nullstelle ist bei $x_0 = 0$. Die Grenzwerte sind

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

- Mit dem Abelschen Grenzwertsatz 15.9 folgt für $x = 1$ die schöne Formel

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

Beachte: Die obige Taylorreihe stellt $f(x) = \arctan x$ **nur** im Intervall $(-1, 1)$ dar.

d) Die Hyperbelfunktionen haben die Potenzreihen

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit dem Konvergenzradius $r = \infty$. Mit Satz 15.9 liest man die Beziehungen $(\sinh x)' = \cosh x$ und $(\cosh x)' = \sinh x$ ab.

- Die Funktion $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist ungerade, streng monoton wachsend, also bijektiv. Sie ist konvex in $(0, \infty)$ und konkav in $(-\infty, 0)$. Ihre einzige Nullstelle ist $x_0 = 0$ und sie hat die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x = \infty.$$

- Die Funktion $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty)$ ist surjektiv und gerade. Sie ist streng monoton wachsend in $(0, \infty)$, streng monoton fallend in $(-\infty, 0)$ sowie konvex in \mathbb{R} . Ihr absolutes Minimum liegt bei $x_0 = 0$ und ist $\cosh 0 = 1$. Sie hat die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \cosh x = \lim_{x \rightarrow \infty} \cosh x = \infty.$$

- Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion 15.13 folgt

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

e) Die Area-Funktionen (Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen):

Die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

- Ihre Ableitung ist

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arsinh} x)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(\operatorname{arsinh} x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

- Die Potenzreihenentwicklung ist

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh} x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{n-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= x - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^7}{7} \pm \dots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

- arsinh ist ungerade, streng monoton wachsend in \mathbb{R} , konvex in $(-\infty, 0)$ und konkav in $(0, \infty)$. Man beachte

$$\begin{aligned} \operatorname{arsinh}(-x) &= \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x}\right) \\ &= -\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -\operatorname{arsinh}(x). \end{aligned}$$

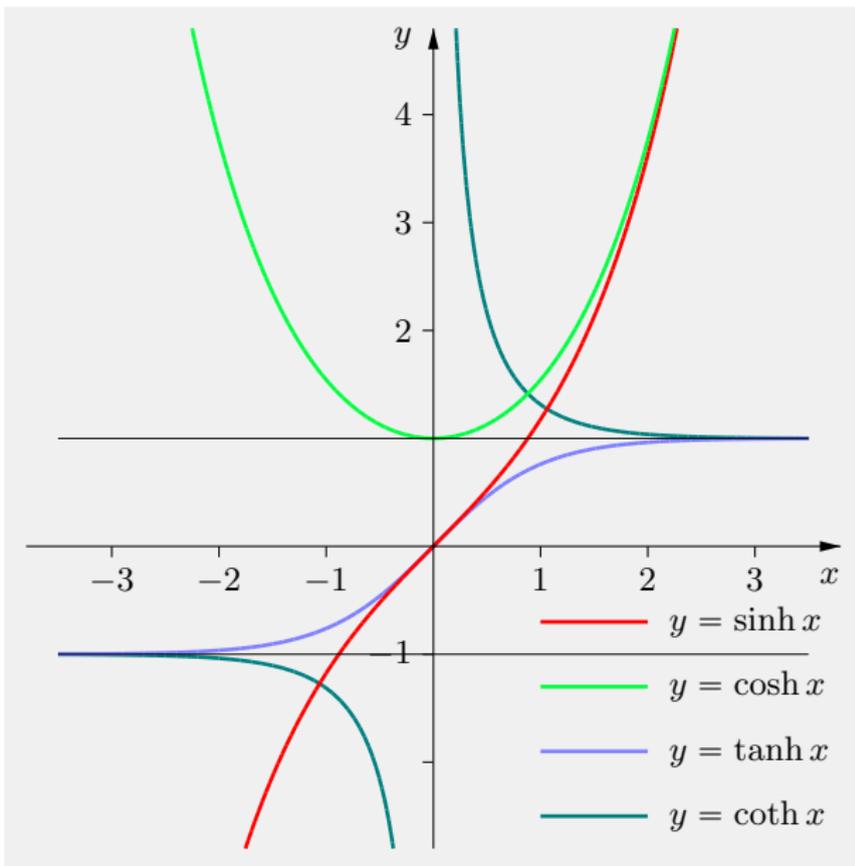
Die Umkehrfunktion von $\cosh : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ist

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad \operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

- Ihre Ableitung ist

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh} x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\operatorname{arcosh} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1.$$

- arcosh ist streng monoton wachsend und konkav in $(1, \infty)$.



Kapitel 16 – Integralrechnung

- 16.1 Definition des Integrals, Integrationsregeln
- 16.2 Integration rationaler Funktionen
- 16.3 Grenzwert des Integrals von Funktionenfolgen, -reihen
- 16.4 Uneigentliche Integrale, Cauchy-Hauptwert
- 16.5 Numerische Integration

Bedeutungen des Integrals:

1. Flächenberechnung zwischen $\text{Graph}(f)$ und der x -Achse: Ausgangspunkt ist die Flächenberechnung für Rechtecke (elementar-geometrisch)
2. Umkehrung der Differentiation: zu f wird eine "Stammfunktion" F bestimmt, für die $F' = f$ gilt.

Bemerkung: Beide Bedeutungen greifen ineinander, wenn es um die konkrete Berechnung von Integralen geht.

Definition 16.1 (Treppenfunktionen)

Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt TREPPENFUNKTION, wenn es reelle Zahlen $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ und reelle Zahlen c_1, \dots, c_n gibt mit

$$\varphi|_{(a_{k-1}, a_k)} = c_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

sowie $\varphi(x) = 0$ für $x < a_0$ und für $x > a_n$.

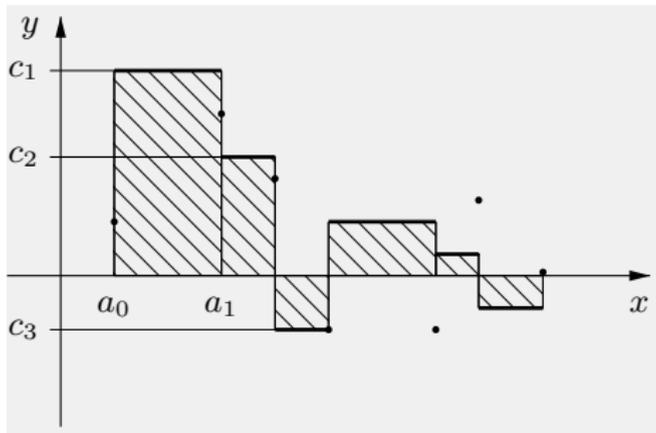
Die Werte $\varphi(a_k)$ spielen für die folgenden Betrachtungen keine Rolle.

Satz 16.2 (Treppenfunktionen als Vektorraum)

Die Menge aller Treppenfunktionen auf \mathbb{R} ist ein reeller Vektorraum.

Bemerkung: Zusammen mit φ ist auch $|\varphi|$ eine Treppenfunktion.

Das INTEGRAL einer Treppenfunktion wird definiert als die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke zwischen dem Graphen von φ und der x -Achse, wobei der Flächeninhalt eines Rechtecks unterhalb der x -Achse mit negativem Vorzeichen versehen wird.



Definition 16.3 (Integral von Treppenfunktionen)

Für eine Treppenfunktion $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\varphi \upharpoonright_{(a_{k-1}, a_k)} = c_k, \quad 1 \leq k \leq n,$$

sowie $\varphi(x) = 0$ für $x < a_0$ und für $x > a_n$ setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi = \int_{a_0}^{a_n} \varphi = \int_{a_0}^{a_n} \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k (a_k - a_{k-1}).$$

Für das Integral von Treppenfunktionen φ und ψ gelten einfache Rechenregeln, die wir später auf allgemeinere Funktionen übertragen werden:

Satz 16.4 (Rechenregeln)

$$\text{i) } \int_{\mathbb{R}} (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_{\mathbb{R}} \varphi + \beta \int_{\mathbb{R}} \psi, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

ii) Falls $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, so ist $\int_{\mathbb{R}} \varphi \geq 0$. Hieraus folgt

$$\varphi \leq \psi \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi \leq \int_{\mathbb{R}} \psi$$

und

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\varphi|.$$

Zur Erweiterung des Integrationsbegriffs auf eine größere Funktionenklasse benötigen wir einen “starken” Konvergenzbegriff für die Konvergenz einer Folge von Funktionen:

Erinnerung an 15.6: gleichmäßige Konvergenz

Gegeben sei ein Intervall I sowie eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diese Folge **KONVERGIERT GLEICHMÄSSIG AUF DEM TEILINTERVALL J** gegen eine Funktion $f : J \rightarrow \mathbb{R}$, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \text{für alle } n \geq n_0 \text{ **und alle** } x \in J.$$

Die Funktion f heißt der **GLEICHMÄSSIGE GRENZWERT** der Folge (f_n) auf J .

Das ELEMENTARE INTEGRAL wird für alle Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert, die der gleichmäßige Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen sind.

Definition 16.5 (Elementares Integral)

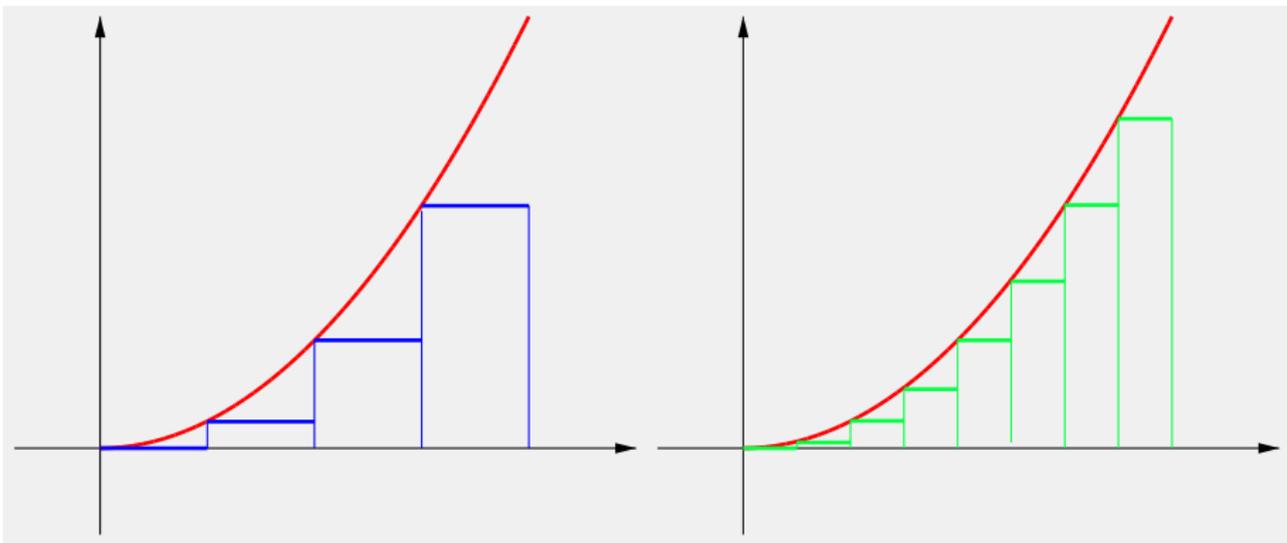
Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (ELEMENTAR) INTEGRIERBAR, wenn sie der gleichmäßige Grenzwert einer Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ist, die in $\mathbb{R} \setminus [a, b]$ konstant Null sind. Wir nennen dann

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) dx$$

das (BESTIMMTE) INTEGRAL von f über $[a, b]$. Weiter setzt man

$$\int_a^a f := 0, \quad \int_b^a f := - \int_a^b f$$

Bemerkung: Aus der Bedingung an f folgt, dass f beschränkt ist. Wir werden in Definition 16.23 den Integrationsbegriff auf unbeschränkte Funktionen und auch auf unbeschränkte Intervalle erweitern (uneigentliche Integrale).



- Aus der gleichmäßigen Konvergenz von $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgt die Konvergenz der Zahlenfolge $\left(\int_a^b \varphi_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ (Cauchy-Folge).
- Ist (ψ_n) eine weitere Folge von Treppenfunktionen, die ebenfalls gleichmäßig gegen f konvergiert, so ist

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n.$$

Wichtige Klassen integrierbarer Funktionen sind:

Satz 16.6 (Integrierbare Funktionen)

- *Jede stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist elementar integrierbar.*
- *Jede stückweise stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist elementar integrierbar.*

Stückweise Stetigkeit wird wie folgt definiert.

Definition 16.7 (Stückweise Stetigkeit)

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt STÜCKWEISE STETIG, wenn es Zahlen $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ gibt, so dass

- 1. f auf jedem Teilintervall (a_{k-1}, a_k) , $k = 1, \dots, n$, stetig ist*
- 2. die einseitigen Grenzwerte $f(a_k+)$ (für $k = 0, \dots, n-1$) sowie $f(a_k-)$ (für $k = 1, \dots, n$) existieren.*

Satz 16.8

- a) Die Menge der integrierbaren Funktionen ist ein reeller Vektorraum. Für integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

- b) Falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, so ist $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Hieraus folgt

$$f \leq g \implies \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \text{ und } \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

- c) Für jedes $a \leq c \leq b$ gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (\text{Aufteilen des Intervalls}).$$

Der Flächenbegriff erklärt anschaulich den folgenden Satz:

Satz 16.9 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a)f(\xi).$$

Geogebra Mittelwertsatz Integrale

Zur praktischen Durchführung der Integration braucht man den Begriff der Stammfunktion.

Definition 16.10 (Stammfunktion)

Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion.

Eine Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **STAMMFUNKTION** von f , wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt.

Frage: Wie viele Stammfunktionen gibt es?

Satz 16.11

Sei $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Dann ist auch $\tilde{F} := F + c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f .
- Alle Stammfunktionen von f sind von der Form $F + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Satz 16.12 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann wird durch $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{für } x \in [a, b]$$

eine Stammfunktion zu f definiert.

Der Hauptsatz kann zur Integralberechnung verwendet werden:

Satz 16.13 (Integration mittels Stammfunktion)

Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f , so gilt für alle $c, d \in [a, b]$

$$\int_c^d f(x) dx = F(d) - F(c).$$

Spezialfall: $\int_c^d f'(x) dx = f(d) - f(c).$

Geogebra Hauptsatz

Weitere Bezeichnungen zur Integration:

- Anstatt $F(b) - F(a)$ schreibt man auch

$$F(x) \Big|_a^b, \quad F(x) \Big|_{x=a}^{x=b} \quad \text{oder} \quad [F(x)]_a^b.$$

Beispiele:

$$\int_0^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^5 = \frac{125}{3} - \frac{0}{3} = \frac{125}{3},$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}.$$

- Ein Symbol für die Menge aller Stammfunktionen ist das “unbestimmte Integral”

$$\int f(x) dx$$

Der Hauptsatz liefert weitere Integrationsregeln:

Satz 16.14 (Partielle Integration)

Seien f und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Beweis: fg ist Stammfunktion von $fg' + f'g$ (Produktregel 13.7(a)).

Satz 16.15 (Substitutionsregel)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ sei stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t) dt = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x) dx.$$

Merkregel: Substituiere $x = h(t)$, also $\frac{dx}{dt} = h'(t)$

Zusatz: Falls außerdem $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ bijektiv (also streng monoton) ist, gilt

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} f(h(t))h'(t) dt.$$

Beweis: Ist $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f , so ist $F \circ h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $(f \circ h)h'$ (Kettenregel 13.7(b)).

Beachte:

- Ist h streng monoton wachsend, so gilt $h^{-1}(a) = \alpha$ und $h^{-1}(b) = \beta$.
- Ist h streng monoton fallend, so gilt $h^{-1}(a) = \beta$ und $h^{-1}(b) = \alpha$.

Satz 16.16 (Direkte Folgerungen)

Ist F eine Stammfunktion zu f , so folgt

$$\int f(x+d) dx = F(x+d) + c$$

$$\int f(d-x) dx = -F(d-x) + c$$

$$\int f(-x) dx = -F(-x) + c$$

$$\int f(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x) + c$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln |g(x)| + c$$

$$\int g(x)g'(x) dx = \frac{1}{2}(g(x))^2 + c$$

Bekannte Stammfunktionen auf $I \subset \mathbb{R}$ sind:

- a) $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c$ für $\alpha \neq -1$, wobei
- $I = \mathbb{R}$, falls $\alpha \in \mathbb{N}_0$ (oder $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{N}$ ungerade),
 - $I = (0, \infty)$ oder $I = (-\infty, 0)$, falls $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ ungerade,
 - $I = (0, \infty)$, sonst.

Für $I = (0, \infty)$ rechnet man mit der Kettenregel 13.7(b)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\alpha+1} e^{(\alpha+1) \ln x} \right) = \frac{1}{x} e^{(\alpha+1) \ln x} = x^\alpha.$$

Spezielles Beispiel: $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{3/2} + c.$

b) $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c, \quad x \in (0, \infty).$

Beachte für $x < 0$: $\frac{d}{dx} (\ln |x|) = \frac{d}{dx} (\ln(-x)) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$

c) $\int e^x dx = e^x + c$

$$\text{d)} \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\text{e)} \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\text{f)} \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int (1 + \tan^2 x) \, dx = \tan x + c$$

$$\text{g)} \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int (1 + \cot^2 x) \, dx = -\cot x + c$$

$$\text{h)} \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c = -\arccos x + \tilde{c} \quad \text{auf } I = [-1, 1].$$

$$\text{i)} \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

$$\text{j)} \int \cosh x \, dx = \sinh x + c$$

$$\text{k)} \int \sinh x \, dx = \cosh x + c$$

$$\text{l)} \int \frac{1}{\cosh^2 x} \, dx = \tanh x + c$$

$$\text{m)} \int \frac{1}{\sinh^2 x} \, dx = -\coth x + c$$

$$\text{n) } \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsinh} x + c$$

$$\text{o) } \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \begin{cases} \operatorname{arcosh} x + c, & \text{für } I = [1, \infty), \\ -\operatorname{arcosh}(-x) + c, & \text{für } I = (-\infty, -1] \end{cases}$$

p) Stammfunktion einer Potenzreihe vom Konvergenzradius $r > 0$:

$$\int \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} (x-x_0)^{k+1} + c, \quad I = (x_0 - r, x_0 + r).$$

Spezielles Beispiel: Auf $I = (-1, 1)$ gilt

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \int \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + c = \arctan x + c$$

q) "Logarithmisches Differenzieren":

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c \quad (f \text{ differenzierbar, } f > 0 \text{ oder } f < 0)$$

Spezielles Beispiel: $\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

Definition 16.17

Ist I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) = u(t) + iv(t)$ eine komplexwertige differenzierbare Funktion, so definiert man

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t)$$

Entsprechend ist das Integral einer stetigen komplexwertigen Funktion definiert durch

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t) dt$$

Weitere Stammfunktionen mit den Regeln der partiellen Integration oder Substitution:

$$\text{a) } \int x e^x dx = x e^x - e^x + c \quad (\text{partiell})$$

$$\text{b) } \int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - x + c \quad (\text{auf } I = (0, \infty)) \quad (\text{partiell})$$

$$\text{c) } \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + c \quad (\text{auf } I = (-1, 1)) \quad (\text{Subst. } t = 1-x^2)$$

$$\text{d) } \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + c \quad (\text{partiell})$$

$$\int \sin^2 x dx = \int (1 - \cos^2 x) dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + c$$

$$\text{e) } \int \arcsin x dx = \int 1 \cdot \arcsin x dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \quad (\text{auf } I = (-1, 1))$$

$$\text{f) } \int \arctan x dx = \int 1 \cdot \arctan x dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

$$\text{g) } \int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x) + c \quad (\text{auf } I = [-1, 1])$$

Integration rationaler Funktionen

Berechne $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$, wobei P und Q Polynome sind

4 Schritte:

1. eventuell Polynomdivision, falls $\text{Grad } P \geq \text{Grad } Q$
2. Faktorisierung von Q
3. Partialbruch-Zerlegung
4. Integration der einzelnen Summanden der Partialbruch-Zerlegung

Das Polynom

$$Q(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

habe reelle Koeffizienten $\alpha_k \in \mathbb{R}$ für $k = 0, 1, \dots, n$ mit $\alpha_n \neq 0$. Wir nennen Q ein **reelles Polynom vom Grad n** .

Satz 16.18 (Nullstellen reeller Polynome)

- (i) *Das quadratische Polynom $x^2 + cx + d$ mit $c, d \in \mathbb{R}$ hat **keine** reelle Nullstelle $\iff c^2 - 4d < 0$.*
- (ii) *$a \in \mathbb{R}$ ist Nullstelle des Polynoms Q $\iff Q(x) = (x - a)\tilde{Q}(x)$ mit einem Polynom \tilde{Q} vom Grad $n - 1$.*
- (iii) *$z_0 = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (also $b \neq 0$) ist Nullstelle des Polynoms Q $\implies \bar{z}_0 = a - bi$ ist ebenfalls Nullstelle des Polynoms Q $\implies Q(x) = (x^2 - 2ax + a^2 + b^2)\tilde{Q}(x)$ mit einem Polynom \tilde{Q} vom Grad $n - 2$, wobei das quadratische Polynom $(x^2 - 2ax + a^2 + b^2)$ keine reelle Nullstelle hat.*

Satz 16.19 (Faktorisierung reeller Polynome)

Ein reelles Polynom Q vom Grad n besitzt die Darstellung

$$Q(x) = \alpha_n (x - a_1)^{n_1} \cdots (x - a_r)^{n_r} (x^2 + c_1x + d_1)^{m_1} \cdots (x^2 + c_sx + d_s)^{m_s}$$

mit $a_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$ und $n_k, m_k \in \mathbb{N}$, wobei die quadratischen Faktoren

$$(x^2 + c_kx + d_k)$$

keine reellen Nullstellen besitzen, also $c_k^2 - 4d_k < 0$ gilt.

Bemerkung: Hierbei können die Fälle $r = 0$ oder $s = 0$ auftreten. Es gilt

$$n_1 + \cdots + n_r + 2(m_1 + \cdots + m_s) = n.$$

Satz 16.20 (Partialbruchzerlegung)

Jede rationale Funktion $\frac{P(x)}{Q(x)}$ aus reellen Polynomen P und Q lässt sich darstellen in der Form $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$ mit $\text{Grad } P_2 < \text{Grad } Q$ und

$$\begin{aligned} \frac{P_2(x)}{Q(x)} = & \frac{A_{11}}{x - a_1} + \frac{A_{12}}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x - a_1)^{n_1}} + \dots \\ & + \frac{A_{r1}}{x - a_r} + \frac{A_{r2}}{(x - a_r)^2} + \dots + \frac{A_{rn_r}}{(x - a_r)^{n_r}} + \\ & \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + c_1x + d_1} + \dots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{(x^2 + c_1x + d_1)^{m_1}} + \dots \\ & + \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2 + c_sx + d_s} + \dots + \frac{B_{sm_s}x + C_{sm_s}}{(x^2 + c_sx + d_s)^{m_s}} \end{aligned}$$

- Polynomdivision, falls $\text{Grad } P \geq \text{Grad } Q$, ergibt das Polynom P_1
- vollständige Faktorisierung des Nennerpolynoms Q
- **richtiger Ansatz** für $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ als Summe von einfachen Brüchen wie in Satz 16.20
- Multiplikation beider Seiten mit $Q(x)$ ergibt

$$P_2(x) = A_{11} \frac{Q(x)}{x - a_1} + \dots + A_{1n_1} \frac{Q(x)}{(x - a_1)^{n_1}} + \dots$$

wobei alle “Brüche” sich kürzen lassen. Auf beiden Seiten stehen also Polynome. Die Koeffizienten $A_{k\ell}$ usw. werden berechnet durch:

- die Einsetzmethode für die reellen Nullstellen: Durch Einsetzen von $x = a_1$, $x = a_2$ usw. erhält man jeweils den Koeffizienten A_{1n_1} , A_{2n_2} usw. zur höchsten Potenz des Linearfaktors.
- Nach Subtraktion der entsprechenden Terme von $P_2(x)$ kann auf beiden Seiten durch $(x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_r)$ **ohne Rest** dividiert werden (auf der linken Seite: nacheinander mit dem Horner Schema). Erneutes Einsetzen der mehrfachen Nullstellen a_i liefert dann $A_{i, n_i - 1}$ usw.

- Die restlichen Koeffizienten $C_{k\ell}$ und $D_{k,\ell}$ werden nun mit dem Koeffizientenvergleich bestimmt (Sortieren nach Potenzen von x , Aufstellen des linearen Gleichungssystems)

- $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C$ für $x \neq a$
- $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C$ für $n > 1, x \neq a$
- $\int \frac{2x+c}{x^2+cx+d} dx = \ln(x^2+cx+d) + C$ mit $c^2 - 4d < 0$
- $\int \frac{(2x+c)}{(x^2+cx+d)^n} dx = -\frac{1}{(n-1)(x^2+cx+d)^{n-1}} + C$ für $n > 1$
- $\int \frac{1}{x^2+cx+d} dx = \frac{2}{\sqrt{4d-c^2}} \arctan\left(\frac{2x+c}{\sqrt{4d-c^2}}\right) + C$
- Rekursive Berechnungsformel für $n \geq 2$:

$$\int \frac{1}{(x^2+cx+d)^n} dx = \frac{1}{(n-1)(4d-c^2)} \left[\frac{2x+c}{(x^2+cx+d)^{n-1}} + (4n-6) \int \frac{dx}{(x^2+cx+d)^{n-1}} \right]$$

Integration von Funktionenfolgen

Für Potenzreihen haben wir schon angegeben, dass man eine Stammfunktion durch die gliedweise Integration erhält:

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} [(b - x_0)^{k+1} - (a - x_0)^{k+1}].$$

Hier behandeln wir die allgemeine Frage, ob die reelle Zahlenfolge der Integralwerte

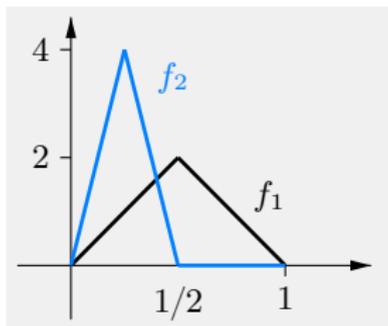
$$\int_a^b f_n(x) dx, \quad f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ integrierbar,}$$

in irgendeiner Weise konvergiert, wenn die Folge der Funktionen f_n konvergiert. Kurz: Können wir den Grenzwert "unter das Integral ziehen"?

Wir zeigen, dass die punktweise Konvergenz der Folge (f_n) nicht reicht.

Der Graph der stetigen Funktion $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2 x & \text{für } 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ 4n^2 \left(\frac{1}{n} - x\right) & \text{für } \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



bildet mit der x -Achse ein Dreieck mit der Grundseite $[0, \frac{1}{n}]$ auf der x -Achse und der Höhe $2n$, also gilt

$$\int_0^1 f_n(x) dx = 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Für jedes $x \in [0, 1]$ gilt jedoch $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) = 0$.

Die konstante Nullfunktion ist der Grenzwert von f , aber

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx = 0.$$

Die gleichmäßige Konvergenz reicht aus.

Satz 16.21 (Gleichmäßige Konvergenz und Integration)

Die Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, seien stetig. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dann ist auch f stetig und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Satz 16.22 (Gleichmäßige Beschränktheit und punktweise Konvergenz)

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt GLEICHMÄSSIG BESCHRÄNKT, wenn eine Konstante $K > 0$ existiert mit

$$|f_n(x)| \leq K \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in [a, b].$$

Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei gleichmäßig beschränkt und konvergiere punktweise gegen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Falls alle f_n und f integrierbar sind, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Uneigentliche Integrale

Erweiterung der Integration auf

- unbeschränkte Integrationsbereiche (z.B. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf \mathbb{R})
- unbeschränkte Funktionen (z.B. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$)

Definition 16.23 (Uneigentliches Integral)

- a) Gegeben sei die Funktion $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn für jedes $r > a$ die Funktion $f|_{[a,r]}$ integrierbar ist und

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx = D$$

existiert und endlich ist, so nennen wir

$$D = \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_a^r f(x) dx$$

das **UNEIGENTLICHE INTEGRAL** von f über $[a, \infty)$.

b) Ebenso wird für $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^b f(x) dx$$

definiert, falls der Grenzwert existiert.

c) Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und beliebiges $a \in \mathbb{R}$ wird

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx$$

definiert, falls **beide** uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren.

Definition 16.24

- a) Gegeben sei die Funktion $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn für jedes $c \in (a, b]$ die Funktion $f|_{[c, b]}$ integrierbar ist und

$$\lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx = D$$

existiert und endlich ist, so nennen wir

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx$$

das **UNEIGENTLICHE INTEGRAL von f über $(a, b]$** .

- b) Ebenso wird für $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx$$

definiert, falls der Grenzwert existiert.

c) Weitere Typen von uneigentlichen Integralen: Für $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ wird

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{mit beliebigem } c \in (a, b)$$

definiert, falls **beide** uneigentlichen Integrale auf der rechten Seite existieren. Hier kann auch $a = -\infty$ oder $b = \infty$ sein.

Es gibt KRITERIEN für die Existenz uneigentlicher Integrale, ohne dass der Grenzwert berechnet werden muss:

Satz 16.25 (Majorantenkriterium)

Gegeben sei die Funktion $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Für jedes $r > a$ sei $f|_{[a,r]}$ integrierbar. Wenn es ein $c \geq a$ und eine Funktion $g : [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

- $|f(x)| \leq g(x)$ für alle $x \geq c$,
- $\int_c^\infty g(x) dx$ existiert,

so existiert auch das uneigentliche Integral $\int_c^\infty f(x) dx$ und es gilt

$$\left| \int_c^\infty f(x) dx \right| \leq \int_c^\infty |f(x)| dx \leq \int_c^\infty g(x) dx.$$

Entsprechende Aussagen gelten für die weiteren Typen uneigentlicher Integrale.

Für die Nicht-Existenz des uneigentlichen Integrals kann man das folgende Kriterium verwenden.

Satz 16.26 (Minorantenkriterium)

Gegeben sei die Funktion $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Für jedes $r > a$ sei $f|_{[a,r]}$ integrierbar. Wenn es ein $c \geq a$ und eine Funktion $g : [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

- $f(x) \geq g(x) \geq 0$ für alle $x \geq c$,
- $\int_c^\infty g(x) dx$ existiert **nicht**,

so existiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x) dx$ **nicht**.

Entsprechende Aussagen gelten für die weiteren Typen uneigentlicher Integrale.

Als Anwendung finden wir ein neues Konvergenzkriterium für Reihen:

Satz 16.27 (Integalkriterium für Reihen)

Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit monoton fallenden $a_k \geq a_{k+1} \geq 0$.

Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ sei eine (stückweise) stetige und monoton fallende Funktion $f : [n_0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(k) = a_k$ für alle $k \geq n_0$ gegeben. Dann gilt:

- (i) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert **genau dann, wenn** das uneigentliche Integral

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x) dx$$

existiert.

- (ii) Im Falle der Konvergenz gelten die Abschätzungen

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k \leq \int_{n_0}^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$$

16.28 (Beispiele)

- Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert
- Allgemeiner: die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ mit $\alpha > 1$ konvergiert.
- Die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert.

Man stellt sogar genauer fest, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) =: C$$

existiert und den Wert $C = 0.577216\dots$ (EULER-MASCHERONISCHE KONSTANTE) hat.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ divergiert für $\alpha < 1$.

Ein weiterer Grenzwert für Integrale bezieht sich auf die Bildung von "Mittelwerten"

Definition 16.29 (Cauchy-Hauptwert)

a) Für eine Funktion $f : [-a, a] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$CH \int_{-a}^a f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-a}^{-\epsilon} f(x) dx + \int_{\epsilon}^a f(x) dx \right)$$

der CAUCHY-HAUPTWERT des Integrals von f , falls dieser Grenzwert existiert.

b) Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$CH \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\int_{-r}^0 f(x) dx + \int_0^r f(x) dx \right)$$

der CAUCHY-HAUPTWERT des Integrals von f , falls dieser Grenzwert existiert.

Bemerkung: Falls das uneigentliche Integral von f existiert, so ist der Cauchy-Hauptwert gleich dem uneigentlichen Integral.

Aber: Der Cauchy-Hauptwert kann existieren, wenn das uneigentliche Integral nicht existiert:

$$\text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx = 0.$$

(denn: die Funktion ist ungerade.)

Numerische Integration

Ziel: Näherungswerte für bestimmte Integrale, wenn sich keine geschlossene Form der Stammfunktion finden lässt.

Beispiele:

- Die Stammfunktion $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ benötigt man in der Wahrscheinlichkeitstheorie, um Werte der NORMALVERTEILUNG zu berechnen.
- Der INTEGRALSINUS $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ spielt eine Rolle in der Signalverarbeitung
- Integral-Exponentialfunktion $\int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ und Integral-Logarithmus $\int_0^x \frac{dt}{\ln t}$

Möglichkeiten zur **numerischen** Berechnung von Näherungswerten:

- Potenzreihe der Stammfunktion bilden und die Partialsummen an den Integrationsgrenzen auswerten
- Hier: Formeln für Näherungsflächen verwenden (z.B. Trapezregel, Keplersche Fass-Regel)

Die allgemeine Form der Näherungsformel:

Definition 16.30 (Quadraturformel)

Eine Näherung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x) dx$ wird durch die
QUADRATURFORMEL

$$I_n(f; [a, b]) = \sum_{i=0}^n \omega_i f(x_i)$$

angegeben, wobei

- $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ die KNOTEN (meistens in $[a, b]$ gewählt) und
- $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n \in \mathbb{R}$ die GEWICHTE

bezeichnen.

Für $\int_a^b f(x) dx$ verwendete Quadraturformeln

a) $(b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right)$

MITTELPUNKTSREGEL

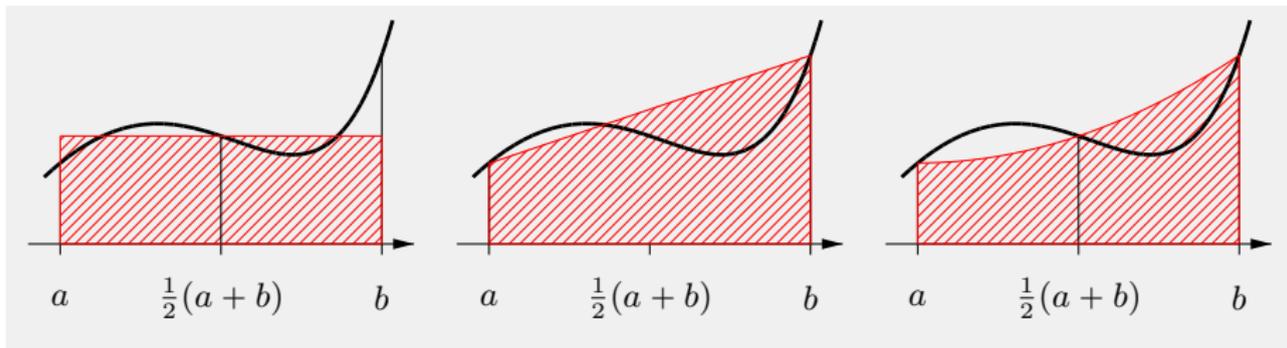
b) $\frac{b - a}{2} (f(a) + f(b))$

TRAPEZREGEL

c) $\frac{b - a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right)$

SIMPSONREGEL

auch als Keplersche Fass-Regel bezeichnet.



Durch Aufteilen des Intervalls $[a, b]$ in N Teile $[a_{k-1}, a_k]$ mit

$$a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

und verwenden der Mittelpunkte $y_k = \frac{a_{k-1} + a_k}{2}$, also

$$a = a_0 < y_1 < a_1 < y_2 < \dots < a_{N-1} < y_N < a_N = b$$

erhält man die “summierten” Regeln:

a') SUMMIERTE MITTELPUNKTSREGEL

$$\frac{b-a}{N} (f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_N))$$

b') SUMMIERTE TRAPEZREGEL

$$\frac{b-a}{2N} (f(a) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \dots + 2f(a_{N-1}) + f(b))$$

c') SUMMIERTE SIMPSONREGEL

$$\frac{b-a}{6N} (f(a) + 4f(y_1) + 2f(a_1) + 4f(y_2) + \dots + 2f(a_{N-1}) + 4f(y_N) + f(b))$$

Systematik zur Definition der “einfachen” Regeln:

Gesucht sei das Integral $\int_a^b f(x) dx$.

Definition 16.31 (Newton-Cotes Formeln)

Für gegebenes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir

- die Knoten $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$,

- die Gewichte $\omega_k = \int_a^b L_k(x) dx$, wobei $L_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$ das

LAGRANGE-GRUNDPOLYNOM bezeichnet.

Beachte: Für jedes Polynom p vom Grad $\leq n$ gilt

$$p(x) = \sum_{k=0}^n p(x_k) L_k(x)$$

Also liefert die Newton-Cotes Formel mit $n + 1$ Knoten

$$\sum_{k=0}^n \omega_k p(x_k) = \int_a^b p(x) dx$$

sogar den **exakten** Wert des bestimmten Integrals. Deshalb nennt man n auch den **Exaktheitsgrad** der Newton-Cotes-Formel.

Beispiele: Die Newton-Cotes Formeln mit

- $n = 1$: Trapezregel
- $n = 2$: Simpsonregel
- $n = 3$: $\frac{3}{8}$ -Regel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{8} \left(f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b) \right)$$

Ein einfacher Weg zur Berechnung der Gewichte:

Die EXAKTHEITSFORDERUNGEN

$$\begin{aligned} \int_a^b 1 \, dx &= \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n \\ \int_a^b (x - a) \, dx &= \omega_0(x_0 - a) + \omega_1(x_1 - a) + \cdots + \omega_n(x_n - a) \\ &\vdots \\ \int_a^b (x - a)^n \, dx &= \omega_0(x_0 - a)^n + \omega_1(x_1 - a)^n + \cdots + \omega_n(x_n - a)^n \end{aligned}$$

ergeben ein LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM mit den Unbekannten $\omega_0, \dots, \omega_n$, das für vorgegebene Knoten

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$$

eindeutig lösbar ist.

Definition 16.32 (Offene Newton-Cotes-Formeln)

Als Variante verwendet man auch die offenen Newton-Cotes Formeln, bei denen die Randpunkte des Intervalls keine Knoten sind:

- Knoten $x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n+1}$, $k = 1, 2, \dots, n$,
- Gewichte zum Exaktheitsgrad $n - 1$

Als Beispiel für $n = 1$ ergibt sich die Mittelpunktsregel.

Die Exaktheit für Polynome vom Grad $\leq n$ führt zur Darstellung des *Fehlers* der Quadraturformel (vgl. auch 14.9)

Satz 16.33 (Quadraturfehler)

Für eine $(n + 1)$ -mal differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gelten die folgenden Aussagen:

a) $n = 1$, MITTELPUNKTSREGEL:

$$\int_a^b f(x) dx - (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right) = \frac{(b - a)^3}{24} f''(\xi)$$

b) $n = 1$, TRAPEZREGEL:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b - a}{2} (f(a) + f(b)) = \frac{(b - a)^3}{12} f''(\xi)$$

c) $n = 3$, SIMPSONREGEL:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b - a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b) \right) = \frac{(b - a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

Hierbei ist n jeweils der Exaktheitsgrad der Quadraturformel.

Satz 16.34 (Summierte Quadraturformeln)

Für die summierten Quadraturformeln (Aufteilung von $[a, b]$ in N Teilintervalle der Länge $h = (b - a)/N$) verwenden wir die Bezeichnungen in ???. Es gelten die folgenden Aussagen:

a') SUMMIERTE MITTELPUNKTSREGEL:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{N} (f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_N)) = \frac{(b-a)h^2}{24} f''(\xi)$$

b') SUMMIERTE TRAPEZREGEL:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{2N} (f(a) + 2f(a_1) + 2f(a_2) + \cdots + 2f(a_{N-1}) + f(b)) = \frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi)$$

c') SUMMIERTE SIMPSONREGEL:

$$\int_a^b f(x) dx - \frac{b-a}{6N} \left(f(a) + 4f(y_1) + 2f(a_1) + 4f(y_2) + \cdots + 2f(a_{N-1}) + 4f(y_N) + f(b) \right) = \frac{(b-a)h^4}{2880} f^{(4)}(\xi)$$

Zur Berechnung von $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 = 0.693147\dots$ verwenden wir die Mittelpunkts-, Trapez- und Simpsonregel sowie die summierten Regeln mit $N = 2$ und $N = 4$ Teilintervallen:

N	1	2	4
Trapezregel	0.75	0.70833 $\bar{3}$	0.697024
Mittelpunktsregel	0.6 $\bar{6}$	0.685714	0.691220
Simpsonregel	0.694 $\bar{4}$	0.693254	0.693154

Die Simpsonregel mit $N = 4$ Teilintervallen liefert schon 4 Nachkommastellen. Sie erfordert die Auswertung des Integranden an 9 Stellen.

Frage: Können noch bessere Annäherungen erzielt werden, indem auch die Knoten x_0, \dots, x_n geschickter gewählt werden?

Als positive Antwort werden die Gauß-Formeln entwickelt. Dazu wählen wir die Knoten x_k **und** die Gewichte ω_k , $0 \leq k \leq n$, so, dass der größtmögliche Exaktheitsgrad $2n + 1$ erzielt wird.

Idee: Ungerade Funktionen haben das Integral Null über dem symmetrischen Intervall $[-1, 1]$. Wählt man nun die Knoten und Gewichte symmetrisch, also $x_k = -x_{n-k}$ und $\omega_k = \omega_{n-k}$, dann ergibt die Quadraturformel bei ungeraden Funktionen stets Null. Man versucht nun die Knoten und Gewichte so zu platzieren, dass die Formel für die $n + 1$ Funktionen $x^0 = 1, x^2, \dots, x^{2n}$ exakt ist. Da auch x^{2n+1} exakt integriert wird, ist der Exaktheitsgrad insgesamt $2n + 1$.

Beachte: Die Exaktheitsbedingungen zum Grad $2n + 1$ ergeben $2n + 2$ **nichtlineare** Gleichungen mit den $2n + 2$ Unbekannten x_0, \dots, x_n und $\omega_0, \dots, \omega_n$.

Beispiel:

Die zwei-punktige Gauß-Formel wird für das Intervall $[-1, 1]$ berechnet

Die Exaktheitsbedingungen lauten mit $\omega_0 = \omega_1$ und $x_1 = -x_0$

$$\int_{-1}^1 1 \, dx = 2 = \omega_0 + \omega_1$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \, dx = \frac{2}{3} = \omega_0 x_0^2 + \omega_1 x_1^2$$

Die *eindeutige* Lösung ist

$$x_0 = -\sqrt{3}/3, \quad x_1 = \sqrt{3}/3, \quad \omega_0 = \omega_1 = 1,$$

also erhalten wir die Gauß-Quadraturformel

$$\int_{-1}^1 f(x) \, dx \approx \omega_0 f(x_0) + \omega_1 f(x_1) = f\left(-\sqrt{3}/3\right) + f\left(\sqrt{3}/3\right).$$

Satz 16.35 (Eindeutigkeit der Gauß-Formeln)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren eindeutig bestimmte Knoten

$$-1 < x_0 < x_1 < \cdots < x_n < 1$$

und Gewichte $\omega_k > 0$ mit $\omega_k = \omega_{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, so dass die Quadraturformel

$$I_n(f; [-1, 1]) = \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k)$$

den Exaktheitsgrad $2n + 1$ hat.

Es gelten die Symmetrie-Eigenschaften

$$x_k = -x_{n-k}, \quad \omega_k = \omega_{n-k}$$

für $k = 0, 1, \dots, n$. Die Gewichte ω_k sind alle positiv!

Beweis der Existenz etwas später, kein Beweis der Eindeutigkeit.

Definition 16.36 (Legendre-Polynome)

Die Legendre-Polynome $(L_n)_{n \geq 0}$ sind definiert durch

$$L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right)$$

Eigenschaften:

- L_n ist ein Polynom genau n -ten Grades mit n verschiedenen Nullstellen im Intervall $[-1, 1]$.
- Mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ gilt für $n \neq m$:
 $\langle L_n, L_m \rangle = 0$
- Die Legendre-Polynome lassen sich (bis auf Faktoren) auch mit dem Gram-Schmidt-Verfahren aus den Monomen gewinnen.
- Die ersten drei Legendre-Polynome sind

$$L_0(x) = 1 \qquad L_1(x) = x \qquad L_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

- L_0 bis L_n sind eine Basis des Raums der Polynome höchstens n -ten Grades.

- Die Gauß-Formel I_n mit $n + 1$ Punkten erfüllt die Fehlerformel

$$\int_{-1}^1 f(x) dx - I_n(f) = \frac{2^{2n+3}((n+1)!)^4}{[(2n+2)!]^3(2n+3)} f^{(2n+2)}(\xi), \quad \text{mit } \xi \in [-1, 1]$$

- Die Gauß-Formel für $\int_a^b f(x) dx$ erhält man durch Variablentransformation:

$$x \in [-1, 1] \iff t(x) = a + \frac{b-a}{2}(1+x) \in [a, b]$$

ergibt die Knoten

$$t_k = a + \frac{b-a}{2}(1+x_k) \quad (x_k \text{ Knoten in } [-1, 1])$$

und die Gewichte

$$\eta_k = \frac{b-a}{2} \omega_k.$$

- Eine weitere Erhöhung der Genauigkeit erzielt man durch Aufteilen des Intervalls in Teilintervalle (SUMMIERTE GAUSS-FORMELN)

Beispiel:

Für $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2 = 0.693147\dots$ verwenden wir die auf das Interall $[1, 2]$ transformierten Gauß-Formeln mit 2 bzw. 3 Knoten und die der summierten Gauß-Formeln mit 2 Teilintervallen. Zum Vergleich geben wir jeweils die Werte der Simpson-Regel an.

N	1	2
Simpsonregel	0.6944̄	0.693254
2-punkt. Gauß-Formel	0.692308	0.693077
3-punkt. Gauß-Formel	0.693122	0.693146

Kapitel 17 – Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

17 : Differentialrechnung von Funktionen mehrerer Variablen

Die Elemente des Vektorraums \mathbb{R}^n fassen wir als Spaltenvektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ auf. Wir schreiben aber (wegen der Übersichtlichkeit) auch $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Wir betrachten nun (skalare) Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit Definitionsbereich $M \subset \mathbb{R}^n$, z.B.

- $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$, Definitionsbereich $M = \mathbb{R}^2$
- $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, Definitionsbereich $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
- $h(x, y) = x \ln y$, Definitionsbereich $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}$

Weiterhin betrachten wir auch vektorwertige Funktionen $\vec{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Definitionsbereich $M \subset \mathbb{R}^n$, z.B.

- $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ xye^x \\ xy \end{pmatrix}$, Definitionsbereich $M = \mathbb{R}^2$, Wertebereich \mathbb{R}^3

Im Fall $n = m$ nennt man diese Funktionen VEKTORFELDER.

Speziell: Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^2$ lassen sich veranschaulichen

- durch Zeichnen des Graphen von f

$$\text{Graph}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in M\},$$

der eine Fläche im \mathbb{R}^3 darstellt. Der Funktionswert $z = f(x, y)$ gibt die “Höhe” über dem Punkt $(x, y) \in M$ an.

- durch Einzeichnen einiger HÖHENLINIEN

$$M_c = \{(x, y) \in M; f(x, y) = c\}$$

in den Definitionsbereich $M \subseteq \mathbb{R}^2$, wie etwa bei Wanderkarten.

Geogebra Plotter

Definition 17.1 (Topologische Grundbegriffe im \mathbb{R}^n)

- Der ABSTAND zwischen zwei Punkten $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$|\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

- Für $\epsilon > 0$ ist die ϵ -UMGEBUNG des Punktes $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ die Kugel vom Radius ϵ mit Mittelpunkt \vec{a} , also $U_\epsilon(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n; |\vec{x} - \vec{a}| < \epsilon\}$
- Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt OFFENE Teilmenge von \mathbb{R}^n , wenn zu jedem $\vec{x} \in M$ ein $\epsilon > 0$ existiert mit $U_\epsilon(\vec{x}) \subseteq M$.
- Gegeben sei eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ heißt RANDPUNKT von M , wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt

$$M \cap U_\epsilon(\vec{a}) \neq \emptyset \quad \text{und} \quad (\mathbb{R}^n \setminus M) \cap U_\epsilon(\vec{a}) \neq \emptyset.$$

(jede ϵ -Umgebung von \vec{a} enthält sowohl Punkte von M als auch Punkte des Komplements von M .)

- ∂M ist die Menge aller Randpunkte von M , kurz "RAND von M ".

- Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **ABGESCHLOSSEN**, wenn sie alle Randpunkte enthält, also wenn $\partial M \subseteq M$ gilt. ∂M ist stets abgeschlossen.
- Für $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\overline{M} = M \cup \partial M$ die **ABGESCHLOSSENE HÜLLE** von M .
- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **BESCHRÄNKT**, wenn es eine Zahl $r > 0$ gibt, so dass $M \subseteq U_r(\vec{0})$ gilt, also

$$|\vec{x}| < r \quad \text{für alle } \vec{x} \in M.$$

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **KOMPAKT**, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.
- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **KONVEX**, wenn zu je zwei Punkten $\vec{a}, \vec{b} \in M$ die Verbindungsstrecke $\{t\vec{a} + (1-t)\vec{b}; 0 \leq t \leq 1\}$ in M liegt.
- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **STERNFÖRMIG**, wenn es einen Punkt $\vec{a} \in M$ gibt, so dass die Verbindungsstrecke zu jedem weiteren Punkt $\vec{b} \in M$ in M liegt.

Achtung: Jede konvexe Menge ist sternförmig, aber nicht umgekehrt.

Häufig verwendete Teilmengen von \mathbb{R}^n sind

- OFFENE INTERVALLE: zu $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$]\vec{a}, \vec{b}[= \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i \text{ für } i = 1, \dots, n \}$$

- ABGESCHLOSSENE INTERVALLE: zu $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid a_i \leq x_i \leq b_i \text{ für } i = 1, \dots, n \}$$

- OFFENE KUGELN: zu $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist

$$U_r(\vec{a}) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| < r \}$$

- ABGESCHLOSSENE KUGELN: zu $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ ist

$$\overline{U_r(\vec{a})} = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x} - \vec{a}| \leq r \}$$

Alle diese Mengen sind beschränkt und konvex.

Definition 17.2 (Folgen im \mathbb{R}^n)

- Eine Folge $(\vec{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit Gliedern $\vec{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ heißt eine PUNKTFOLGE.
- Die Punktfolge $(\vec{x}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ KONVERGIERT gegen $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}| < \epsilon \quad \text{für alle } k \geq k_0$$

gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn für jede KOMONENTENFOLGE $(x_j^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ mit festem $1 \leq j \leq n$ die Konvergenz

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_j^{(k)} = a_j$$

vorliegt.

Definition 17.3 (Grenzwert von Funktionen)

Die Funktion $\vec{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $\vec{a} \in \overline{M}$ seien gegeben. Der Punkt $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ heißt der **GRENZWERT** von \vec{f} in \vec{a} , geschrieben

$$\vec{b} = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}),$$

wenn für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}| < \epsilon \quad \text{für alle } \vec{x} \in M \setminus \{\vec{a}\} \quad \text{mit } |\vec{x} - \vec{a}| < \delta.$$

Bemerkung: Der Grenzwert $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ existiert genau dann, wenn die Komponentenfunktionen $f_j : M \rightarrow \mathbb{R}$ den Grenzwert $b_j \in \mathbb{R}$ haben.

Definition 17.4 (Stetigkeit von Funktionen mehrerer Variablen)

Die Funktion $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $\vec{a} \in M$ seien gegeben. Die Funktion \vec{f} heißt STETIG IM PUNKT \vec{a} , wenn gilt

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{a}).$$

$\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ heißt STETIG, wenn \vec{f} in jedem Punkt $\vec{a} \in M$ stetig ist.

Satz 17.5 (Regeln zur Stetigkeit)

- Für stetige Funktionen $\vec{f}, \vec{g}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sind auch $\vec{f} + \vec{g}$, $\vec{f} - \vec{g}$, $\alpha \vec{f}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig.
- Für stetige Funktionen $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}$ ist auch fg stetig. Weiterhin ist $\frac{f}{g}$ auf dem Definitionsbereich $M \setminus \{\vec{x} \in M; g(\vec{x}) = 0\}$ stetig.
- Die Hintereinanderausführung stetiger Funktionen ist stetig: Für $\vec{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ (mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$) und $\vec{g}: V \rightarrow \mathbb{R}^p$ (mit $V \subseteq \mathbb{R}^m$) gelte $\vec{f}(U) \subseteq V$. Falls \vec{f} stetig in $\vec{a} \in U$ sowie \vec{g} stetig in $\vec{f}(\vec{a}) \in V$ ist, so ist $\vec{g} \circ \vec{f}: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ stetig in \vec{a} .

Wichtige Aussage zur Bestimmung von Extremwerten:

Satz 17.6 (Satz vom Maximum (Satz von Weierstraß))

- Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und $M \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränkt und abgeschlossen (also kompakt). Dann nimmt f auf M sein Maximum und sein Minimum an: Es existieren Punkte $\vec{a}, \vec{b} \in M$ mit

$$f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{b}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in M.$$

- Wichtiges Kriterium zur Abgeschlossenheit:

Ist $\vec{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $U \subset \mathbb{R}^m$ offen (abgeschlossen), dann ist $\vec{f}^{-1}(U)$ offen(abgeschlossen).

Begriffe der Differentialrechnung

Definition 17.7 (Partielle Ableitungen)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\vec{a} \in M$.

- f ist im Punkt \vec{a} PARTIELL NACH x_i DIFFERENZIERBAR, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})) =: \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$$

existiert. Hierbei ist \vec{e}_i der i -te kartesische Einheitsvektor. Man nennt $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ die i -te partielle Ableitung von f im Punkt \vec{a} .

- f heißt PARTIELL DIFFERENZIERBAR im Punkt \vec{a} , wenn alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$, $1 \leq i \leq n$, im Punkt \vec{a} existieren.
- f heißt PARTIELL DIFFERENZIERBAR, wenn f in jedem Punkt von M partiell differenzierbar ist. Die partiellen Ableitungen von f sind die Funktionen

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

- f heißt STETIG PARTIELL DIFFERENZIERBAR im Punkt \vec{a} , wenn alle partiellen Ableitungen von f in einer ϵ -Umgebung von \vec{a} existieren und im Punkt \vec{a} stetig sind.
- f heißt STETIG PARTIELL DIFFERENZIERBAR, wenn alle partiellen Ableitungen in M existieren und stetig sind.
- Für $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ gelten analoge Definitionen, wenn jede Komponente f_j von \vec{f} die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Geogebra partielle Ableitung

Definition 17.8 (Funktionalmatrix)

Ist die Funktion $\vec{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit den Komponenten g_1, \dots, g_m im Punkt $\vec{a} \in M$ partiell differenzierbar, so heißt die Matrix

$$D\vec{g}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } g_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ \text{grad } g_m(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

die **FUNKTIONALMATRIX** (auch **JACOBI-MATRIX**) von \vec{g} im Punkt \vec{a} .

Eine Verallgemeinerung der partiellen Ableitung ist die Richtungsableitung.

Definition 17.9 (Richtungsableitung)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $\vec{a} \in M$. Weiter sei $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ gegeben.

\vec{f} besitzt im Punkt \vec{a} die RICHTUNGSABLEITUNG IN RICHTUNG \vec{v} , wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\vec{f}(\vec{a} + h\vec{v}) - \vec{f}(\vec{a}) \right) =: \frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}(\vec{a})$$

existiert.

Bemerkung: Die Berechnung der partiellen Ableitung einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ erfolgt durch Differentiation in \mathbb{R} : Man definiert die Funktion

$$g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) = f(\vec{a} + t\vec{e}_i) \quad (r > 0 \text{ geeignet})$$

und erhält

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = g'(0).$$

Dies entspricht dem "Festhalten" aller Variablen x_1, \dots, x_n außer x_i .

Definition 17.10 (Partielle Ableitungen höherer Ordnung)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $\vec{a} \in M$. Für ein $1 \leq i \leq n$ existiere die partielle Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U_\epsilon(\vec{a}) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

in einer ϵ -Umgebung von \vec{a} . Falls diese Funktion $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ an der Stelle \vec{a} partiell nach x_j differenzierbar ist, so nennen wir

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\vec{a}) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} (\vec{a}) =: \partial_{x_j} \partial_{x_i} f(\vec{a})$$

die ZWEITE PARTIELLE ABLEITUNG VON f NACH x_i UND x_j .

Höhere partielle Ableitungen werden entsprechend definiert.

Weitere Schreibweisen:

$$f_{x_j x_i}(\vec{a}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (\vec{a}). \quad \text{In } \mathbb{R}^2: f_{xy}, f_{xx}, f_{xyx} \text{ etc.}, \quad \text{in } \mathbb{R}^3: f_{xy}, f_{xz}, f_{zz} \text{ etc.}$$

Wie werden in 17.21 zeigen, dass es in vielen Fällen nicht auf die Reihenfolge der Ableitungen ankommt.

Warnung: Aus der partiellen Differenzierbarkeit von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ folgt **nicht** die Stetigkeit von f !

Der **richtige** Ableitungs-Begriff wird im Folgenden eingeführt.

Definition 17.11 (Totale Differenzierbarkeit)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $\vec{a} \in M$.

\vec{f} heißt in \vec{a} TOTAL DIFFERENZIERBAR, wenn eine **lineare Abbildung**

$$L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

existiert, so dass gilt

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{|\vec{h}|} \left(\vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{a}) - L(\vec{h}) \right) = \vec{0}.$$

$$\iff \vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) = \vec{f}(\vec{a}) + L(\vec{h}) + o(|\vec{h}|)$$

Dann heißt L die TOTALE ABLEITUNG von \vec{f} im Punkt \vec{a} , geschrieben

$$D\vec{f}(\vec{a}) = \vec{f}'(\vec{a}) := L.$$

Satz 17.12 (Jacobi-Matrix)

$\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ besitze in $\vec{a} \in M$ die totale Ableitung $L = Df(\vec{a})$. Die zur linearen Abbildung L gehörende (m, n) -Matrix ist die JACOBI-MATRIX

$$D\vec{f}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Definition 17.13 (Gradient)

Ist die Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\vec{a} \in M$ total differenzierbar, so heißt der Zeilenvektor

$$\nabla f(\vec{a}) = \text{grad } f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right)$$

der GRADIENT von f im Punkt \vec{a} .

Oft wird der Gradient auch als Spaltenvektor definiert.

- Falls \vec{f} in \vec{a} total differenzierbar ist, so ist \vec{f} in \vec{a} stetig:

$$\vec{0} = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{a}) - L\vec{h} \right) = \lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \left(\vec{f}(\vec{a} + \vec{h}) - \vec{f}(\vec{a}) \right).$$

- Falls \vec{f} in \vec{a} total differenzierbar ist, so ist \vec{f} in \vec{a} auch partiell differenzierbar: setze $\vec{h} = h\vec{e}_i$ in der Definition 17.11

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\vec{f}(\vec{a} + h\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{a}) - L(h\vec{e}_i) \right) &= \vec{0} \implies \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\vec{f}(\vec{a} + h\vec{e}_i) - \vec{f}(\vec{a}) \right) &= L\vec{e}_i. \end{aligned}$$

Damit ist auch Satz 17.12 bewiesen: Die i -te Spalte der (m, n) -Matrix zur Darstellung von $L = D\vec{f}(\vec{a})$ ist die i -te partielle Ableitung von \vec{f} .

- Ebenso: Falls \vec{f} in \vec{a} total differenzierbar ist, so existiert jede Richtungsableitung $\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}}$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ und es gilt

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial \vec{v}} = L\vec{v} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(\vec{a}).$$

- Falls \vec{f} in jedem Punkt von M total differenzierbar ist, definiert

$$Df : M \rightarrow \text{Mat}(m, n), \quad \vec{x} \mapsto D\vec{f}(\vec{x})$$

die (totale) Ableitung von \vec{f} auf M .

Satz 17.14 (Kriterium für die totale Differenzierbarkeit)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ sowie $\vec{a} \in M$.

Falls \vec{f} in einer ϵ -Umgebung von \vec{a} partiell differenzierbar ist und falls alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

im Punkt \vec{a} stetig sind, so ist \vec{f} in \vec{a} total differenzierbar.

Die (totale) Ableitung dient zur "linearen Approximation" von f im Punkt \vec{a} . Dies wird geometrisch veranschaulicht für eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

17.15 (Tangentialebene)

Falls f total differenzierbar im Punkt \vec{a} ist, so ist

$$Df(\vec{a}) = \nabla f(\vec{a}) = (f_x(\vec{a}), f_y(\vec{a})),$$

d.h. der Gradient $\nabla f(\vec{a})$ ist die darstellende Matrix der Ableitung von f im Punkt \vec{a} . Die Ebene im \mathbb{R}^3 , die durch

$$z = T_{\vec{a}}(x, y) := f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

gegeben ist, heißt die TANGENTIALEBENE AN DEN GRAPHEN VON f IM PUNKT \vec{a} . Ein Normalenvektor dieser Ebene ist gegeben durch

$$\vec{N}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_x(\vec{a}) \\ f_y(\vec{a}) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Differenzierbarkeit von f in \vec{a} bedeutet, dass der Abstand der Punkte $(x, y, f(x, y))$ und $(x, y, T_{\vec{a}}(x, y))$ "schneller" als $\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \vec{a} \right|$ gegen 0 konvergiert. Die Ebene "schmiegt" sich also dem Graphen von f an.

Gradient als Richtung des steilsten Anstiegs

Es sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein Punkt $\vec{a} \in M$ gegeben. f sei differenzierbar in \vec{a} mit $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$.

Für kleine Vektoren \vec{h} liefert die Ableitungs-Definition

$$f(\vec{a} + \vec{h}) \approx f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \vec{h}.$$

Wir betrachten \vec{h} als Richtungsvektor ausgehend von \vec{a} . Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgt

$$\nabla f(\vec{a}) \vec{h} \leq |\nabla f(\vec{a})| |\vec{h}|$$

mit Gleichheit genau für

$$\vec{h} = t(\nabla f(\vec{a}))^T, \quad t > 0.$$

Bei konstanter Länge $|\vec{h}|$ findet also der steilste Anstieg der Funktionswerte in Richtung des Gradienten statt.

Beispiele:

- **Polarkoordinaten in der Ebene:** Die Funktion

$$\vec{\phi} : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{\phi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

hat die Jacobi-Matrix

$$D\vec{\phi}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Also ist $\vec{\phi}$ in $M = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ stetig (total) differenzierbar. Wir werden später die Einschränkung von $\vec{\phi}$ auf $M_0 = (0, \infty) \times [0, 2\pi)$ betrachten.

- **Kugelkoordinaten oder räumliche Polarkoordinaten** : Die Funktion

$$\vec{\phi} : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

hat die Jacobi-Matrix

$$D\vec{\phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Also ist $\vec{\phi}$ in $M = (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ stetig (total) differenzierbar.

Wir werden später die Einschränkung von $\vec{\phi}$ auf $M_0 = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2)$ betrachten.

Geogebra Kugelkoordinaten

- **Zylinderkoordinaten im Raum**: Als Erweiterung der ebenen Polarkoordinaten definieren wir

$$\vec{\phi} : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\phi}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Die Jacobi-Matrix lautet

$$D\vec{\phi}(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist $\vec{\phi}$ in $M = (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$ stetig (total) differenzierbar.

Wir werden später die Einschränkung von $\vec{\phi}$ auf $M_0 = (0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ betrachten.

Satz 17.16 (Rechenregeln für mehrdimensionale Differentiation)

- (i) Sind $\vec{f}, \vec{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ in \vec{a} differenzierbar, so auch $\vec{f} + \vec{g}$ und $c\vec{f}$ (mit $c \in \mathbb{R}$).
Es gilt $D(\vec{f} + \vec{g})(\vec{a}) = D\vec{f}(\vec{a}) + D\vec{g}(\vec{a})$ und $D(c\vec{f})(\vec{a}) = cD\vec{f}(\vec{a})$.
- (ii) Sind $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ in \vec{a} differenzierbar, so auch $f \cdot g$ und f/g (falls definiert).
Es gelten die Produkt- und Quotientenregel

$$\nabla(fg)(\vec{a}) = g(\vec{a}) \nabla f(\vec{a}) + f(\vec{a}) \nabla g(\vec{a}).$$

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) (\vec{a}) = \frac{g(\vec{a}) \nabla f(\vec{a}) - f(\vec{a}) \nabla g(\vec{a})}{(g(\vec{a}))^2}.$$

- (iii) Ist $\vec{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar in \vec{a} und $\vec{g} : N \rightarrow \mathbb{R}^p$ differenzierbar in $\vec{f}(\vec{a})$ (sowie $\vec{f}(M) \subseteq N \subseteq \mathbb{R}^m$), so ist $\vec{g} \circ \vec{f}$ differenzierbar in \vec{a} mit

$$D(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{a}) = D\vec{g}(\vec{f}(\vec{a})) \cdot D\vec{f}(\vec{a}) \quad (\text{Kettenregel}).$$

Die Jacobi-Matrix $D(\vec{g} \circ \vec{f})$ ist also das übliche Matrixprodukt der Jacobi-Matrizen $D\vec{g}$ (im Punkt $\vec{f}(\vec{a})$) und $D\vec{f}$ (im Punkt \vec{a}).

Die Kettenregel erklärt auch die Differentiation von "Parameterintegralen".

Satz 17.17 (Parameterintegrale, Leibniz'sche Regel)

Die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ und $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Dann ist die Funktion

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, t) dt$$

ebenfalls stetig.

Falls g und h differenzierbar sind und die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x}$ existiert und stetig ist, so ist auch F differenzierbar und es gilt

$$F'(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + f(x, h(x))h'(x) - f(x, g(x))g'(x).$$

Viele Aussagen lassen sich durch Verwendung der Differentiation in \mathbb{R} herleiten:

Satz 17.18 (Mittelwertsatz für skalarwertige Funktionen)

Gegeben sei die (total) differenzierbare Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Wenn für zwei Punkte $\vec{a}, \vec{b} \in M$ die Verbindungsstrecke von \vec{a} nach \vec{b} in M liegt (also $\vec{c}(t) = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \in M$ für alle $t \in [0, 1]$), dann existiert ein Punkt \vec{z} auf dieser Strecke mit

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{z}) (\vec{b} - \vec{a}).$$

Definition 17.19 (Gebiet)

Eine offene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein GEBIET, wenn sich je zwei Punkte $\vec{a}, \vec{b} \in M$ durch einen Streckenzug verbinden lassen, der in M liegt. Genauer: Für alle $\vec{a}, \vec{b} \in M$ existieren Punkte $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_N \in M$ so, dass die Verbindungsstrecken

$$\vec{c}_i(t) = \vec{a}_i + t(\vec{a}_{i+1} - \vec{a}_i), \quad t \in [0, 1], \quad 0 \leq i \leq N,$$

mit $\vec{a}_0 := \vec{a}$ und $\vec{a}_{N+1} := \vec{b}$ in M liegen.

Mit dem Mittelwertsatz folgt wie im Eindimensionalen:

Satz 17.20 (Satz von der konstanten Funktion)

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei (total) differenzierbar. Wenn $\nabla f(\vec{x}) = \vec{0}$ für alle $\vec{x} \in M$ gilt, so ist f konstant.

In vielen Fällen kann die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauscht werden.

Satz 17.21 (Satz von Schwarz)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar (d.h. die ersten und zweiten partiellen Ableitungen existieren und sind stetig auf M).

Dann gilt für alle $i, j = 1, \dots, n$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right).$$

Entsprechendes gilt für die partiellen Ableitungen höherer Ordnung.

Kapitel 18 – Der Satz von Taylor und Extremwertberechnung

Satz von Taylor und Extremwertberechnung

Satz 18.1 (Satz von Taylor (2. Ordnung))

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, das die Verbindungsstrecke der Punkte \vec{a} und $\vec{a} + \vec{h}$ enthält. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei 3-mal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$f(\vec{a} + \vec{h}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\vec{a})h_i h_j + o(|\vec{h}|^2)$$

Ein analoges Resultat gilt komponentenweise für vektorwertige Funktionen.

Definition 18.2 (Hessematrix)

Die Matrix $H_f(\vec{a}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$(H_f(\vec{a}))_{ij} := \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\vec{a})$$

heißt die HESSE-MATRIX von f an der Stelle \vec{a} .

Kurz: $f(\vec{a} + \vec{h}) = \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{h} \rangle + \frac{1}{2} \langle H_f(\vec{a}) \vec{h}, \vec{h} \rangle + o(|\vec{h}|^2)$

Definition 18.3 (Minimum und Maximum)

Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) hat in $\vec{a} \in M$ ein

- RELATIVES MAXIMUM, wenn eine ϵ -Umgebung $U_\epsilon(\vec{a})$ existiert, so dass

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}) \quad \text{für alle } x \in U_\epsilon(\vec{a}) \quad \text{gilt.}$$

- RELATIVES MINIMUM, wenn eine ϵ -Umgebung $U_\epsilon(\vec{a})$ existiert, so dass

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{a}) \quad \text{für alle } x \in U_\epsilon(\vec{a}) \quad \text{gilt.}$$

- RELATIVES EXTREMUM, wenn f in \vec{a} ein relatives Maximum oder relatives Minimum hat.
- STRENGES relatives Maximum (bzw. Minimum), wenn die starke Ungleichung

$$f(\vec{x}) < f(\vec{a}) \quad (\text{bzw. } f(\vec{x}) > f(\vec{a})) \quad \text{für alle } x \in U_\epsilon(\vec{a}) \setminus \{\vec{a}\} \quad \text{gilt.}$$

Satz 18.4 (Notwendiges Kriterium)

Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei (total) differenzierbar. Wenn f in \vec{a} ein relatives Extremum hat, so muss $\text{grad } f(\vec{a}) = \vec{0}$ gelten.

Definition 18.5 (Quadratischer Formen)

Sei A eine symmetrische Matrix. Die Abbildung $Q_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\vec{x} \mapsto Q_A(\vec{x}) := \vec{x}^\top A \vec{x} = \langle A \vec{x}, \vec{x} \rangle$$

heißt die zu A gehörende QUADRATISCHE FORM.

A (bzw. Q_A) heißt

- POSITIV DEFINIT, wenn für $\vec{x} \neq \vec{0}$ stets $Q_A(\vec{x}) > 0$ ist.
 - POSITIV SEMIDEFINIT, wenn für $\vec{x} \neq \vec{0}$ stets $Q_A(\vec{x}) \geq 0$ ist.
 - NEGATIV DEFINIT, wenn für $\vec{x} \neq \vec{0}$ stets $Q_A(\vec{x}) < 0$ ist.
 - NEGATIV SEMIDEFINIT, wenn für $\vec{x} \neq \vec{0}$ stets $Q_A(\vec{x}) \leq 0$ ist.
 - DEFINIT, wenn A positiv oder negativ definit ist.
 - INDEFINIT, wenn es \vec{x} mit $Q_A(\vec{x}) > 0$ und \vec{y} mit $Q_A(\vec{y}) < 0$ gibt.
-
- A ist genau dann positiv (semi)definit, wenn alle Eigenwerte von A positiv (positiv oder Null) sind.
 - A ist genau dann negativ (semi)definit, wenn $-A$ positiv (semi)definit ist.
 - Hat A positive und negative Eigenwerte, so ist A indefinit.

Das wichtigste Kriterium für Definitheit ist:

Satz 18.6 (Hurwitz-Kriterium)

Für eine symmetrische Matrix A sind äquivalent:

- (a) A ist positiv definit.
- (b) Die HAUPT-MINOREN von A

$$D_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad (\text{linke obere Ecke von } A)$$

sind für alle $k = 1, \dots, n$ (strikt) positiv.

Ist ein Haupt-Minor negativ, dann ist die Matrix nicht positiv semidefinit.

Speziell für $n = 2$ ist (b) leicht zu prüfen: Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, so gilt

- $\det A = ac - b^2 > 0$ und $a > 0 \iff A$ ist positiv definit.
- $\det A = ac - b^2 > 0$ und $a < 0 \iff A$ ist negativ definit.
- $\det A = ac - b^2 < 0 \iff A$ ist indefinit.

Hurwitz-Kriterium (Fortsetzung)

Weiterhin ist äquivalent:

- (a) A ist negativ definit.
- (b) $(-1)^k D_k > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$.

Gibt es ein k mit $(-1)^k D_k < 0$, so ist A nicht negativ semidefinit.

Satz 18.7 (Hinreichendes Kriterium)

Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar. Sei $\vec{a} \in M$ mit $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$ gegeben. Wir betrachten die Hesse-Matrix von f an der Stelle \vec{a}

$$H_f(\vec{a}) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) \right]_{i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n}$$

Diese Matrix ist nach dem Satz von Schwarz 17.21 symmetrisch.

- (i) Ist $H_f(\vec{a})$ positiv definit, so hat f in \vec{a} ein strenges relatives Minimum.
- (ii) Ist $H_f(\vec{a})$ negativ definit, so hat f in \vec{a} ein strenges relatives Maximum.
- (iii) Ist $H_f(\vec{a})$ indefinit, so hat f in \vec{a} kein relatives Extremum. Man nennt einen solchen Punkt des Graphen von f einen SATTELPUNKT.

Für den zweidimensionalen Fall bedeutet dies:

- $\det H_f(\vec{a}) = f_{xx}(\vec{a})f_{yy}(\vec{a}) - (f_{xy}(\vec{a}))^2 > 0$
 $\implies f$ hat in \vec{a} ein strenges relatives Extremum.
 - Für $f_{xx}(\vec{a}) > 0$ liegt ein strenges relatives Minimum vor.
 - Für $f_{xx}(\vec{a}) < 0$ liegt ein strenges relatives Maximum vor.
- $\det H_f(\vec{a}) = f_{xx}(\vec{a})f_{yy}(\vec{a}) - (f_{xy}(\vec{a}))^2 < 0$
 $\implies f$ hat in \vec{a} einen Sattelpunkt.

Die **lokale Bijektivität** einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lässt sich anhand der Jacobi-Matrix feststellen!

Satz 18.8 (Umkehrsatz)

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Weiter sei $\vec{a} \in M$ mit $\det Df(\vec{a}) \neq 0$ gegeben (**Jacobi-Determinante**).

Dann gibt es offene Mengen $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\vec{a} \in U$, $f(\vec{a}) \in V$, so dass die Abbildung

$$f|_U : U \rightarrow V, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}),$$

bijektiv ist. Die Umkehrabbildung

$$g = (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U, \quad \vec{y} \mapsto f^{-1}(\vec{y}),$$

ist ebenfalls stetig differenzierbar. Ihre Jacobi-Matrix an der Stelle $\vec{y} = f(\vec{x}) \in V$ ist

$$Dg(f(\vec{x})) = \left(Df(\vec{x}) \right)^{-1}, \quad \vec{x} \in U.$$

Bemerkung: Der Umkehrsatz liefert eine typische **lokale** Aussage:

- Aus $\det Df(\vec{a}) \neq 0$ (und der Stetigkeit der partiellen Ableitungen in einer Umgebung von \vec{a}) folgt die Injektivität von f in einer Umgebung von \vec{a} .
- Die **globale** Injektivität von f folgt **nicht**: Es gibt viele Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, deren Jacobi-Determinante in jedem Punkt $\vec{x} \in M$ ungleich Null ist, die aber nicht injektiv sind (siehe Beispiel (b) unten).

18.7 Beispiele:

(a) Affine Koordinatentransformation im \mathbb{R}^n : Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$$

mit regulärer Matrix $A \in \text{Mat}(n, n)$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar,

$$Df(\vec{x}) = A \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Der Umkehrsatz liefert nur die lokale Umkehrbarkeit. In diesem Beispiel gilt sogar die globale Umkehrbarkeit: f ist bijektiv, die Umkehrabbildung

$$g = f^{-1}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad g(\vec{x}) = A^{-1}\vec{x} - A^{-1}\vec{b}$$

ist stetig differenzierbar, und

$$Dg(\vec{x}) = A^{-1} \quad \text{für alle } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$ hat die Jacobi-Determinante

$$\det Df(x, y) = \det \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} = 4x^2 + 4y^2.$$

Für alle $(x, y) \neq (0, 0)$ existiert eine Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$, auf der f eine differenzierbare Umkehrabbildung $g = (f|_U)^{-1}$ besitzt. Die Jacobi-Matrix von g im Punkt $f(x, y)$ lautet

$$Dg(f(x, y)) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -2y & 2x \end{pmatrix}.$$

Beachte: f ist nicht (global) injektiv: z.B. gilt $f(1, 0) = f(-1, 0)$.(Mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ und $z^2 = (x^2 - y^2) + i(2xy)$ lässt sich f auch als Funktion $z \mapsto z^2$ auf \mathbb{C} auffassen.)

(c) (Ebene) Polarkoordinaten:

$\vec{\phi} : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} x(r, \varphi) \\ y(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$ hat die Jacobi-Determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} = r \neq 0.$$

Also ist $\vec{\phi}$ lokal umkehrbar. Die Einschränkung von $\vec{\phi}$

$$\vec{\psi} : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \leq 0\}$$

ist bijektiv, die Umkehrabbildung g lautet

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} r(x, y) \\ \varphi(x, y) \end{pmatrix} \text{ mit } r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arccot} \frac{x}{y} & \text{für } y > 0, \\ (\operatorname{arccot} \frac{x}{y}) - \pi & \text{für } y < 0, \\ 0 & \text{für } y = 0, x > 0. \end{cases}$$

Sie hat die Jacobi-Matrix

$$\begin{aligned} Dg(x, y) &= \begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x\sqrt{x^2 + y^2} & y\sqrt{x^2 + y^2} \\ -y & x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Kugelkoordinaten, räumliche Polarkoordinaten:

$\vec{\phi} : (0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{\phi}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix}$ hat die Jacobi-Determinante

$$\det \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \\ z_r & z_\varphi & z_\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \cos \theta & -r \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \theta & 0 & r \cos \theta \end{pmatrix} = r^2 \cos \theta.$$

Für $r > 0$ und $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ ist $\vec{\phi}$ lokal umkehrbar. Die Einschränkung von $\vec{\phi}$

$$\vec{\psi} : (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) \mid x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}$$

ist bijektiv. Die Umkehrabbildung g hat die Jacobi-Matrix

$$Dg(x, y, z) = \frac{1}{r \cos \theta} \begin{pmatrix} r \cos^2 \theta \cos \varphi & r \cos^2 \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi \sin \theta \cos \theta & -\sin \varphi \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix}.$$

18.9 (Mehrdimensionales Newton-Verfahren)

Gesucht: Lösung der Gleichung $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$, wobei $\vec{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar ist.

Initialisierung: Startvektor $\vec{x}^{(0)} \in M$ mit $\det Df(\vec{x}_0) \neq 0$

Iteration: Berechne für $k = 0, 1, 2, \dots$ den Vektor $x^{(k+1)}$ als Lösung der linearisierten Gleichung

$$\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) + Df(\vec{x}^{(k)})(\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}) = \vec{0}.$$

Satz 18.10

Falls der Vektor \vec{a} eine Lösung der Gleichung $\vec{f}(\vec{a}) = \vec{0}$ ist und falls $\det D\vec{f}(\vec{a}) \neq 0$ gilt, so existiert eine ϵ -Umgebung von \vec{a} , so dass für jeden Startvektor $\vec{x}^{(0)}$ aus dieser Umgebung die Folge der Vektoren $\vec{x}^{(k)}$ **quadratisch** gegen \vec{a} konvergiert.

Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - y - 1 &= 0 \\x^2 - y^2 + x + 1 &= 0\end{aligned}$$

hat zwei Lösungen, nämlich den Punkt $(-1, 1)$ und einen zweiten Punkt in der Nähe von $(0.6, 1.4)$. Mit dem Startvektor $\vec{x}^{(0)} = (1, 1)$ erhalten wir die Folge der Punkte $\vec{x}^{(k)} = (x_k, y_k)$ in der Tabelle:

k	x_k	y_k	$f_1(x_k, y_k)$	$f_2(x_k, y_k)$
0	1.0	1.0	0	2.0
1	0.71428571428571	1.57142857142857	0.40816326530612	-0.24489795918367
2	0.63609022556391	1.43308270676692	0.02525411272542	-0.01302504381254
3	0.62999432638765	1.42370570897538	0.00012508807435	-0.00005076810081
4	0.62996052589533	1.42366105198303	0.00000000313672	-0.00000000085177
5	0.62996052494744	1.42366105093154	0.00000000000000	0.00000000000000

In Kapitel über den \mathbb{R}^n wurden Ebenen im \mathbb{R}^3 durch die Normalengleichung definiert:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz - d = 0\}.$$

Die Normalengleichung lässt sich z.B. nach z "auflösen", wenn $c \neq 0$ gilt:

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \frac{1}{c}(d - ax - by)\}.$$

Lokal lassen sich viele Kurven und Flächen als **Lösungsmenge** einer nichtlinearen Gleichung

$$F(x, y) = 0 \quad \text{oder} \quad F(x, y, z) = 0$$

darstellen.

Beispiel: Die Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ bilden die Einheitskreislinie. Auflösen nach y ergibt zwei stetige Lösungen

$$y = \varphi_1(x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{und} \quad y = \varphi_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Für diese gilt

$$F(x, \varphi_1(x)) = F(x, \varphi_2(x)) = 0.$$

Satz 18.11 (Satz über implizite Funktionen)

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen und $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Weiter sei $\vec{a} \in M$ mit

$$F(\vec{a}) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{a}) \neq 0$$

gegeben.

Dann gibt es eine ϵ -Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ von (a_1, \dots, a_{n-1}) und eine eindeutig bestimmte Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(a_1, \dots, a_{n-1}) = a_n$$

gelten. Die Funktion φ ist stetig differenzierbar und hat die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \dots, x_{n-1}))}, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

- (a) Satz 18.11 liefert die **lokale** Auflösbarkeit der Gleichung $F(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = 0$ nach der Variablen x_n . Die Auflösung ist in einer Umgebung der Stelle $\vec{a} \in M$ mit $(F(\vec{a}) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{a}) \neq 0)$ sogar eindeutig. Mit anderen Worten: die Lösungsmenge der Gleichung enthält den Punkt \vec{a} und ist in seiner Nähe durch den Graphen der stetig differenzierbaren Funktion $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. (Beachte: $\text{Graph}(\varphi) \subseteq M$)
- (b) Man kann auch nach einer anderen Variablen x_k auflösen, falls $F(\vec{a}) = 0$ und $\frac{\partial F}{\partial x_k}(\vec{a}) \neq 0$ gilt.

Beispielsweise ist durch $F(\psi(y, z), y, z) = 0$ (bei Vorgabe von $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ und $F_x(x_0, y_0, z_0) \neq 0$) eine stetig differenzierbare Funktion $\psi(y, z)$ mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(y, z) = -\frac{F_y(\psi(y, z), y, z)}{F_x(\psi(y, z), y, z)}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}(y, z) = -\frac{F_z(\psi(y, z), y, z)}{F_x(\psi(y, z), y, z)}$$

definiert.

- (c) Satz 18.11 liefert die (partiellen) Ableitungen von φ in \vec{a} , ohne die Funktion φ **explizit** zu bestimmen! Höhere Ableitungen bestimmt man mit der Kettenregel: Aus $F(x, \varphi(x)) = 0$ folgt sofort

$$0 = \frac{d}{dx} (F(x, \varphi(x))) = F_x(x, \varphi(x)) + F_y(x, \varphi(x))\varphi'(x),$$

also $\varphi'(x) = -\frac{F_x(x, \varphi(x))}{F_y(x, \varphi(x))}$ wie in Satz 18.11, und weiter

$$0 = \frac{d^2}{dx^2} (F(x, \varphi(x))) = F_{xx}(x, \varphi(x)) + 2F_{xy}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + F_{yy}(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2 + F_y(x, \varphi(x))\varphi''(x),$$

also

$$\varphi''(x) = -\frac{F_{xx}(x, \varphi(x)) + 2F_{xy}(x, \varphi(x))\varphi'(x) + F_{yy}(x, \varphi(x))(\varphi'(x))^2}{F_y(x, \varphi(x))}.$$

- (d) Ein analoger Satz gilt für stetig differenzierbare Funktionen $\vec{F} : M \rightarrow \mathbb{R}^m$:
 Der Rang von $\vec{F}'(\vec{a})$ sei gleich m (d.h. das Differential ist injektiv).
 O.B.d.A seien die letzten m Spalten der Ableitungsmatrix

$$\vec{F}'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

linear unabhängig in \vec{a} .

Dann gibt es stetig differenzierbare Funktionen $\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-m})$ bis $\varphi_m(x_1, \dots, x_{n-m})$ mit

$\vec{F}(x_1, \dots, x_{n-m}, \varphi_1(x_1, \dots, x_{n-m}), \dots, \varphi_m(x_1, \dots, x_{n-m})) = \vec{0}$ in einer Umgebung von A .

Ist $\vec{\Phi}$ die Vektorfunktion mit den Komponenten φ_1 bis φ_m , so ist

$$\vec{\Phi}'(\vec{a}) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_{n-m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_{n-m}} \end{pmatrix}(\vec{a})$$

Satz 18.11 erlaubt uns auch, die Bestimmung relativer Extremwerte “unter Nebenbedingungen” zu behandeln.

Definition 18.12 (Extrema unter Nebenbedingungen)

Gegeben sei eine reelle Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen) sowie weitere Funktionen $g_1, \dots, g_m : M \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Funktion f hat im Punkt $\vec{a} \in M$ ein RELATIVES MAXIMUM UNTER DEN NEBENBEDINGUNGEN

$$g_1(\vec{x}) = 0, \dots, g_m(\vec{x}) = 0,$$

wenn $g_1(\vec{a}) = \dots = g_m(\vec{a}) = 0$ gilt (d.h. \vec{a} erfüllt alle Nebenbedingungen) **und** wenn eine Umgebung $U \subseteq M$ von \vec{a} existiert, so dass

$$f(\vec{x}) \leq f(\vec{a}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in U \text{ mit } g_1(\vec{x}) = \dots = g_m(\vec{x}) = 0$$

gilt.

- Ein RELATIVES MINIMUM/EXTREMUM UNTER NEBENBEDINGUNGEN wird entsprechend definiert.

Sei $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ relatives Extremum von $f(x, y, z)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$, die sich nicht "einfach" nach z auflösen lässt.

Annahme: $g_z(\vec{a}) \neq 0$.

Dann erhalten wir **alle** Lösungen von $g(x, y, z) = 0$ in der Nähe des Punktes \vec{a} durch $z = \varphi(x, y)$ mit der implizit definierten Funktion φ aus Satz 18.11.

Insbesondere gilt $\varphi(a_1, a_2) = a_3$.

Der Vektor (a_1, a_2) ist also relatives Extremum der Funktion

$$h(x, y) = f(x, y, \varphi(x, y)).$$

Aufgrund der notwendigen Bedingung (Satz 18.4) muss dann

$$\begin{aligned} h_x(a_1, a_2) &= f_x(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) + f_z(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2))\varphi_x(a_1, a_2) = 0 \\ h_y(a_1, a_2) &= f_y(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) + f_z(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2))\varphi_y(a_1, a_2) = 0 \end{aligned}$$

gelten.

Setzen wir $\varphi_x = -\frac{g_x}{g_z}$ und $\varphi_y = -\frac{g_y}{g_z}$ aus Satz 18.11 ein, erhalten wir

$$f_x(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) - \frac{f_z(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2))}{g_z(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2))} g_x(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) = 0$$

$$f_y(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) - \frac{f_z(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2))}{g_z(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2))} g_y(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2)) = 0.$$

Nennen wir den gemeinsamen Faktor in beiden Gleichungen $\lambda = \frac{f_z(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2))}{g_z(a_1, a_2, \varphi(a_1, a_2))}$, so erhalten wir als notwendige Bedingungen

$$\begin{aligned} f_x(\vec{a}) - \lambda g_x(\vec{a}) &= 0 \\ f_y(\vec{a}) - \lambda g_y(\vec{a}) &= 0 \\ f_z(\vec{a}) - \lambda g_z(\vec{a}) &= 0 \\ g(\vec{a}) &= 0 \quad (\text{Nebenbedingung}) \end{aligned} \quad (*)$$

Dasselbe Ergebnis (*) entsteht bei Auflösen der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ nach x oder y . Also erhalten wir die notwendigen Bedingungen (*) schon dann, wenn $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0}$ ist.

Satz 18.13 (Notwendiges Kriterium)

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_1, \dots, g_m : M \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $m < n$) seien stetig differenzierbar.

Weiter sei $\vec{a} \in M$ mit $g_1(\vec{a}) = \dots = g_m(\vec{a}) = 0$ und

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} = m$$

gegeben. Falls f im Punkt \vec{a} ein relatives Extremum unter den Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = \dots = g_m(\vec{x}) = 0$ besitzt, so gibt es Zahlen

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R},$$

so dass

$$\nabla f(\vec{a}) - \lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) - \dots - \lambda_m \nabla g_m(\vec{a}) = \vec{0}$$

gilt. Die Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ heißen LAGRANGE-MULTIPLIKATOREN.

1. Finde alle Lösungen $(\vec{a}, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$ der $n + m$ Gleichungen in Satz 18.13 (inkl. Nebenbedingungen $g_1(\vec{a}) = \dots = g_m(\vec{a}) = 0$). Dabei dienen die Lagrange-Multiplikatoren λ_i nur als Hilfsvariablen. Ihre Bestimmung ist nebensächlich.
2. Weitere relative Extrema können nur noch an Stellen vorliegen, wo die Nebenbedingungen erfüllt sind, aber die Rangbedingung an die Matrix $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)$ verletzt ist.
3. Weitere Überlegungen sind erforderlich, um festzustellen, ob tatsächlich ein relatives Maximum oder Minimum unter den Nebenbedingungen vorliegt.
 - Häufig ist die Menge der Punkte, die alle Nebenbedingungen erfüllen, abgeschlossen und beschränkt. Dann liefert Satz 17.6, dass f unter den Nebenbedingungen sowohl ein absolutes Maximum als auch ein absolutes Minimum haben muss.
 - Im Fall $n = 2$, einer Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ sowie bei Vorliegen des notwendigen Kriteriums $\nabla f(\vec{a}) + \lambda \nabla g(\vec{a}) = \vec{0}$, $g(\vec{a}) = 0$, ist in Anlehnung an Satz 18.7 die folgende Bedingung hinreichend: ("geränderte Matrix")

$$\det \begin{pmatrix} f_{xx}(\vec{a}) + \lambda g_{xx}(\vec{a}) & f_{xy}(\vec{a}) + \lambda g_{xy}(\vec{a}) & g_x(\vec{a}) \\ f_{xy}(\vec{a}) + \lambda g_{xy}(\vec{a}) & f_{yy}(\vec{a}) + \lambda g_{yy}(\vec{a}) & g_y(\vec{a}) \\ g_x(\vec{a}) & g_y(\vec{a}) & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{Maximum} \\ < 0 & \Rightarrow \text{Minimum.} \end{cases}$$

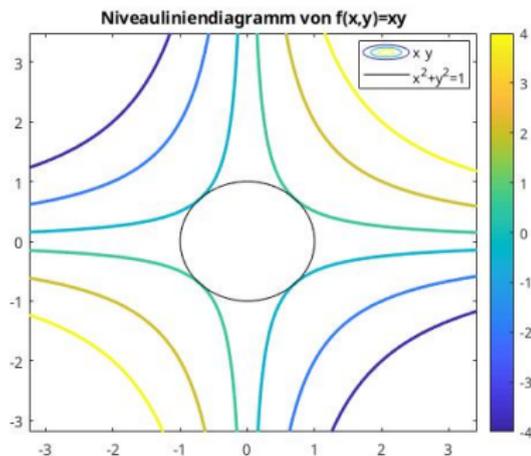
Bemerkung 18.14 (Notwendiges Kriterium für $m = n - 1$)

Im Spezialfall von $m = n - 1$ Nebenbedingungen $g_1(\vec{x}) = \cdots = g_{n-1}(\vec{x}) = 0$ lassen sich beide Möglichkeiten des Vorliegens eines relativen Extremums unter Nebenbedingungen zusammenfassen zu der **Determinantenbedingung**:

$$\det \begin{pmatrix} \nabla f(\vec{a}) \\ \nabla g_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ \nabla g_{n-1}(\vec{a}) \end{pmatrix} = 0.$$

Mit einfachen Überlegungen der linearen Algebra zeigt man, dass diese Bedingung äquivalent zu den beiden Fällen 1. und 2. der Folie "Praktische Vorgehensweise" ist.

Geometrische Interpretation der Lagrange-Multiplikatoren



Relative Extrema von f unter der Nebenbedingung

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

- Maximum in $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mit Funktionswert $\frac{1}{2}$.
- Minimum in $\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ mit Funktionswert $-\frac{1}{2}$.

Beobachtung: Die Höhenlinien von f zum Wert $\pm \frac{1}{2}$ und g zum Wert 0 berühren sich.

Kapitel 19 – Integralrechnung im \mathbb{R}^n

Kap. 19: Integralrechnung im \mathbb{R}^n

Übersicht:

- Die Definition des Integrals

$$\int_I f(\vec{x}) d\vec{x}, \quad I = [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n,$$

erfolgt wie in Definition 16.1 zunächst für **Treppenfunktionen** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ über dem abgeschlossenen und beschränkten n -dimensionalen Intervall

$$[\vec{a}, \vec{b}] = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n].$$

- Durch Intervallunterteilung und gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Treppenfunktionen (vgl. Definition 16.5) kommt man zum **elementaren Integral** für allgemeinere Funktionen $f : [\vec{a}, \vec{b}] \rightarrow \mathbb{R}$.
- Die Berechnung erfolgt durch “iteriertes Integrieren” nach den einzelnen Variablen (siehe auch Satz von Fubini):

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1$$

- Die Erweiterung auf das Integral über offene (auch unbeschränkte) Mengen M erfolgt durch die **Ausschöpfung** von M von "innen" durch abgeschlossene beschränkte Intervalle. Dies beinhaltet die n -dimensionale Version des bestimmten Integrals über die abgeschlossene Hülle \overline{M} und die Verallgemeinerung der uneigentlichen Integrale 16.23 und 16.24.
- Für geeignete Mengen der Form

$$M = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \varphi_2(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \text{mit } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in \widetilde{M} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \end{array} \right. \right\}$$

wird das "iterierte Integrieren" verallgemeinert zu

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\widetilde{M}} \left(\int_{\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1})}^{\varphi_2(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, \dots, x_n) dx_n \right) d(x_1, \dots, x_{n-1}).$$

Definition 19.1 (Volumen und Intervallunterteilung)

- Das VOLUMEN des abgeschlossenen beschränkten Intervalls $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\text{vol}_n([\vec{a}, \vec{b}]) := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

- Eine INTERVALLUNTERTEILUNG von $[\vec{a}, \vec{b}]$ ist definiert durch Zahlen

$$a_i = a_i^{(0)} < a_i^{(1)} < \dots < a_i^{(r_i)} = b_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

und die hierdurch festgelegten Teilintervalle

$$I^{(k_1, \dots, k_n)} = [(a_1^{(k_1)}, a_2^{(k_2)}, \dots, a_n^{(k_n)}), (a_1^{(k_1+1)}, a_2^{(k_2+1)}, \dots, a_n^{(k_n+1)})]$$

mit $0 \leq k_i \leq r_i - 1$.

Dann gilt: $\text{vol}_n(I^{(k_1, \dots, k_n)} \cap I^{(\ell_1, \dots, \ell_n)}) = 0$ für $(k_1, \dots, k_n) \neq (\ell_1, \dots, \ell_n)$ und

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \bigcup_{k_1=0}^{r_1-1} \dots \bigcup_{k_n=0}^{r_n-1} I^{(k_1, \dots, k_n)}.$$

Definition 19.2 (Integral einer Treppenfunktion (vgl. 16.1))

Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn Folgendes gilt:

- $\varphi = 0$ außerhalb eines abgeschlossenen Intervalls $[\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$.
- Es gibt eine Intervallunterteilung von $[\vec{a}, \vec{b}]$, so dass φ auf jedem Teilintervall $I^{(k_1, \dots, k_n)}$ konstant ist, also

$$\varphi(\vec{x}) = c^{(k_1, \dots, k_n)} \quad \text{für alle } \vec{x} \in I^{(k_1, \dots, k_n)}.$$

Das INTEGRAL von φ ist definiert durch

$$\int \varphi = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k_1=0}^{r_1-1} \sum_{k_2=0}^{r_2-1} \cdots \sum_{k_n=0}^{r_n-1} c^{(k_1, \dots, k_n)} \text{vol}_n(I^{(k_1, \dots, k_n)}).$$

Satz 19.3 (Einfache Regeln (vgl. 16.4))

- Die Menge der Treppenfunktionen in \mathbb{R}^n ist ein reeller Vektorraum.
- Für Treppenfunktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und reelle Zahlen α, β gilt

$$\int (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int \varphi + \beta \int \psi \quad (\text{Linearität})$$

- $\varphi \geq 0 \implies \int \varphi \geq 0$ (Monotonie)
- $|\int \varphi| \leq \int |\varphi|$ (Betragsungleichung)

Definition 19.4 (Gleichmäßige Konvergenz (vgl. 16.21))

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei gegeben. Eine Folge von Funktionen $f_k : M \rightarrow \mathbb{R}$ (mit $k \in \mathbb{N}$)
KONVERGIERT GLEICHMÄSSIG GEGEN $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein
 $k_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|f_k(\vec{x}) - f(\vec{x})| < \epsilon \quad \text{für alle } \vec{x} \in M \text{ und alle } k \geq k_0$$

gilt.

Definition 19.5 (Elementares Integral (vgl. 16.5))

Gegeben sei das abgeschlossene beschränkte Intervall $I = [\vec{a}, \vec{b}] \subset \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (ELEMENTAR) INTEGRIERBAR, wenn sie der gleichmäßige Grenzwert einer Folge $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen ist, die in $\mathbb{R}^n \setminus I$ konstant Null sind. Wir nennen dann

$$\int_I f = \int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(\vec{x}) d\vec{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(\vec{x}) d\vec{x}$$

das (BESTIMMTE) INTEGRAL VON f ÜBER $[\vec{a}, \vec{b}]$.

Bemerkung (vgl. 16.8)

- Die Menge der integrierbaren Funktionen ist ein reeller Vektorraum.
- Es gelten die Rechenregeln aus Satz 19.3.
- Das elementare Integral bestimmt das Volumen (im \mathbb{R}^{n+1}) des Körpers zwischen dem Koordinatenbereich $I \subset \mathbb{R}^n$ und dem Graphen von f (falls $f \geq 0$ gilt).

Stetige Funktionen $f : [\vec{a}, \vec{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ sind integrierbar, denn:

Satz 19.6 (Stetige Funktionen sind integrierbar (vgl. 16.6))

Sei $f : [\vec{a}, \vec{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren Treppenfunktionen $\varphi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}^n \setminus [\vec{a}, \vec{b}]$ konstant Null sind und deren Folge gleichmäßig auf $[\vec{a}, \vec{b}]$ gegen f konvergiert.

Satz 19.7 (Integral-Mittelwertsatz (vgl. 16.9))

Die Funktion $f : [\vec{a}, \vec{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Dann existiert ein Punkt $\vec{\xi} \in [\vec{a}, \vec{b}]$ mit

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(\vec{x}) d\vec{x} = f(\vec{\xi}) \operatorname{vol}_n([\vec{a}, \vec{b}]).$$

Beweis: mit Satz vom Maximum 17.6 und Zwischenwertsatz 12.12.

Berechnung von Integralen über $[\vec{a}, \vec{b}]$: "iteriertes" Integrieren und "Satz von Fubini"

Satz 19.8 (Satz von Fubini)

Für eine stetige Funktion $f : [\vec{a}, \vec{b}] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{[\vec{a}, \vec{b}]} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \cdots dx_2 \right) dx_1.$$

Weiterhin darf die Reihenfolge der Integration beliebig vertauscht werden.

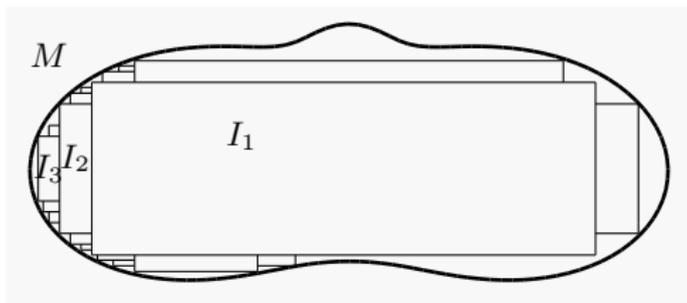
Integrale über allgemeine (offene) Mengen und uneigentliche Integrale werden mit Hilfe von Ausschöpfungen definiert:

Definition 19.9 (Ausschöpfung)

Die Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen. Eine AUSSCHÖPFUNG von M ist eine Folge von abgeschlossenen beschränkten Intervallen $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass gilt

$$M = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{und} \quad \text{vol}_n(I_k \cap I_j) = 0 \quad \text{für } k \neq j.$$

Jede (beschränkte oder unbeschränkte) offene Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ besitzt eine Ausschöpfung.



Die folgende Definition erklärt das bestimmte Integral und das uneigentliche Integral über offene (beschränkte und unbeschränkte) Mengen:

Definition 19.10 (absolute Integrierbarkeit)

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei offen und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig. Die Folge $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sei eine Ausschöpfung von M und die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{I_k} |f(\vec{x})| d\vec{x} =: A \quad (*)$$

sei konvergent (gegen $A \in \mathbb{R}$). Dann konvergiert für **jede** Ausschöpfung $(J_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von M die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{J_k} f(\vec{x}) d\vec{x} =: B$$

gegen denselben Grenzwert $B \in \mathbb{R}$, und wir nennen $\int_M f = \int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = B$ das INTEGRAL VON f ÜBER DIE MENGE M .

Die Funktion f heißt wegen der Beziehung (*) ABSOLUT-INTEGRIERBAR über M .

Satz 19.11 (Integrale über beschränkte Mengen)

- Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und **beschränkt** und ist $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf der abgeschlossenen Hülle von M , so existiert das Integral $\int_M f(\vec{x}) d\vec{x}$.
- Für $\int_M f$ gelten die Rechenregeln der Linearität und Monotonie sowie die Betragsabschätzung (vgl. Satz 19.3).
- Weiter gilt für jede Zerlegung in offene Mengen $M_k \subseteq M$ mit

$$\text{vol}_n(M \setminus \bigcup_{k=1}^N M_k) = 0, \quad \text{vol}_n(M_j \cap M_k) = 0 \quad \text{für } j \neq k$$

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{k=1}^N \int_{M_k} f(\vec{x}) d\vec{x}. \quad (\text{ADDITIVITÄT})$$

Definition 19.12 (Volumen und Nullmenge)

Für eine beschränkte offene Menge M bezeichnet

$$\text{vol}_n(M) = \int_M 1 \, d\vec{x}$$

das VOLUMEN von M .

Ist N eine beliebige Menge, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Menge M existiert mit $N \subset M$ und $\text{vol}_n(M) < \varepsilon$, so heißt N NULLMENGE.

Der Satz von Fubini gilt für absolut-integrierbare stetige Funktionen auch auf unbeschränkten Intervallen:

Satz 19.13 (Satz von Fubini (allgemeine Version))

Die Intervalle $I_1, \dots, I_n \subseteq \mathbb{R}$ seien offen und die Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ sei stetig. Dann gilt:

- f ist genau dann absolut-integrierbar über I , wenn das iterierte Integral von $|f|$ existiert, also

$$\int_{I_1} \left(\int_{I_2} \dots \left(\int_{I_n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)| dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1 < \infty$$

gilt. Hierbei darf die Reihenfolge der Integration beliebig vertauscht werden.

- Falls f absolut-integrierbar ist, so gilt

$$\int_I f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} \dots \left(\int_{I_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n \right) \dots dx_2 \right) dx_1,$$

und die Reihenfolge der Integration darf beliebig vertauscht werden.

Die Berechnung von Integralen über speziellen Gebieten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gelingt durch die Anwendung des “iterierten Integrals”.

Definition 19.14 (schlichte Gebiete, Fundamentalgebiete)

Ein Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

SCHLICHT ÜBER DEM (x_1, \dots, x_{n-1}) -KOORDINATENBEREICH,

wenn ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ sowie stetige Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$ existieren, so dass

- $\varphi_1(\vec{z}) < \varphi_2(\vec{z})$ für alle $\vec{z} \in G$ und
- $M = \{(\vec{z}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{z} \in G, \varphi_1(\vec{z}) < x_n < \varphi_2(\vec{z})\}$

gilt. Analog wird diese Eigenschaft über anderen Koordinatenbereichen $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ definiert.

Ein Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt FUNDAMENTALGEBIET, wenn es in endlich viele paarweise disjunkte schlichte Gebiete $M_k \subseteq M$, $k = 1, \dots, N$, zerlegt werden kann. Genauer:

$$M_j \cap M_k = \emptyset \quad \text{für } j \neq k, \quad \text{vol}_n(M \setminus \bigcup_{k=1}^N M_k) = 0,$$

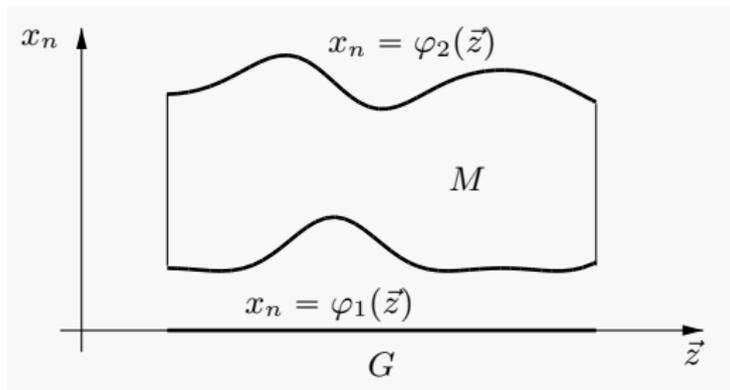
Satz 19.15 (Integration über schlichte Gebiete)

Das Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei schlicht über dem (x_1, \dots, x_{n-1}) -Koordinatenbereich,

$$M = \{(\vec{z}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \vec{z} \in G, \varphi_1(\vec{z}) < x_n < \varphi_2(\vec{z})\}$$

mit stetigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1 < \varphi_2$. Für eine stetige Funktion $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_G \left(\int_{\varphi_1(\vec{z})}^{\varphi_2(\vec{z})} f(\vec{z}, x_n) dx_n \right) d\vec{z}.$$



Spezialfälle für $n = 2$:

- M schlicht über der x -Achse mit

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (a, b), \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$$

ergibt

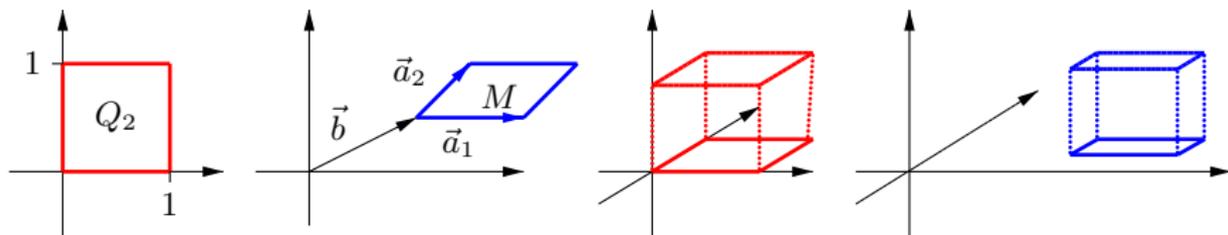
$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

- M schlicht über der y -Achse mit

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in (c, d), \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$$

ergibt

$$\int_M f(x, y) d(x, y) = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$



Die geometrische Grundidee der Substitutionsregel im \mathbb{R}^2 :

Das Quadrat $Q_2 = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ wird durch die affine Koordinatentransformation

$$T : Q_2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(x, y) = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 + \vec{b},$$

mit linear unabhängigen Richtungsvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \in \mathbb{R}^2$ und $\vec{b} \in \mathbb{R}^2$ bijektiv auf das Parallelogramm $M = T(Q_2)$ abgebildet.

Für die Matrix $A = (\vec{a}_1, \vec{a}_2)$ gilt $|\det A| = \text{vol}_2(M)$, siehe Bemerkung 8.22.

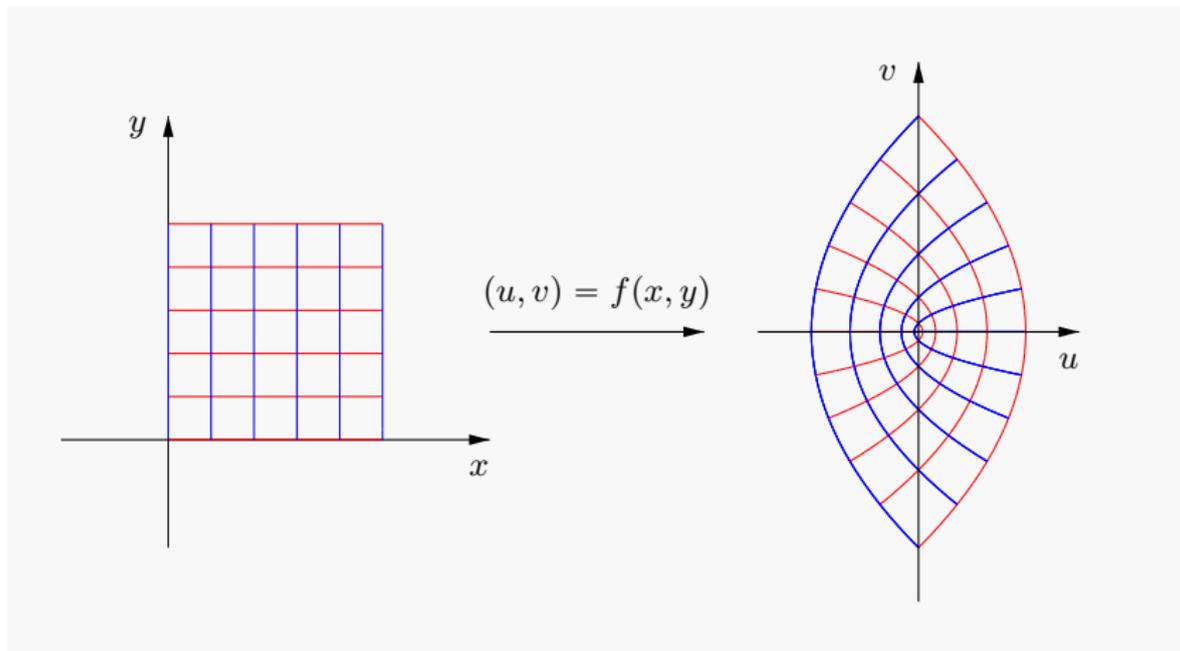
Integration:

$$|\det A| \text{vol}_2(Q_2) = \text{vol}_2(M)$$

Für Treppenfunktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$|\det A| \int_{Q_2} (f \circ T)(u, v) d(u, v) = \int_M f(x, y) d(x, y)$$

Bemerkung: Eine (total) differenzierbare Funktion $T : N \rightarrow M$ mit invertierbarer Jacobi-Matrix $DT(\vec{y})$ verhält sich **lokal** fast wie eine affine Koordinatentransformation (1. Taylor-Polynom).



Satz 19.16 (Substitutionsregel)

Die Mengen $M, N \subset \mathbb{R}^n$ seien beschränkt und offen. Die Funktion $f : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und die Abbildung $T : N \rightarrow M$ sei bijektiv, stetig differenzierbar und ihre Jacobi-Matrix $DT(\vec{y})$ sei für jedes $\vec{y} \in N$ invertierbar.

Dann gilt die TRANSFORMATIONSFORMEL

$$\int_M f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_N (f \circ T)(\vec{y}) |\det DT(\vec{y})| d\vec{y}.$$

Bemerkung:

- Bei der Bijektion T dürfen Teilmengen $K \subset M$ bzw. $L \subset N$ mit $\text{vol}_n(K) = \text{vol}_n(L) = 0$ weggelassen werden.
- Die Transformationsformel gilt für absolut-integrierbare stetige Funktionen auch auf unbeschränkten offenen Mengen.

Für eine allgemeine Integrationstheorie benötigt man den Begriff des **Lebesgue-Integrals** (Henri Lebesgue, 1875–1941). Ein zentraler Begriff ist hierbei die “Messbarkeit” von Mengen. Ohne hierauf weiter eingehen zu wollen, geben wir ein spezielles Resultat zur Volumenberechnung an.

Satz 19.17 (Prinzip von Cavalieri)

Das Volumen $V = \text{vol}_3(M)$ einer beschränkten messbaren Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ist gleich dem Integral über den Flächeninhalt der Querschnitte

$$M_s = \{(x, y, z) \in M \mid z = s\},$$

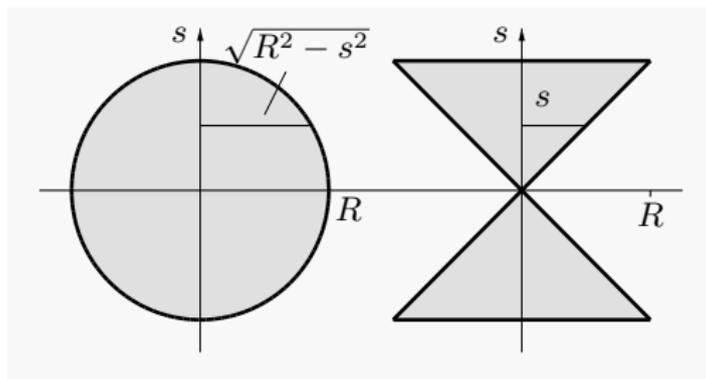
d.h. es gilt

$$\text{vol}_3(M) = \int_M d(x, y, z) = \int_a^b \text{vol}_2(M_s) ds.$$

Hierbei sind $a, b \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $M \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq z \leq b\}$ gilt.

Folgerung: Körper, die in jeder Höhe $z = s$ gleichen Flächeninhalt des Querschnitts haben, haben das gleiche Volumen.

Beispiel: Die Kugel vom Radius R und das Komplement des Doppelkegels im Zylinder vom Radius R und Höhe $2R$ haben das gleiche Volumen.



$$\pi(\sqrt{R^2 - s^2})^2 + \pi s^2 = \pi R^2$$

Anwendung des Prinzips von Cavalieri:

Satz 19.18 (Volumen von Rotationskörpern)

Durch die stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ wird der ROTATIONSKÖRPER

$$M_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}$$

(bei Rotation um die x -Achse) definiert. Sein Volumen ist

$$\text{vol}_3(M_f) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$

Anwendung: Schwerpunkt bei inhomogener Massenverteilung**Satz 19.19 (Schwerpunkt)**

$U \subseteq \mathbb{R}^3$ sei beschränkt und offen, $\varrho : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varrho > 0$ sei stetig. Bezeichnet ϱ die Massenverteilung auf U , so ist

- die Gesamtmasse von U gegeben durch $m(U) := \int_U \varrho(x, y, z) d(x, y, z)$,
- der Schwerpunkt von U gegeben durch

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{pmatrix} = \frac{1}{m(U)} \int_U \varrho(x, y, z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d(x, y, z).$$

Hierbei ist das Integral der rechten Seite bezüglich jeder Komponente zu bilden.

Anwendung: Trägheitsmoment

Wenn ein Körper $U \subseteq \mathbb{R}^3$ mit der Massenverteilung $\varrho : U \rightarrow \mathbb{R}$, $\varrho > 0$, um eine feste Achse (=Gerade G) rotiert, ist für eine Änderung seiner Rotationsgeschwindigkeit nicht nur die Gesamtmasse, sondern auch die Massenverteilung bezogen auf den Abstand zur Drehachse relevant (z.B. Pirouetteneffekt beim Eiskunstlauf).

Definition 19.20 (Trägheitsmoment)

Das TRÄGHEITSMOMENT von U bezogen auf die Drehachse G ist die Zahl

$$m_T(U; G) := \int_U (r(x, y, z))^2 \varrho(x, y, z) d(x, y, z),$$

wobei $r(x, y, z)$ den Abstand des Punktes (x, y, z) von der Geraden G bezeichnet.

Zum Abschluss wird eine Ergänzung zum Parameterintegral 17.17 gegeben.

Satz 19.21 (Stetigkeit von Parameterintegralen)

Es seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Die Funktion $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig, und es existiere eine stetige Funktion $g : V \rightarrow \mathbb{R}$, $g \geq 0$ und über V integrierbar, mit $|f(\vec{x}, \vec{y})| \leq g(\vec{y})$ für alle $(\vec{x}, \vec{y}) \in U \times V$. Dann ist die Funktion

$$F : U \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(\vec{x}) = \int_V f(\vec{x}, \vec{y}) \, d\vec{y}$$

wohldefiniert und stetig.

Die Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ erhält man unter den weiteren Voraussetzungen:

- (i) Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_k} : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$ existiert und ist stetig.
- (ii) Es existiert eine stetige Funktion $h : V \rightarrow \mathbb{R}$, $h \geq 0$ und über V integrierbar, mit $|\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}, \vec{y})| \leq h(\vec{y})$ für alle $(\vec{x}, \vec{y}) \in U \times V$.

Dann gilt

$$\frac{\partial F}{\partial x_k} = \int_V \frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x}, \vec{y}) \, d\vec{y}.$$

Kapitel 20 – Kurven- und Flächenintegrale

Kurven- und Flächenintegrale

Übersicht:

1. Kurvenintegrale (20.1–20.11)

- Parametrisierte Kurven im \mathbb{R}^n , reguläre Kurven
- Kurvenintegral skalarer Funktionen
- Kurvenintegral von Vektorfeldern, Wegunabhängigkeit und Potential

2. Oberflächenintegrale (20.12–20.19)

- Parametrisierte Flächenstücke im \mathbb{R}^3 , Normalenfeld
- Oberflächenintegral skalarer Funktionen
- Oberflächenintegral von Vektorfeldern, “Fluss”
- Flächeninhalt von Rotationsflächen

Definition 20.1 (parametrisierte Kurve)

Eine stetige Abbildung

$$\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

heißt WEG oder PARAMETRISIERTE KURVE. Die Bildmenge

$$\text{Spur}(\vec{c}) := \{\vec{c}(t) \mid t \in [a, b]\}.$$

heißt SPUR bzw. KURVE. Die Punkte $P_1 = \vec{c}(a)$ und $P_2 = \vec{c}(b)$ heißen ANFANGS- bzw. ENDPUNKT des Weges. Gilt $P_1 = P_2$, so heißt \vec{c} GESCHLOSSENER WEG.

Der Weg \vec{c} heißt REGULÄR, wenn \vec{c} stetig differenzierbar ist und für alle $t \in [a, b]$ gilt

$$\dot{\vec{c}}(t) := (c'_1(t) + \cdots + c'_n(t)) \neq \vec{0}.$$

Er heißt STÜCKWEISE REGULÄR, wenn es eine Unterteilung

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_N = b$$

gibt, so dass die Kurvenstücke $\vec{c}|_{[a_k, a_{k+1}]}$, $0 \leq k \leq N - 1$, regulär sind.

Definition 20.2 (Zulässige Parametertransformation)

Gegeben sei ein Weg $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine bijektive und stetig differenzierbare Funktion $\tau : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ mit $\tau'(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ (also streng monoton wachsend) heißt ZULÄSSIGE PARAMETERTRANSFORMATION.

Diese Transformation ergibt den neuen Weg

$$\vec{d} := \vec{c} \circ \tau^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

mit gleicher Spur,

$$\text{Spur}(\vec{d}) = \text{Spur}(\vec{c}).$$

Die Wege \vec{c} und \vec{d} heißen ÄQUIVALENT.

$$\begin{array}{ccccc}
 & \xrightarrow{\varrho = \tau^{-1}} & & \xrightarrow{\vec{c}} & \\
 [\alpha, \beta] & \xrightarrow{\quad} & [a, b] & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\
 & \xleftarrow{\tau} & & &
 \end{array}$$

Definition 20.3 (Tangentenfeld und Bogenlänge)

Ein stetig differenzierbarer Weg $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ besitzt das TANGENTENFELD $\dot{\vec{c}} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die BOGENLÄNGE von \vec{c} ist gegeben durch

$$\ell_{\vec{c}} = \int_a^b |\dot{\vec{c}}(t)| dt.$$

Bemerkungen:

- Motivation der Definition: Wird ein Streckenzug in Spur (\vec{c}) "einbeschrieben", so konvergiert dessen Länge bei immer feinerer Unterteilung gegen das Integral $\int_a^b |\dot{\vec{c}}(t)| dt$.
- Bei zulässiger Parametertransformation $\varrho = \tau^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ ändert sich nur die Länge des Tangentenfelds, nicht aber seine Richtung:

$$\frac{d}{du}(\vec{c} \circ \varrho)(u) = \dot{\vec{c}}(\varrho(u)) \underbrace{\varrho'(u)}_{> 0} \in \mathbb{R}^n.$$

- Die Bogenlänge hängt nicht von der Parametrisierung ab!

Beweis: Für eine zulässige Parametertransformation $\varrho = \tau^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ gilt wegen $\varrho' > 0$

$$\int_a^b |\dot{\vec{c}}(t)| dt = \int_\alpha^\beta |\dot{\vec{c}}(\varrho(u))| \varrho'(u) du = \int_\alpha^\beta \left| \frac{d}{du} (\vec{c} \circ \varrho)(u) \right| du.$$

- Die Bogenlänge eines stückweise regulären Wegs ist die Summe der Bogenlängen der einzelnen Wegstücke.
- Die Bogenlänge des Wegstücks vom Anfangspunkt $P_1 = \vec{c}(a)$ bis zum Punkt $P = \vec{c}(s)$ ist

$$\ell_{\vec{c}}(s) = \int_a^s |\dot{\vec{c}}(t)| dt, \quad s \in [a, b].$$

Eine besondere Parametrisierung ist die folgende:

Satz 20.4 (Parametrisierung nach Bogenlänge)

Zu jedem regulären Weg \vec{c} gibt es einen äquivalenten Weg $\vec{d}: [0, \ell_{\vec{c}}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$|\dot{\vec{d}}(t)| = 1 \quad \text{für alle } t \in [0, \ell_{\vec{c}}].$$

Der Weg \vec{d} ist dann NACH BOGENLÄNGE PARAMETRISIERT. Insbesondere gilt $\ell_{\vec{d}}(s) = s$.

Die 2 Typen von Kurvenintegralen

Definition 20.5 (skalares Kurvenintegral)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\vec{c} : [a, b] \rightarrow M$ ein stückweise regulärer Weg. Dann ist das (SKALARE) KURVENINTEGRAL von f längs \vec{c} definiert als

$$\int_{\vec{c}} f \, ds := \int_a^b f(\vec{c}(t)) |\dot{\vec{c}}(t)| \, dt.$$

Definition 20.6 (vektorielles Kurvenintegral)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\vec{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $\vec{c} : [a, b] \rightarrow M$ ein stückweise regulärer Weg. Dann ist das (VEKTORIELLE) KURVENINTEGRAL von \vec{g} längs \vec{c} definiert als

$$\int_{\vec{c}} \vec{g} \cdot d\vec{x} := \int_a^b \vec{g}(\vec{c}(t)) \cdot \dot{\vec{c}}(t) \, dt;$$

Hierbei bedeutet " \cdot " das Skalarprodukt in \mathbb{R}^n .

Bemerkung:

- Andere Schreibweisen des vektoriiellen Kurvenintegrals

$$\begin{aligned}\int_{\vec{c}} \vec{g} \cdot d\vec{x} &= \int_C g_1 dx_1 + \cdots + g_n dx_n \\ &= \int_a^b [g_1(\vec{c}(t)) c'_1(t) + \cdots + g_n(\vec{c}(t)) c'_n(t)] dt.\end{aligned}$$

- Die Integrale werden in die Stücke zu regulären Teilen der parametrisierten Kurve zerlegt.

Satz 20.7 (Unabhängigkeit von der Parametrisierung)

Beide Kurvenintegrale sind unabhängig von der Parametrisierung. Genauer: ist \vec{d} ein zu \vec{c} äquivalenter Weg, so stimmen die Kurvenintegrale längs \vec{c} und \vec{d} überein.

Definition: Zu $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ definieren wir den “umgekehrten Weg”

$$-\vec{c} \text{ durch } -\vec{c}: [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad -\vec{c}(t) = \vec{c}(-t).$$

Der Weg wird so in Gegenrichtung durchlaufen.

- Für das skalare Kurvenintegral gilt

$$\int_{-\vec{c}} f \, ds = \int_{\vec{c}} f \, ds.$$

- Für das vektorielle Kurvenintegral gilt

$$\int_{-\vec{c}} \vec{g} \cdot d\vec{x} = - \int_{\vec{c}} \vec{g} \cdot d\vec{x}.$$

- Die Bogenlänge von \vec{c} ist das skalare Kurvenintegral $\int_{\vec{c}} 1 ds$.

Physikalische Interpretation: Die Bahnkurve eines Partikels in Abhängigkeit der Zeit t werde durch $\vec{c}: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschrieben. Dann stellt $\dot{\vec{c}}(t) \in \mathbb{R}^3$ den Geschwindigkeitsvektor zum Zeitpunkt t dar. Der zurückgelegte Weg bis zur Zeit T ist

$$\ell_{\vec{c}}(T) = \int_0^T |\dot{\vec{c}}(t)| dt.$$

- Gegeben sei ein Kraftfeld $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Wird ein Massepunkt längs der Spur von \vec{c} verschoben, so ist die geleistete **Arbeit**

$$w = \int_{\vec{c}} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_a^b \vec{F}(\vec{c}(t)) \cdot \dot{\vec{c}}(t) dt.$$

Für eine Klasse von vektoriellen Kurvenintegralen hängt der Wert $\int_{\vec{c}} \vec{g} \cdot d\vec{x}$ nur vom **Anfangspunkt** P_1 und vom **Endpunkt** P_2 von \vec{c} ab, aber nicht vom Verlauf der Kurve von P_1 nach P_2 . Man bezeichnet diesen Fall als **WEGUNABHÄNGIGKEIT DES KURVENINTEGRALS**.

Definition 20.8 (Gradientenfeld, Potential)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $\vec{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld.

Wenn es eine skalare Funktion $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\text{grad } F(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{x}) \quad \text{für alle } \vec{x} \in M,$$

so heißt \vec{g} ein **GRADIENTENFELD** und F heißt ein **POTENTIAL** von \vec{g} .

Bemerkung: Ist $\vec{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Gradientenfeld und $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein zugehöriges Potential, so sind **alle** Potentiale von \vec{g} gegeben durch $F + c$, $c \in \mathbb{R}$ (Folgerung aus Satz 17.20). Das Potential verallgemeinert also den Begriff der Stammfunktion in 16.10 auf Vektorfelder \vec{g} .

Die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals $\int_{\vec{c}} \vec{g} \cdot d\vec{x}$ und die Existenz eines Potentials hängen direkt zusammen:

Satz 20.9 (Wegunabhängigkeit bei Gradientenfeldern)

Ein stetiges Vektorfeld $\vec{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf dem Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *genau dann* ein Gradientenfeld, wenn das vektorielle Kurvenintegral

$$\int_{\vec{c}} \vec{g} \cdot d\vec{x}$$

längs *jedes* stückweise regulären Wegs mit Spur $(\vec{c}) \subset M$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von \vec{c} abhängt.

Satz 20.10 (Notwendige und hinreichende Kriterien für die Existenz eines Potentials)

$M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei ein Gebiet und $\vec{g} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar.

- (a) **Notwendig** dafür, dass \vec{g} ein Gradientenfeld auf M ist, sind die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_\ell} = \frac{\partial g_\ell}{\partial x_k} \quad \text{für alle } 1 \leq k < \ell \leq n.$$

- (b) **Hinreichend** dafür, dass \vec{g} ein Gradientenfeld auf M ist, sind die Integrabilitätsbedingungen in (a) **und** die Eigenschaft, dass M sternförmig ist (siehe 17.1).

Bemerkung: Die "richtige" hinreichende Bedingung in (b) an das Gebiet M ist:

M ist einfach zusammenhängend.

Dies bedeutet, dass sich jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt, ohne die Menge zu verlassen.

Für spezielle Gebiete M lässt sich das Potential explizit berechnen:

Satz 20.11 (Potentialberechnung)

Im Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^2$ gebe es einen Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$ so, dass für jeden Punkt $Q = (x, y) \in M$ die beiden Verbindungsstrecken von P_0 nach $P_1 = (x, y_0)$ und weiter von P_1 nach Q in M liegen.

Wenn $\vec{g} = (g_1, g_2) : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist und die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}$ erfüllt, so ist durch

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x g_1(\xi, y_0) d\xi + \int_{y_0}^y g_2(x, \eta) d\eta$$

ein Potential von \vec{g} definiert.

Flächenintegrale

Definition 20.12 (orientiertes Flächenstück)

Eine stetige Abbildung

$$\vec{\phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eines Gebietes $G \subseteq \mathbb{R}^2$ in den \mathbb{R}^3 heißt PARAMETRISIERUNG von $F := \vec{\phi}(G) \subset \mathbb{R}^3$.

F heißt ORIENTIERTES FLÄCHENSTÜCK, wenn es eine Parametrisierung $\vec{\phi}$ besitzt, so dass:

- 1) $\vec{\phi}$ ist injektiv und stetig differenzierbar und für alle $(u, v) \in G$ gilt

$$\text{Rang } D\vec{\phi}(u, v) = \text{Rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} = 2.$$

- 2) Die Umkehrabbildung $\vec{\phi}^{-1} : F \rightarrow G$ ist stetig.

Bemerkung:

Hält man den Parameter v fest, dann definiert $u \mapsto \vec{\phi}(u, v)$ einen Weg \vec{c}_v , der vollständig in dem Flächenstück F verläuft. Man nennt diesen Weg die *Parameterlinie* zum Parameter v . Zusammen mit den Parameterlinien \vec{c}_u zum Parameter u ergibt sich ein “Vierecksmuster” auf dem Flächenstück.

Beispiele:

Der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ ist ein orientiertes Flächenstück im \mathbb{R}^3 : als Parameterdarstellung wählen wir

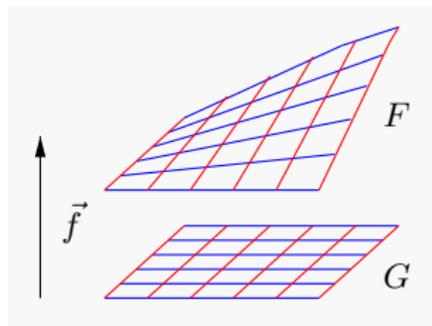
$$\vec{\phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\phi}(u, v) = (u, v, g(u, v)).$$

Die partiellen Ableitungen

$$(a) \quad \vec{\phi}_u(u, v) = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_u(u, v) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\phi}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{\phi}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_v(u, v) \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.



- (b) Die Oberfläche der Kugel B vom Radius R mit Mittelpunkt $\vec{0}$ hat die Parameterdarstellung

$$\vec{\phi} : (0, 2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{\phi}(u, v) = \begin{pmatrix} R \cos u \cos v \\ R \sin u \cos v \\ R \sin v \end{pmatrix}.$$

(Genauer: die Parameterdarstellung liefert B ohne den Halbkreis vom Nord- zum Südpol, der die x -Achse schneidet.)

Die Parameterlinien sind die Längengrade $u = u_i$ und die Breitenkreise $v = v_i$, die aus der Erd-Geographie bekannt sind. Die partiellen Ableitungen

$$\vec{\phi}_u(u, v) = \begin{pmatrix} -R \sin u \cos v \\ R \cos u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\phi}_v(u, v) = \begin{pmatrix} -R \cos u \sin v \\ -R \sin u \sin v \\ R \cos v \end{pmatrix}$$

sind für alle $-\pi/2 < v < \pi/2$ linear unabhängig.

Beachte: Die gesamte Kugel B kann durch 2 orientierte Flächenstücke überdeckt werden.)

- (c) Der Zylinder-Mantel (mit Deckel und Boden) lässt sich durch 4 orientierte Flächenstücke überdecken.

Bemerkung: In der Praxis wählt man die Koordinaten oft so, dass F bis auf Nullmengen im Parameterbereich parametrisiert wird (für die Kugel B würde $\vec{\Phi}$ aus a) demnach ausreichen). Diese Nullmengen ändern den Wert von Integralen nicht.

Definition 20.13 (zulässige Parametertransformation)

Gegeben sei ein orientiertes Flächenstück F mit der Parametrisierung $\vec{\phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet).

Eine bijektive und stetig differenzierbare Funktion $\tau : G \rightarrow H$ von G in ein Gebiet $H \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt ZULÄSSIGE PARAMETERTRANSFORMATION, wenn für die Jacobi-Matrix $D\tau$ gilt

$$\det D\tau(u, v) > 0 \quad \text{für alle } (u, v) \in G.$$

Beachte: Mit $\varrho = \tau^{-1} = \begin{pmatrix} \varrho_1 \\ \varrho_2 \end{pmatrix}$ hat die neue Parametrisierung

$$\vec{\phi} \circ \varrho(\xi, \eta), \quad (\xi, \eta) \in H,$$

des gleichen Flächenstücks F die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial(\vec{\phi} \circ \varrho)}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \vec{\phi}_u(\varrho(\xi, \eta)) \varrho_{1,\xi}(\xi, \eta) + \vec{\phi}_v(\varrho(\xi, \eta)) \varrho_{2,\xi}(\xi, \eta),$$

$$\frac{\partial(\vec{\phi} \circ \varrho)}{\partial \eta}(\xi, \eta) = \vec{\phi}_u(\varrho(\xi, \eta)) \varrho_{1,\eta}(\xi, \eta) + \vec{\phi}_v(\varrho(\xi, \eta)) \varrho_{2,\eta}(\xi, \eta).$$

Definition 20.14 (Tangentialebene, Einheits-Normalenfeld)

Durch die Parameterdarstellung $\vec{\phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ sei ein orientiertes Flächenstück $F = \vec{\phi}(G)$ gegeben. Im Punkt $P = \vec{\phi}(u, v) \in F$ wird durch die beiden linear unabhängigen Richtungsvektoren

$$\vec{\phi}_u(u, v), \quad \vec{\phi}_v(u, v)$$

die TANGENTIALEBENE

$$T_P(M) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \vec{\phi}(u, v) + s\vec{\phi}_u(u, v) + t\vec{\phi}_v(u, v) \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}\}$$

definiert.

Ein Normalenvektor dieser Tangentialebene $T_P(M)$ ist $\vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v) \in \mathbb{R}^3$.
Durch Normierung erhalten wir den EINHEITS-NORMALENVEKTOR

$$\vec{n}(u, v) = \frac{1}{\left| \vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v) \right|} (\vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v)).$$

Das so definierte Vektorfeld $\vec{n} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt das EINHEITS-NORMALENFELD von M .

Bemerkung:

- Zur Darstellung des Vektorfeldes \vec{n} zeichnet man jeweils den Vektor vom Anfangspunkt $P = (x, y, z) = \vec{\phi}(u, v) \in F$ zur Spitze $P + \vec{n}(u, v)$. Dieser steht im Punkt P senkrecht auf dem Flächenstück F . In der Computergraphik benötigt man das Einheits-Normalenfeld zur Darstellung beleuchteter Objekte (Reflexion).
- Die drei Vektorfelder $\vec{\phi}_u$, $\vec{\phi}_v$, \vec{n} bilden auf ganz G ein RECHTSSYSTEM (siehe Dreifingerregel)

Beispiele:

- (a) Ist F der Graph der Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{\phi}(u, v) = (u, v, g(u, v))$ die Parameterdarstellung wie in den Beispielen nach 20.12, so ist

$$\vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ g_u(u, v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ g_v(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g_u(u, v) \\ -g_v(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Einheits-Normalenvektor im Punkt $P = (u, v, g(u, v))$ des Graphen lautet also

$$\vec{n}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{1 + (g_u(u, v))^2 + (g_v(u, v))^2}} \begin{pmatrix} -g_u(u, v) \\ -g_v(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Für die Oberfläche der Kugel vom Radius R mit der Parameterdarstellung

$$(x, y, z) = \vec{\phi}(s, t) = \begin{pmatrix} R \cos u \cos v \\ R \sin u \cos v \\ R \sin v \end{pmatrix} \text{ erhalten wir}$$

$$\vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v) = R^2 \begin{pmatrix} \cos u \cos^2 v \\ \sin u \cos^2 v \\ \sin u \cos v \end{pmatrix} = R^2 \cos v \begin{pmatrix} x/R \\ y/R \\ z/R \end{pmatrix}.$$

Der Einheits-Normalenvektor im Punkt $(x, y, z) = \vec{\phi}(u, v)$ ist also

$$\vec{n}(u, v) = \frac{1}{R} (x, y, z)^T.$$

(c) Ein IMPLIZIT DEFINIERTES FLÄCHENSTÜCK ist eine Teilmenge

$$F \subseteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid H(x, y, z) = 0\}$$

der Niveaulfläche $H(x, y, z) = 0$, wobei $H : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Für ein $\vec{a} \in F$ mit $H_z(\vec{a}) > 0$ ist das Flächenstück F (lokal) der Graph der implizit definierten Funktion

$$s : G \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet ist, das eine Umgebung von (a_1, a_2) enthält (siehe Satz über implizite Funktionen 18.11). Die Normalenrichtung berechnet man mit Satz 18.11 als

$$(-s_x, -s_y, 1) = \left(\frac{H_x}{H_z}, \frac{H_y}{H_z}, 1 \right) = \frac{1}{H_z} \nabla H.$$

Dieses Ergebnis deckt sich mit der Anschauung, dass der Gradient ∇H senkrecht auf der Niveaulfläche $H(x, y, z) = 0$ steht.

Bemerkung 20.15

- (i) Für festes v ist $\vec{\phi}_u(u, v)$ das Tangentenfeld der Parameterlinie zum Parameter v . Analog ist für festes u das Vektorfeld $\vec{\phi}_v(u, v)$ das Tangentenfeld der Parameterlinie zum Parameter $u = u_j$.
- (ii) Bei zulässiger Parametertransformation $\varrho = \tau^{-1} : H \rightarrow G$ ändert sich der Einheits-Normalenvektor im Punkt $P = \vec{\phi}(u, v) = (f \circ \varrho)(\xi, \eta)$ nicht.
- (iii) Die Berechnung der Länge $|\vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v|$ kann mit Hilfe der Formel

$$|\vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v|^2 = |\vec{\phi}_u|^2 |\vec{\phi}_v|^2 - (\vec{\phi}_u \cdot \vec{\phi}_v)^2$$

erfolgen.

Klassische Bezeichnung: $E := |\vec{\phi}_u|^2$, $F := (\vec{\phi}_u \cdot \vec{\phi}_v)$ und $G := |\vec{\phi}_v|^2$.

Die 2 Typen von Oberflächenintegralen

Definition 20.16 (skalares Oberflächenintegral)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $F = \vec{\phi}(G) \subseteq M$ ein orientiertes Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\vec{\phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dann ist das (SKALARE) OBERFLÄCHENINTEGRAL VON h ÜBER F definiert als

$$\int_F h dS = \int_F h(\vec{x}) dS(\vec{x}) = \int_G h(\vec{\phi}(u, v)) \left| \vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v) \right| d(u, v).$$

Der FLÄCHENINHALT von F ist der Wert des skalaren Oberflächenintegrals

$$\int_F dS = \int_G \left| \vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v) \right| d(u, v).$$

Mit $dS(\vec{x}) = \left| \vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v) \right| d(u, v)$ wird das sog. "Oberflächenelement" bezeichnet (engl. "surface element").

Interpretation: Der Flächeninhalt eines kleinen Rechtecks um $(u, v) \in G$ wird um den Faktor $\left| \vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v) \right|$ verzerrt.

Definition 20.17 (Vektorielltes Oberflächenintegral, Fluss)

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\vec{w} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig und $F = \vec{\phi}(G) \subseteq M$ ein orientiertes Flächenstück mit der Parameterdarstellung $\vec{\phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Dann ist das (VEKTORIELLE) OBERFLÄCHENINTEGRAL VON \vec{w} ÜBER F (auch der FLUSS VON \vec{w} DURCH F) definiert als

$$\int_F \vec{w} \cdot d\vec{o} = \int_F \vec{w}(\vec{x}) \cdot d\vec{o}(\vec{x}) := \int_F (\vec{w} \cdot \vec{n}) \, dS.$$

- Auf der rechten Seite steht das skalare Oberflächenintegral des Skalarprodukts von \vec{w} mit dem Einheits-Normalenfeld der Fläche F .

Bedeutung: nur die **Normal-Komponente** $\vec{w} \cdot \vec{n}$ des Vektorfelds \vec{w} bestimmt den Fluss durch die Fläche F .

Konsequenz: Ist \vec{w} in jedem Punkt von F parallel zur Tangentialebene, so ist

$$\int_F \vec{w} \cdot d\vec{o} = 0.$$

- Das vektorielle Oberflächenintegral ("Fluss durch F ") besitzt die Darstellung

$$\int_F \vec{w} \cdot d\vec{o} = \int_G \vec{w}(\vec{\phi}(u, v)) \cdot (\vec{\phi}_u(u, v) \times \vec{\phi}_v(u, v)) \, d(u, v).$$

Satz 20.18

Beide Oberflächenintegrale sind unabhängig von der Parameterdarstellung. Eine zulässige Parametertransformation ändert den Wert der Oberflächenintegrale nicht.

Bemerkung zur Orientierung:

Wird zu F mit der Parameterdarstellung $\vec{\phi} : G \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametertransformation $\tau : G \rightarrow H$ mit $\det D\tau < 0$ verwendet, so passiert Folgendes:

- Der Einheitsnormalenvektor wird in jedem Punkt $P \in F$ umgedreht.
- Hierdurch wird eine Parameterdarstellung der gleichen Oberfläche mit **entgegengesetzter Orientierung** erzeugt. Wir bezeichnen dann das zugehörige Flächenstück mit $-F$.
- Für das skalare Oberflächenintegral gilt

$$\int_{-F} h \, dS = \int_F h \, dS,$$

und für das vektorielle Oberflächenintegral gilt

$$\int_{-F} \vec{w} \cdot d\vec{\sigma} = - \int_F \vec{w} \cdot d\vec{\sigma}.$$

Anwendung: Berechnung der Oberfläche von Rotationsflächen

Satz 20.19 (Rotationsflächen)

Sei $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g \geq 0$. Lässt man den Graphen von g um die x -Achse rotieren, so entsteht die Rotationsfläche

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a < x < b, y^2 + z^2 = (g(x))^2\}.$$

Ihr Flächeninhalt ist

$$2\pi \int_a^b g(x) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

Kapitel 21 – Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung

Viele Prozesse der Natur werden durch Differentialgleichungen oder Systeme von Differentialgleichungen beschrieben. Hierbei werden Beziehungen zwischen der Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (z.B. zeitabhängige Größe $y(t)$ mit $t \in [a, b]$) und ihren Ableitungen $y'(t)$, $y''(t)$, ... dargestellt, die man nach y auflösen muss.



$$y' = \alpha y \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R},$$

exponentieller Wachstums- bzw. Zerfallprozess, allgemeine Lösung ist $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y(t) = Ce^{\alpha t}$ mit beliebiger Konstante $C \in \mathbb{R}$. Meist wird die Konstante durch die Angabe eines ANFANGSWERTS $y(t_0) = y_0$ bestimmt.



$$y' = \alpha y(R - y) \text{ mit } \alpha > 0,$$

logistischer Wachstumsprozess, Lösungen sind $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$y(t) = \frac{R}{1 + Ce^{-\alpha Rt}} \text{ mit beliebiger Konstante } C > 0. \text{ Zu dem Anfangswert } 0 < y(0) = y_0 < R \text{ ermittelt man } C = \frac{R}{y_0} - 1 > 0.$$

- Ein System von Differentialgleichungen kann die Dynamik und die Wechselwirkung mehrerer Prozesse modellieren, wie z.B. das Räuber-Beute-Modell von Lotka und Volterra: die Population der Beutetiere y_1 hat die exponentielle Wachstumsrate a , die jedoch durch die Anwesenheit der Raubtierpopulation y_2 (gewichtet mit der Beuterate b) vermindert wird. Die Differenz aus Reproduktions- und Sterberate der Raubtierpopulation y_2 schwankt in Abhängigkeit der Größe der Population der Beutetiere:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1(a - by_2) \\ y_2' &= y_2(cy_1 - d)\end{aligned}$$

Die interessante Feststellung, dass die Lösungen y_1 und y_2 periodisch sind, bezeichnet man als 1. Volterra-Regel. Man beachte noch, dass die konstanten Lösungen $y_1(t) = d/c$ und $y_2(t) = a/b$ für alle $t \in \mathbb{R}$ einen Gleichgewichtszustand (sog. Fixpunkt, stationäre Lösung) beschreiben.

Richtungsfeld

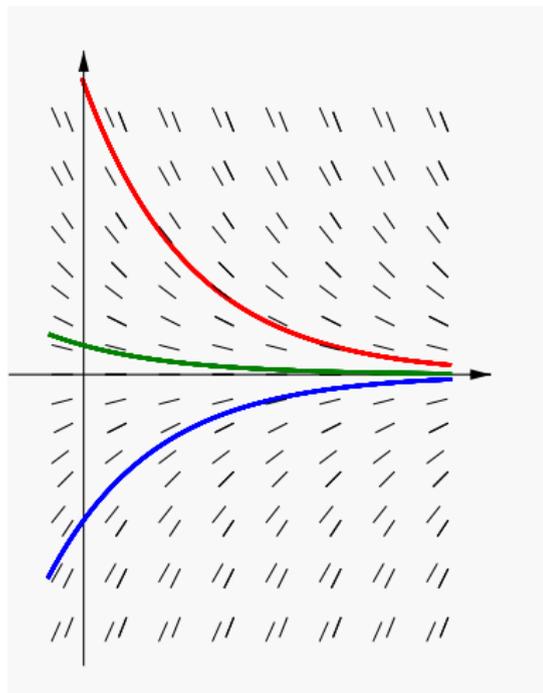
Die DIFFERENTIALGLEICHUNG

$$y' = f(x, y) \quad (*)$$

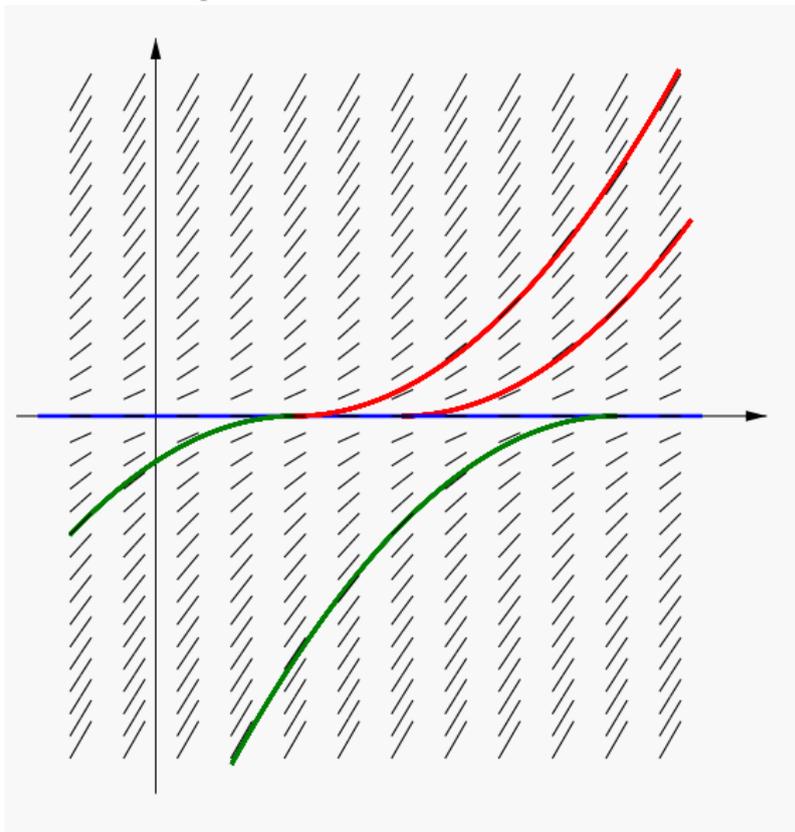
lässt sich veranschaulichen im RICHTUNGSFELD:

Gehört der Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ zum Graphen einer Lösung $y = y(x)$, so wird durch (*) die **Steigung** $y'(x) = f(x, y)$ in diesem Punkt angegeben. Zeichnet man ein kurzes Geradenstück mit dieser Steigung, so bekommt man einen Eindruck über den weiteren Verlauf des Graphen der Lösung:

- Zur Differentialgleichung $y' = -y$ erhalten wir z.B. die folgenden Lösungen: $y(x) = y(0)e^{-x}$.



- Zur Differentialgleichung $y' = \sqrt{|y|}$ erhalten wir Lösungen, die sich verzweigen können:



Lösungen sind z.B.

$$y_1 = \frac{1}{4}(x - d)^2 \quad (x > d)$$

$$y_2 = 0 \quad (b < x < c)$$

$$y_3 = -\frac{1}{4}(x - a)^2 \quad (x < a)$$

und Funktionen, die sich dar-
aus zusammensetzen lassen.

Definition 21.1 (Lösung einer Differentialgleichung)

Gleichungen der Gestalt

$$y' = f(x, y) \quad \text{oder} \quad F(x, y, y') = 0 \quad (*)$$

heißen (EXPLIZITE bzw. IMPLIZITE) Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Eine LÖSUNG der Differentialgleichung ist eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, die die Gleichung () für jedes $x \in I$ erfüllt.*

Beispiele:

- $y' = 2xy - x^2y^3$ ist eine explizite Dgl. 1. Ordnung.
- $y(y' + 1)^2 - \frac{y^2}{x^2} = 0$ ist eine implizite Dgl. 1. Ordnung.

Eine Dgl. hat im allgemeinen unendlich viele Lösungen (vgl. Integration).

Definition 21.2 (Anfangswertproblem (AWP))

Ein ANFANGSWERTPROBLEM besteht aus einer Differentialgleichung 1. Ordnung (explizit oder implizit) sowie einer Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ an einer festen Stelle x_0 .

Eine Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ der Dgl. ist auch Lösung des AWP, wenn

$$x_0 \in I \text{ und } y(x_0) = y_0.$$

Ziel:

- Berechnung der allgemeinen Form der Lösungen einer Dgl.
- Ergebnisse zu Existenz, maximalem Definitionsbereich und Eindeutigkeit der Lösungen eines AWP.

Der wichtigste Typ von Differentialgleichungen 1. Ordnung sind lineare Dgl.

Satz 21.3 (Lineare Dgl. 1. Ordnung)

Die explizite Dgl. 1. Ordnung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

mit stetigen Funktionen $p, q : I \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem offenen Intervall $I = (a, b)$ heißt
LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNG 1. ORDNUNG.

- (i) Die Abbildung $y \mapsto y' - p(x)y$ ist eine lineare Abbildung von $C^1(I)$ nach $C(I)$. Der Kern besteht aus den Lösungen der HOMOGENEN GLEICHUNG

$$y' = p(x)y.$$

- (ii) Der Raum der homogenen Lösungen hat die Dimension 1 und besteht aus den Vielfachen von

$$y_h(x) := e^{P(x)},$$

wobei P eine Stammfunktion von p ist, d.h. $P'(x) = p(x)$.

Fortsetzung von Satz 21.3

- (iii) Eine partikuläre Lösung y_p der INHOMOGENEN GLEICHUNG $y' - p(x)y = q(x)$ erhält man durch VARIATION DER KONSTANTEN:

$$y_p(x) = y_h(x) \int \frac{q(x)}{y_h(x)} dx.$$

- (iv) Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y(x) = C y_h(x) + y_p(x), \quad C \in \mathbb{R}$$

- (v) Für $x_0 \in I$ ist die **eindeutige** Lösung zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ gegeben durch

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{P(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^x q(t) e^{-P(t)} dt \right),$$

wobei $P(x) = \int_{x_0}^x p(t) dt$ die Stammfunktion von p mit $P(x_0) = 0$ ist.

Bemerkungen:

- Natürlich kann man das Anfangswertproblem statt wie in (v) auch so lösen, dass man in (iv) die passende Konstante C bestimmt.
- Bemerkenswert ist, dass die Lösung der linearen Dgl. 1. Ordnung im gesamten Intervall I , auf dem die Funktionen p, q stetig sind, existiert. Dies ist für nicht-lineare Dgl. nicht der Fall!

Zwei wichtige linearen Differentialgleichungen:

- (a) $y' = \alpha y$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$) hat die allgemeine Lösung $y(x) = Ce^{\alpha x}$ auf $I = \mathbb{R}$.
Zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ lautet die eindeutige Lösung

$$y(x) = y_0 e^{\alpha(x-x_0)}.$$

- (b) $y' = \frac{\alpha y}{x}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) hat die allgemeine Lösung $y(x) = Cx^\alpha$ auf $I = (0, \infty)$ bzw. $y(x) = C|x|^\alpha$ auf $I = (-\infty, 0)$.

Zum Anfangswert $y(x_0) = y_0$ mit $x_0 \neq 0$ lautet die eindeutige Lösung $y(x) = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^\alpha$ auf demjenigen der beiden Intervalle $(0, \infty)$ oder $(-\infty, 0)$, das x_0 enthält.

Durch Substitution lassen sich manche Differentialgleichungen in bekannte Typen überführen.

Satz 21.4 (Bernoulli-Dgl.)

Die explizite Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha \quad \text{mit } \alpha \neq 0, 1$$

heißt BERNOULLI'SCHE-DIFFERENTIALGLEICHUNG. Durch Substitution $u = y^{1-\alpha}$ (unter der Bedingung $y \neq 0, u \neq 0$) erhält man die lineare Dgl.

$$u' = (1 - \alpha)p(x)u + (1 - \alpha)q(x).$$

Weiterhin ist für $\alpha > 0$ immer $y \equiv 0$ eine Lösung.

Allgemeine explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung haben die Form

$$y' = f(x, y)$$

Satz 21.5 (Existenzsatz von Peano)

Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig im Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dann existiert zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in M$ ein Intervall $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sowie eine differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, die das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

auf I löst.

Satz 21.6 (Existenz- und Eindeigkeitssatz von Picard und Lindelöf)

Die Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig im Gebiet $M \subseteq \mathbb{R}^2$ und ihre partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$ existiere und sei ebenfalls stetig.

Dann existiert zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in M$ ein Intervall $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sowie eine differenzierbare Funktion $y : I \rightarrow \mathbb{R}$, die das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

auf I löst. Weiterhin gilt: Jede weitere Lösung $z = z(x)$ desselben AWP stimmt auf I mit y überein.

Bemerkung: Die lokale Eindeutigkeit besagt, dass sich Lösungen zu verschiedenen Anfangswerten in M nicht schneiden oder verzweigen können!

Die rechte Seite $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}^2$ sei stetig und stetig partiell nach y differenzierbar. Aus dem Existenz- und Eindeigkeitssatz 21.6 ergibt sich eine eindeutig bestimmte Lösung des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

mit einem “maximalen Definitionsbereich” $I = (a, b)$ um den Punkt x_0 : Das Intervall I ist so gross, dass der Graph der Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ an den Rand des Definitionsbereichs M stößt. (Dies kann auch ein uneigentlicher Grenzwert $\pm\infty$ sein.) Man sagt daher:

Die Lösungen des AWP gehen “von Rand zu Rand”.

Diskussion weiterer “Typen” von gewöhnlichen Differentialgleichungen:

- Dgl. mit getrennten Variablen (oder separierte Dgl.)
- Dgl. vom homogenen Typ
- exakte Dgl.

Definition 21.7 (Dgl. mit getrennten Variablen)

Seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung

$$y' = f(x)g(y)$$

heißt DGL. MIT GETRENNTEN VARIABLEN.

Sind f und g stetig differenzierbar und sind $x_0 \in I$, $y_0 \in J$ gegeben, so erhält man die eindeutige Lösung des AWP

- als konstante Funktion $y(x) = y_0$ für alle $x \in I$, falls $g(y_0) = 0$ ist;
- durch Auflösen der Gleichung

$$\int_{y_0}^y \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$$

nach y , falls $g(y_0) \neq 0$ ist. Hierbei ist ein maximaler Definitionsbereich $I_1 = (x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ von y zu bestimmen.

In der Praxis löst man oft $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$ nach y auf.

Definition 21.8 (Dgl. vom homogenen Typ)

Die gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

mit stetigem $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ heißt DGL. VOM HOMOGENEN TYP.

Die Substitution $u = \frac{y}{x}$ führt auf die Dgl. mit getrennten Variablen

$$u' = \frac{f(u) - u}{x}.$$

Beweis:

$$\frac{du}{dx} = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{x} = \frac{f(u) - u}{x}.$$

Dgl. vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

Zu stetigem $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ und Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$ betrachten wir die gewöhnliche Dgl.

$$y' = f(ax + by + c).$$

Substitution $u = ax + by + c$ ergibt

$$u' = a + by' = a + bf(u),$$

weiter mit getrennten Variablen.

Definition 21.9 (Exakte Dgl.)

Die gewöhnliche Dgl. 1. Ordnung

$$f_1(x, y) + f_2(x, y)y' = 0$$

mit einem stetigen Vektorfeld $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt EXAKTE DGL., wenn \vec{f} lokal ein Gradientenfeld ist (siehe Definition 20.8).

Ist F ein Potential von \vec{f} und ist (x_0, y_0) mit $f_2(x_0, y_0) \neq 0$ gegeben, so ist in einem Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ die Lösung des AWP

$$f_1(x, y) + f_2(x, y)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0,$$

eindeutig durch Auflösen von $F(x, y(x)) = F(x_0, y_0)$ bestimmt (siehe Satz 18.11).

Beweis: Satz über implizite Funktionen 18.11 anwenden und

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x, y(x)) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = f_1(x, y(x)) + f_2(x, y(x))y'(x)$$

beachten.

Bemerkungen:

- (a) In den meisten Fällen ist $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ stetig differenzierbar. \vec{f} ist lokal ein

Gradientenfeld genau dann, wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

gilt.

- (b) Häufig wird ein Gradientenfeld $\vec{f} = (f_1, f_2)$ erst durch Multiplikation der gegebenen Dgl. erzeugt: Wir nennen die Funktion $m(x, y)$ einen *integrierenden Faktor* oder *Eulerschen Multiplikator* der Dgl., wenn

$$m(x, y)f_1(x, y) + m(x, y)f_2(x, y)y' = 0$$

eine exakte Dgl. ist. Dann muss also

$$m_y f_1 + m f_{1,y} = m_x f_2 + m f_{2,x}$$

gelten.

Kapitel 22 – Systeme von Differentialgleichungen

Systeme von Differentialgleichungen

Im letzten Abschnitt wurde als Beispiel ein System von Differentialgleichungen vorgestellt:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1(a - by_2) \\ y_2' &= y_2(cy_1 - d).\end{aligned}$$

Es beschreibt das Lotka-Volterra-Modell der WECHSELWIRKUNG ZWEIER WACHSTUMSPROZESSE von Populationen y_1 (Beutetiere) und y_2 (Raubtiere). Dieses System ist NICHTLINEAR, weil Produkte der gesuchten Funktionen y_1y_2 auftreten.

Wir behandeln in diesem Kapitel:

- Allgemeine Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit der Lösung
- Lösung von linearen Dgl.-Systemen
 - Fundamentalsystem des homogenen Systems
 - Variation der Konstanten zur Lösung des inhomogenen Systems
 - Konstante Koeffizienten

Definition 22.1 (Differentialgleichungssystem 1. Ordnung)

Ein SYSTEM GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 1. ORDNUNG ist gegeben durch

$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\&\vdots \\y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n)\end{aligned}$$

In Vektorschreibweise lautet dies

$$Y' = F(x, Y).$$

Hierbei ist $F = (f_1, \dots, f_n)^T : I \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$ (mit $I \subseteq \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$) das gegebene Vektorfeld der rechten Seite und $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ die gesuchte differenzierbare vektorwertige Funktion.

Eine LÖSUNG des Dgl.-Systems ist eine differenzierbare vektorwertige Funktion $Y = (y_1, \dots, y_n)^T : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall $J \subseteq I$, die

$$Y'(x) = F(x, Y(x)) \quad \text{für alle } x \in J \text{ erfüllt.}$$

- ANFANGSWERTPROBLEM (AWP): Zum Dgl.-System $Y' = F(x, Y)$ mit $F : I \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird als Anfangsbedingung

$$Y(x_0) = Y_0$$

mit einem $x_0 \in I$ und einem Vektor $Y_0 \in M$ vorgegeben.

- **Beachte:** Wir haben nur eine "Variable" $x \in I$; der Vektor $Y'(x) = (y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x))^T$ besteht aus den üblichen Ableitungen der Komponenten-Funktionen y_1, \dots, y_n nach x .

Für Dgl.-Systeme 1. Ordnung bleiben die Sätze zur Existenz (Satz 21.5) und Eindeutigkeit (Satz 21.6) erhalten:

Satz 22.2 (Existenzsatz von Peano)

Die Funktion $F : I \times M \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig im Gebiet $I \times M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dann existiert zu jedem Punkt $(x_0, Y_0) \in I \times M$ ein Intervall $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sowie ein differenzierbares Vektorfeld $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, das das AWP

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0$$

auf J löst.

Satz 22.3 (Existenz- und Eindeigkeitsatz von Picard und Lindelöf)

Zusätzlich seien die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial y_k}$, $1 \leq k \leq n$, in $I \times M$ definiert und stetig.

Dann existiert zu jedem Punkt $(x_0, Y_0) \in I \times M$ ein Intervall $J = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ sowie ein differenzierbares Vektorfeld $Y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$, das das AWP

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0$$

auf J löst. Weiterhin gilt: Jede weitere Lösung $Z = Z(x)$ desselben AWP stimmt auf J mit Y überein.

Wie im skalaren Fall gilt auch hier:

Satz 22.4

Die Lösungen des AWP

$$Y' = F(x, Y), \quad Y(x_0) = Y_0,$$

gehen von Rand zu Rand des Definitionsbereichs von F .

Definition 22.5 (Autonome Systeme)

Ein Dgl-System heißt AUTONOM, wenn es die Form

$$Y' = F(Y)$$

hat, d.h. wenn die rechte Seite nicht von x abhängt.

Für autonome Systeme gilt: Ist $Y(x)$ eine Lösung mit dem Definitionsbereich (a, b) , dann ist für $c \in \mathbb{R}$ die Funktion $Y(x - c)$ eine Lösung auf $(a + c, b + c)$.

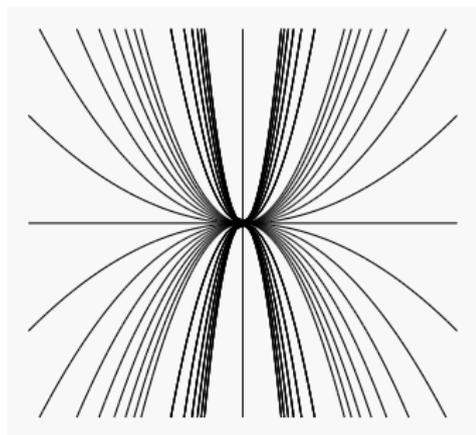
Definition 22.6 (Orbit)

Ist $Y' = F(Y)$ ein autonomes System und U eine Lösung mit Definitionsintervall I , so heißt die Menge $\{U(x) \mid x \in I\}$ ORBIT oder BAHNKURVE oder TRAJEKTORIE der Lösung. Der Definitionsbereich von F heißt PHASENRAUM.

Beispiel: Das System $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_1 \\ 2y_2 \end{pmatrix}$ hat die allgemeine Lösung $y_1(x) = C_1 e^x$, $y_2(x) = C_2 e^{2x}$.

Die Orbits sind

- der Ursprung
- $\{(y_1, 0) \mid y_1 > 0\}$
- $\{(y_1, 0) \mid y_1 < 0\}$
- $\{(0, y_2) \mid y_2 > 0\}$
- $\{(0, y_2) \mid y_2 < 0\}$
- alle Parabeln $y_2 = C y_1^2$ mit $C \in \mathbb{R}$.



Definition 22.7 (Erstes Integral)

Sei $Y' = F(Y)$ ein (autonomes) Dgl.-System mit Definitionsbereich $\mathbb{R} \times M$, wobei M ein Gebiet in \mathbb{R}^n ist. Eine Funktion $G : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt ERSTES INTEGRAL des Systems, wenn gilt: Ist $U(x)$ eine Lösung von $Y' = F(Y)$, so ist $G(U(x))$ konstant.

Bedeutung: Die Orbits verlaufen innerhalb der Höhenlinien von G .

Satz 22.8 (Berechnung eines ersten Integrals eines zweidimensionalen Systems)

Ist durch $G(y_1, y_2) = C$ eine Lösung der exakten Dgl.

$$f_2(y_1, y_2) \frac{dy_1}{dx} - f_1(y_1, y_2) \frac{dy_2}{dx} = 0,$$

gegeben, so ist G ein erstes Integral des Systems $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$

Beispiel: Das Dgl.-System von Lotka und Volterra lautet in Vektorschreibweise

$$Y' = F(Y)$$

mit $Y = (y_1, y_2)^T$ und der rechten Seite

$$F(Y) = \begin{pmatrix} y_1(a - by_2) \\ y_2(cy_1 - d) \end{pmatrix}.$$

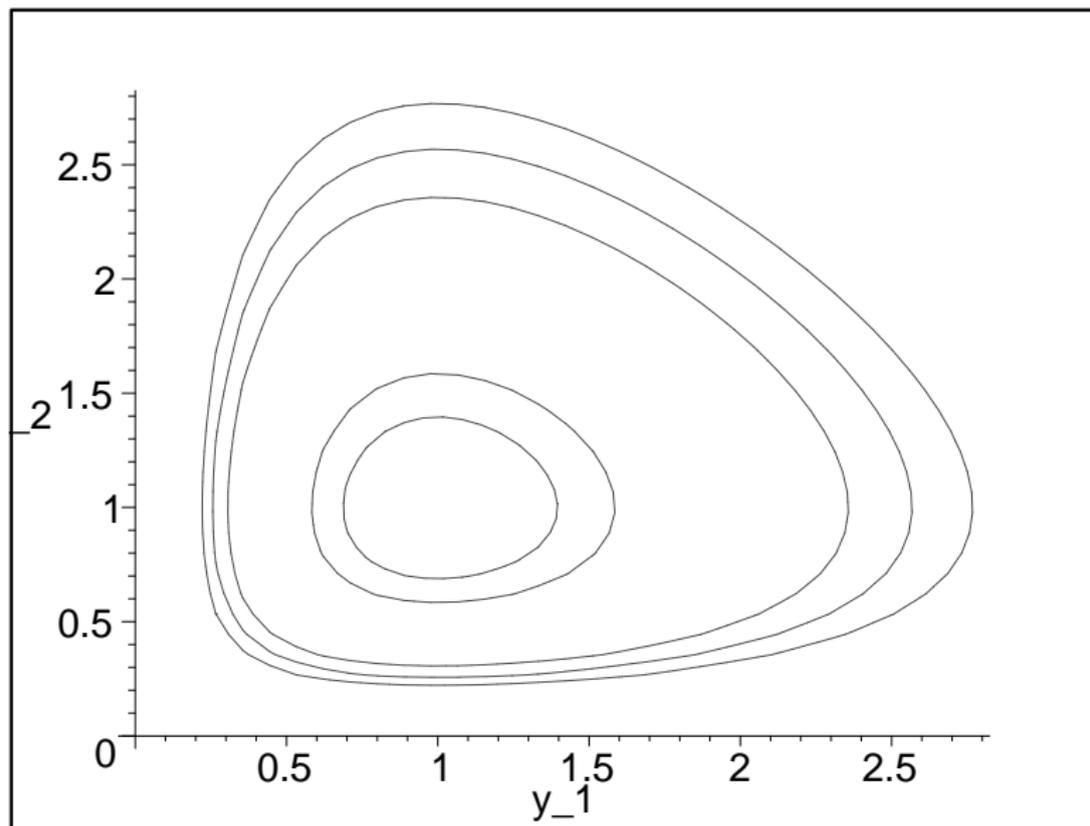
F ist in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ definiert (also $I = \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{R}^2$ in 22.2 und 22.3) und stetig.

Die partiellen Ableitungen nach y_1, y_2 existieren offensichtlich und sind stetig.

Also existiert die Lösung $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zu jedem Anfangswert $(x_0, Y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ und ist eindeutig.

Bemerkung: Falls die Lösungs-Komponenten $y_1, y_2 : J \rightarrow \mathbb{R}$ beide beschränkt sind, so folgt sogar $J = \mathbb{R}$.

Die Orbits der Volterra-Lotka-Dgl. für $a = b = c = d = 1$.



Der restliche Abschnitt behandelt LINEARE Systeme von Dgl'n.

Definition 22.9 (Lineares System 1. Ordnung)

Das Dgl.-System 1. Ordnung

$$\begin{aligned}y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \cdots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \cdots + a_{2n}(x)y_n + g_2(x) \\&\vdots \\y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \cdots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x)\end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen $a_{j,k} : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_j : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt LINEAR.

In Vektorschreibweise lautet dies

$$Y' = A(x) Y + G(x),$$

wobei A die $n \times n$ -Matrix der Funktionen $a_{j,k}$ ist und $G := (g_1, \dots, g_n)^T$.

Im Fall $G \equiv \vec{0}$ heißt das System HOMOGEN, ansonsten INHOMOGEN.

Die Lösungsmenge hat wieder eine LINEARE STRUKTUR.

Satz 22.10 (Lösungsstruktur)

Die Funktionen $a_{j,k}$ und die rechten Seiten g_j seien auf $I = (a, b)$ definiert und stetig. Dann gilt:

- (i) Die Lösungen $Y = (y_1, \dots, y_n)^T$ des **homogenen** Dgl.-Systems $Y' = A(x) Y$ sind auf I definiert. Sie bilden einen n -dimensionalen Teilraum des Vektorraums der differenzierbaren vektorwertigen Funktionen auf I .

Eine Basis $\Phi_1 = (\phi_{1,1}, \dots, \phi_{n,1})^T, \dots, \Phi_n = (\phi_{1,n}, \dots, \phi_{n,n})^T$ dieses Teilraums heißt FUNDAMENTALSYSTEM.

- (ii) Ist $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)^T$ eine spezielle (=partikuläre) Lösung des **inhomogenen** Dgl.-Systems $Y' = A(x) Y + G(x)$, so sind alle Lösungen dieses Systems durch

$$Y(x) = \Psi(x) + c_1 \Phi_1(x) + \dots + c_n \Phi_n(x)$$

mit beliebigen Koeffizienten $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ gegeben.

Satz 22.11 (Eindeutigkeit)

Die Situation sei wie in Satz 22.10 .

Zu $x_0 \in I$ seien die Anfangswerte $Y(x_0) = Y_0$ gegeben. Dann hat das AWP

$$Y' = A(x) Y + G(x), \quad Y(x_0) = Y_0$$

eine eindeutig bestimmte Lösung $Y : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Ein Fundamentalsystem dient

- zur Lösung des AWP analog zu Satz 21.3
- zur Lösung des inhomogenen Dgl-Systems durch VARIATION DER KONSTANTEN.

Definition 22.12 (Fundamentalmatrix, Wronski-Determinante)

Gegeben sei das homogene lineare Dgl-System $Y' = A(x)Y$ mit stetigen Funktionen $a_{j,k} : I \rightarrow \mathbb{R}$ in der Koeffizientenmatrix A .

Zum Fundamentalsystem $\Phi_1, \dots, \Phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ bilden wir die FUNDAMENTALMATRIX

$$\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x)).$$

Ihre Determinante $\mathcal{W}(x) = \det \Phi(x)$ heißt WRONSKI-DETERMINANTE.

- Y ist Lösung von $Y' = AY \iff Y(x) = \Phi(x)C$ für einen Vektor $C \in \mathbb{R}^n$.
- Φ erfüllt die MATRIX-DGL. $\Phi' = A(x)\Phi$.
- Sei C eine invertierbare (konstante) $n \times n$ -Matrix. Dann ist mit Φ auch ΦC eine Fundamentalmatrix.
- Auf diese Weise erhält man alle Fundamentalsysteme.

Satz 22.13

Die Wronski-Determinante erfüllt die lineare homogene Dgl. 1. Ordnung

$$\mathcal{W}'(x) = \operatorname{tr}A(x)\mathcal{W}(x),$$

wobei

$$\operatorname{tr}A(x) = \operatorname{Spur}(A(x)) = a_{11}(x) + a_{22}(x) + \cdots + a_{nn}(x)$$

die SPUR (engl. "trace") von $A(x)$ bezeichnet.

Insbesondere gilt:

- Ist $\Phi(x)$ Fundamentalmatrix des homogenen linearen Dgl.-systems auf $I = (a, b)$ (also Φ_1, \dots, Φ_n linear unabhängige Lösungen), so gilt $\mathcal{W}(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Deshalb ist $\Phi(x)$ für alle $x \in I$ invertierbar.
- Sind Φ_1, \dots, Φ_n Lösungen, so dass $\Phi(x_0)$ regulär ist, so ist Φ regulär für jedes $x \in I$.

Ziel: Berechnen einer Lösung des inhomogenen Dgl.-systems

$$Y' = A(x) Y + G(x).$$

Satz 22.14 (Variation der Konstanten)

Das Fundamentalsystem $\Phi_1, \dots, \Phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des zugehörigen homogenen linearen Dgl.-systems sei gegeben. Das Vektorfeld

$$Y_s(x) = c_1(x)\Phi_1(x) + \dots + c_n(x)\Phi_n(x) = \Phi(x)C(x)$$

mit differenzierbaren Funktionen $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Dgl.-systems, wenn die Ableitungen c'_1, \dots, c'_n für jedes $x \in I$ das lineare Gleichungssystem

$$\Phi(x)C'(x) = G(x) \iff C'(x) = \Phi^{-1}(x)G(x)$$

erfüllen.

Dgl.-Systeme mit konstanten Koeffizienten

Definition 22.15 (Matrixexponentialfunktion)

Sei A eine (konstante) $n \times n$ -Matrix. Mit $A^0 := E$ definieren wir

$$\exp(xA) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k.$$

Dann gilt:

- (i) Die Reihe konvergiert auf \mathbb{R} gegen eine differenzierbare matrixwertige Funktion (\rightarrow HM 3).
- (ii) Es ist $\frac{d}{dx} \exp(xA) = A \exp(xA)$.
- (iii) Für $x = 0$ ist $\exp(0A) = E$, also invertierbar.
- (iv) $\exp(xA)$ ist Fundamentalmatrix zu $Y' = AY$.

Erinnerung: Ist A diagonalisierbar, so ist $A = SJS^{-1}$. Dabei ist J eine Diagonalmatrix, die die Eigenwerte von A enthält, und in den Spalten von S stehen die entsprechenden Eigenvektoren.

Satz 22.16 (Berechnung von $\exp(xA)$, A diagonalisierbar)

(i) $A^0 = E = SJ^0S^{-1}$, $A^1 = A = SJS^{-1}$, $A^2 = SJS^{-1}SJS^{-1} = SJ^2S^{-1}$, $A^k = SJ^kS^{-1}$.

$$\exp(xA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k = S \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} J^k \right) S^{-1} = S \exp(xJ) S^{-1}.$$

(ii) Ist $J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, so ist $J^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$

(iii) Es ist $\exp(xJ) = \text{diag}(\exp(\lambda_1 x), \dots, \exp(\lambda_n x))$

(iv) Mit $S \exp(xJ) S^{-1}$ ist auch $S \exp(xJ)$ Fundamentalmatrix.

Dies bedeutet in der Praxis:

Satz 22.17 (Lösungen homogener Systeme 1. Ordnung)

Gegeben sei das homogene Dgl.-System 1. Ordnung $Y' = A Y$.

Wir erhalten zunächst ein (komplexes) Fundamentalsystem von Vektorfeldern

$\Phi_1, \dots, \Phi_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ wie folgt:

- (i) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) ein **einfacher Eigenwert** von A und $\vec{v} \neq \vec{0}$ ein zugehöriger Eigenvektor (also Lösung von $(A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}$), so ist

$$\Phi_1(x) = e^{\lambda x} \vec{v}$$

eine Lösung des homogenen Dgl.-systems.

- (ii) Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ (oder \mathbb{C}) ein **mehrfacher Eigenwert** von A , so gibt es zwei Fälle:

Fall 1: Die algebraische Vielfachheit m von λ ist gleich der geometrischen Vielfachheit \tilde{m} .

Dann bestimmen wir eine Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ von Eigenvektoren zum Eigenwert λ und erhalten durch

$$\Phi_1(x) = e^{\lambda x} \vec{v}_1, \quad \dots, \quad \Phi_m(x) = e^{\lambda x} \vec{v}_m$$

m linear unabhängige Lösungen des Dgl.-Systems.

Fall 2: Die algebraische Vielfachheit m von λ ist größer als die geometrische Vielfachheit \tilde{m} .

- Im ersten Schritt bestimmen wir eine Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\tilde{m}}$ von Eigenvektoren zum Eigenwert λ , also \tilde{m} linear unabhängige Lösungen von $(A - \lambda E_n)\vec{v} = \vec{0}$.
- Im zweiten Schritt bestimmen wir weitere Vektoren $\vec{v}_{\tilde{m}+1}, \dots, \vec{v}_{\tilde{m}+r}$ mit $(A - \lambda_0 E_n)^2 \vec{v} = \vec{0}$, so dass alle Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{\tilde{m}+r}$ linear unabhängig sind.
- Dann fahren wir mit $(A - \lambda_0 E_n)^3 \vec{v} = \vec{0}$ etc. fort, bis wir insgesamt m linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ gefunden haben.
- Die allgemeine Form

$$\Phi_\ell(x) = e^{\lambda x} \left(\vec{v}_\ell + x(A - \lambda E_n)\vec{v}_\ell + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!} (A - \lambda E_n)^{m-1} \vec{v}_\ell \right) \quad (*)$$

mit $1 \leq \ell \leq m$ ergibt m linear unabh. Lösungen des Dgl.-Systems.

Beachte: Wenn \vec{v}_ℓ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ ist, so ist in der Summe nur der erste Summand von Null verschieden. Wenn \vec{v}_ℓ im 2. Schritt gefunden wurde, sind nur die ersten beiden Summanden von Null verschieden, etc.

Alternative in Fall 2:

- Bilde Potenzen von $A - \lambda E_n$, bis der Rang von $(A - \lambda E_n)^p$ gleich $n - m$ ist; d.h. der Kern von $(A - \lambda E_n)^p$ ist m -dimensional.
- Wähle eine Basis $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$ des Kerns von $(A - \lambda E_n)^p$.
- Wende die Formel (*) auf jeden dieser Vektoren an.

Bemerkung: Es gibt immer ein $r \in \mathbb{N}$ mit

$$\begin{aligned} \ker(A - \lambda E_n) \subsetneq \ker(A - \lambda E_n)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(A - \lambda E_n)^r \\ = \ker(A - \lambda E_n)^{r+1} \end{aligned}$$

Dabei ist stets $r \leq m$.

Satz 22.18 (Konstruktion reeller Lösungen bei komplexen Eigenwerten)

Im Dgl.-System $Y' = A Y$ sei A eine konstante und reelle Matrix.

Dann ist das charakteristische Polynom reell, und die nichtreellen Nullstellen sind paarweise komplex konjugiert.

Zu dem Paar $\lambda = a + ib$, $\bar{\lambda} = a - ib$ (mit $b \neq 0$) gehören komplexe Eigenvektoren

$$\vec{v} = \vec{r} + i\vec{s}, \quad \vec{w} = \vec{r} - i\vec{s}$$

(ebenfalls nicht reell, also $\vec{s} \neq \vec{0}$).

Die beiden komplexen Lösungen des Dgl.-systems

$$\Phi_1(x) = e^{\lambda x} \vec{v} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) (\vec{r} + i\vec{s}),$$

$$\Phi_2(x) = e^{\bar{\lambda} x} \vec{w} = e^{ax} (\cos bx - i \sin bx) (\vec{r} - i\vec{s}),$$

ersetzen wir durch die linear unabhängigen reellen Lösungen

$$\Psi_1(x) = \operatorname{Re} \Phi_1(x) = \frac{1}{2} \Phi_1(x) + \frac{1}{2} \Phi_2(x) = e^{ax} ((\cos bx) \vec{r} - (\sin bx) \vec{s}),$$

$$\Psi_2(x) = \operatorname{Im} \Phi_1(x) = \frac{1}{2i} \Phi_1(x) - \frac{1}{2i} \Phi_2(x) = e^{ax} ((\cos bx) \vec{s} + (\sin bx) \vec{r}).$$

Satz 22.19 (Inhomogenitäten mit Exponentialfunktion)

Ist im inhomogenen System $Y' = AY + e^{\mu x}G$, (A und G konstant) die Zahl μ kein Eigenwert der Matrix A , so gibt es eine partikuläre Lösung der Form

$$Y_p(x) = e^{\mu x} Z$$

mit einem konstanten Vektor Z .

Kapitel 23 – Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

Einleitung: elektrischer Schwingkreis

Im elektrischen Reihen-Schwingkreis mit Kondensator (Kapazität C), Spule (Induktivität L) und ohmschem Widerstand (R) erfüllt die Ladungsmenge Q des Kondensators die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{1}{C}Q + RQ' + LQ'' = 0. \quad (*)$$

Anfangswerte sind $Q(0) = Q_0$ und $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC}$.

Herleitung: Ladung Q und Stromstärke I erfüllen $I = Q'$. Die Kirchhoff'sche Maschenregel besagt, dass die Gesamt-Spannung in der Reihenschaltung Null ist. Wären nur der Kondensator und der ohmsche Widerstand vorhanden, so müsste gelten $U_C + U_R = \frac{1}{C}Q + RQ' = 0$. Zum

Anfangswert $Q(0) = Q_0$ lautet die Lösung $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.

Bei Hinzunahme der Spule in die Reihenschaltung erhalten wir die Spannungsbilanz

$$U_{\text{ges}} = U_C + U_R + U_L = \frac{1}{C}Q + RQ' + LQ'' = 0.$$

Hinweis: Bei zeitabhängigen Problemen nimmt man oft t statt x als Variable.

Wir betrachten im ganzen Kapitel lineare Dgl'n n -ter Ordnung.

Definition 23.1 (Lineare Dgl. n -ter Ordnung)

Eine LINEARE INHOMOGENE DGL. n -TER ORDNUNG lautet

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x), \quad (*_i)$$

mit stetigen Funktionen $b_0, \dots, b_{n-1}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Die zugehörige homogene lineare Dgl. ist

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0. \quad (*_h)$$

Als Lösung bezeichnen wir alle Funktionen $y = y(x)$, die n -mal stetig differenzierbar sind und die entsprechende Gleichung erfüllen.

Sehr viele Eigenschaften der Lösungen lassen sich aus dem Abschnitt über Systeme übernehmen. Dazu wird die Dgl. n -ter Ordnung in ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung umgeschrieben.

Definition 23.2 (Lineare Unabhängigkeit von Funktionen)

Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sind LINEAR UNABHÄNGIG, wenn aus der Identität

$$c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in I$$

folgt, dass $c_1 = \dots = c_n = 0$ gilt; d.h. wenn **nur** die triviale Linearkombination die konstante Nullfunktion liefert.

Anders ausgedrückt: Für jeden Vektor von Koeffizienten $(c_1, \dots, c_n) \neq \vec{0}$ folgt, dass es mindestens ein $x \in I$ gibt, für das

$$c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x) \neq 0$$

gilt.

Satz 23.3 (Umschreiben einer Dgl. in ein System)

Gegeben sei die inhomogene lineare Dgl. n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x). \quad (**)$$

Wir setzen

$$y_1 = y, \quad y_2 = y', \quad \dots, \quad y_{n-1} = y^{(n-2)}, \quad y_n = y^{(n-1)}.$$

Dann ist die gegebene Dgl. n -ter Ordnung äquivalent zu dem System 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -b_0(x)y_1 - b_1(x)y_2 - \dots - b_{n-1}(x)y_n + g(x). \end{aligned} \quad (**)$$

Beachte: Die Lösungen von (*) sind stets die ersten Komponenten der Lösungsvektoren von (**).

Die Matrix-Form des Dgl.-Systems (***) lautet

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -b_0(x) & -b_1(x) & \cdots & -b_{n-2}(x) & -b_{n-1}(x) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Ist

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_1' \\ \vdots \\ \phi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ \phi_2' \\ \vdots \\ \phi_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \Phi_n = \begin{pmatrix} \phi_n \\ \phi_n' \\ \vdots \\ \phi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem des Dgl.-Systems, so sind

$$\phi_1, \dots, \phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$$

linear unabhängige Lösungen der homogenen Dgl. n -ter Ordnung.

Elektrischer Schwingkreis (Fortsetzung)

$$Q'' + \frac{R}{L}Q' + \frac{1}{LC}Q = 0$$

wird mit $y_1 := Q$ und $y_2 := Q'$ zu

$$y_1' = y_2 \quad \text{und} \quad y_2' = Q'' = -\frac{R}{L}Q' - \frac{1}{LC}Q = -\frac{R}{L}y_2 - \frac{1}{LC}y_1.$$

Die Matrixform ist mit $Y = (y_1, y_2)^\top$

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} Y$$

Das charakteristische Polynom ist $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC}$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)^2}$$

23.4 (Fundamentalsystem)

(i) Die Lösungen der homogenen Dgl. $(*_h)$ sind auf I definiert. Sie bilden einen Vektorraum der Dimension n .

Linear unabhängige Lösungen $\phi_1, \dots, \phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ bilden eine Basis dieses Vektorraums und heißen FUNDAMENTALSYSTEM der Dgl. $(*_h)$.

(ii) Die entsprechende FUNDAMENTALMATRIX der Lösungen von $(**)$ $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x))$ heißt WRONSKIMATRIX.

(iii) Die Determinante der Wronskimatrix heißt WRONSKIDETERMINANTE $\mathcal{W}(x)$.

(iv) Es gilt das SUPERPOSITIONSPRINZIP:

Ist y_s eine (spezielle) Lösung der inhomogenen Dgl. $(*_i)$, so erhält man **alle** Lösungen der inhomogenen Dgl. als

$$y(x) = y_s(x) + c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x)$$

mit beliebigen reellen Konstanten c_1, \dots, c_n , wobei die Funktionen ϕ_1, \dots, ϕ_n ein Fundamentalsystem der homogenen Dgl. $(*_h)$ sind.

"Fundamentalmatrix", "-system" und "Wronskimatrix" beziehen sich immer auf die homogene Dgl!

Bemerkung: Die LINEARITÄT der Differentialgleichung bedeutet Folgendes: Durch

$$L(y) = y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y$$

ist eine Abbildung auf dem Vektorraum der n -mal stetig differenzierbaren Funktionen $C^n(I)$ gegeben. Diese Abbildung erfüllt die Linearität

$$L(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha L(y_1) + \beta L(y_2).$$

Man nennt L deshalb einen LINEAREN DIFFERENTIALOPERATOR.

Die Funktionen ϕ_1, \dots, ϕ_n eines Fundamentalsystems bilden eine Basis des **Kerns** von L , also des Vektorraums der Lösungen von $L(y) = 0$.

Elektrischer Schwingkreis (Fortsetzung)

(i) Für $0 \leq R < 2\sqrt{L/C}$ ist mit $\delta = \frac{R}{2L}$ und $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$

$$\phi_1(t) = e^{-\delta t} \cos(\omega t), \quad \phi_2(t) = e^{-\delta t} \sin(\omega t)$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen. Speziell ergibt sich im Fall $R = 0$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

$$\phi_1(t) = \cos(\omega_0 t), \quad \phi_2(t) = \sin(\omega_0 t)$$

(ii) Im Fall $R = 2\sqrt{L/C}$ hat die Dgl. das Fundamentalsystem

$$\phi_1(t) = e^{-\delta t}, \quad \phi_2(t) = t e^{-\delta t}.$$

(iii) Für $R > 2\sqrt{L/C}$ ist mit $\gamma_{1,2} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$

$$\phi_1(t) = e^{-\gamma_1 t}, \quad \phi_2(t) = e^{-\gamma_2 t}$$

ein Fundamentalsystem.

Bemerkung:

Wie man sieht, ist es sinnvoll, auch komplexwertige Lösungen $y : I \rightarrow \mathbb{C}$ der Dgl. zuzulassen.

Am Beispiel oben der Ladungsmenge $Q(t) = Ce^{-\delta t \pm i\omega t}$ erfolgt der Übergang ins Reelle mit Hilfe der Eulerschen Formeln

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (e^{-\delta t + i\omega t} + e^{-\delta t - i\omega t}) &= e^{-\delta t} \cos(\omega t), \\ \frac{1}{2i} (e^{-\delta t + i\omega t} - e^{-\delta t - i\omega t}) &= e^{-\delta t} \sin(\omega t).\end{aligned}$$

Die Rechnung wird durch die Verwendung komplexer Lösungen deutlich einfacher.

Inhomogene Dgl. kann man wie in 22.14 durch VARIATION DER KONSTANTEN lösen.

Satz 23.5 (Lösung inhomogener Dgl.)

Sei ϕ_1, \dots, ϕ_n ein Fundamentalsystem von

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x).$$

Eine spezielle Lösung hiervon erhält man durch

$$y_s(x) = \Phi(x)C(x) = c_1(x)\phi_1(x) + \dots + c_n(x)\phi_n(x),$$

wobei der Vektor $C'(x) = (c'_1(x), \dots, c'_n(x))^T$ Lösung des Gleichungssystems

$$\Phi(x)C'(x) = c'_1(x)\Phi_1(x) + \dots + c'_n(x)\Phi_n(x) = (0, \dots, 0, g(x))^T$$

ist.

Spezialfall $n = 2$: Ist ϕ_1, ϕ_2 Fundamentalsystem der Dgl. so ergibt

$y_s(x) = c_1(x)\phi_1(x) + c_2(x)\phi_2(x)$ eine partikuläre Lösung.

Dabei ist $c'_1(x) = -\frac{g(x)\phi_2(x)}{\mathcal{W}(x)}$ und $c'_2(x) = \frac{g(x)\phi_1(x)}{\mathcal{W}(x)}$.

Eindeutigkeit der Lösung wird durch Vorgabe von Anfangswerten erzielt.

Satz 23.6 (Anfangswertproblem)

Die Funktionen $b_0, \dots, b_{n-1}, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig.

Ist $x_0 \in I$ und sind $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ gegeben, so hat das AWP

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x), \quad (*_i)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Lösung des Anfangswertproblems

Es sei ϕ_1, \dots, ϕ_n ein Fundamentalsystem der linearen Dgl.

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x),$$

y_s eine Lösung der inhomogenen Dgl.

Die Koeffizienten c_1, \dots, c_n der Lösung

$$y(x) = c_1\phi_1(x) + \dots + c_n\phi_n(x) + y_s(x)$$

zu den Anfangswerten

$$y(x_0) = a_0, \quad y'(x_0) = a_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1},$$

bestimmt man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \cdots & \phi_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 - y_s(x_0) \\ a_1 - y_s'(x_0) \\ \vdots \\ a_{n-1} - y_s^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Elektrischer Schwingkreis (Fortsetzung)

- Die allgemeine Lösung ist $Q(t) = e^{-\delta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$.
 $Q'(t) = e^{-\delta t} \left(C_1(-\delta \cos \omega t - \omega \sin \omega t) + C_2(-\delta \sin \omega t + \omega \cos \omega t) \right)$

Dabei nennt man δ *Dämpfungsfaktor* und $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$
Resonanzfrequenz.

$Q(0) = C_1 \stackrel{!}{=} Q_0$ und $Q'(0) = -\delta C_1 + \omega C_2 \stackrel{!}{=} -\frac{Q_0}{RC} = -\frac{Q_0 \omega_0^2}{2\delta}$ gibt:
 Die Ladungsmenge des Kondensators ist also

$$Q(t) = Q_0 e^{-\delta t} \left(\cos \omega t + \frac{1}{\omega} \left(\delta - \frac{\omega_0^2}{2\delta} \right) \sin \omega t \right).$$

- Der ungedämpfte Fall $R = 0$ führt zur Resonanzfrequenz ω_0 .
- Im Fall $R = 2\sqrt{L/C}$ ist $\delta = \omega_0$. Zur Lösung $e^{-\delta t}$ der Dgl. tritt noch eine weitere Lösung $te^{-\delta t}$ hinzu. Die Ladungsmenge des Kondensators (bei $Q(0) = Q_0$ und $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC} = -\frac{Q_0 \delta}{2}$) ist dann

$$Q(t) = Q_0 \left(1 + \frac{\delta}{2} t \right) e^{-\delta t}.$$

- Für großen Widerstand $R > 2\sqrt{L/C}$ ist $\delta > \omega_0$. Mit $\gamma_{1,2} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ ist die Ladungsmenge (bei $Q(0) = Q_0$ und $Q'(0) = -\frac{Q_0}{RC} = -\frac{Q_0\gamma_1\gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$)

$$Q(t) = \frac{Q_0}{\gamma_1^2 - \gamma_2^2} (\gamma_1^2 e^{-\gamma_2 t} - \gamma_2^2 e^{-\gamma_1 t}).$$

Ein großer Widerstand unterdrückt also die Oszillation, es findet ein einmaliges Entladen des Kondensators statt.

Die Matrix des Gleichungssystems im AWP ist die WRONSKIMATRIX.

Satz 23.7 (Wronski-Determinante)

Es sei ϕ_1, \dots, ϕ_n ein Fundamentalsystem der homogenen linearen Dgl. $(*_h)$.
Die Determinante der Fundamentalmatrix Φ

$$\mathcal{W}(x) = \det \begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \cdots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \cdots & \phi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

heißt die WRONSKI-DETERMINANTE des Fundamentalsystems ϕ_1, \dots, ϕ_n .

Aus dem Umschreiben auf ein System, vgl. Satz 23.3, folgt: Die Wronski-Determinante ist auf I differenzierbar und erfüllt die homogene lineare Dgl. 1. Ordnung

$$\mathcal{W}'(x) = -b_{n-1}(x)\mathcal{W}(x), \quad x \in I.$$

Daher ist $\mathcal{W}(x) = Ce^{-B_{n-1}(x)}$ mit einer Stammfunktion B_{n-1} von b_{n-1} und einer Konstanten $C \neq 0$.

23.8 (Folgerung)

Die Funktionen $\phi_1, \dots, \phi_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ seien Lösungen der homogenen linearen Dgl. $(*_h)$. Dann sind äquivalent:

- (i) ϕ_1, \dots, ϕ_n ist ein Fundamentalsystem der Dgl., d.h. die Funktionen sind linear unabhängig.
- (ii) Die Wronski-Determinante $\mathcal{W}(x)$ ist ungleich Null für alle $x \in I$.
- (iii) Die Wronski-Determinante $\mathcal{W}(x)$ ist ungleich Null für mindestens ein $x \in I$.

Schon für lineare Dgl. 2. Ordnung gibt es kein allgemeines Lösungsverfahren. Hat man aber eine Lösung, so kann man die Ordnung einer linearen Dgl. n -ter Ordnung um eins reduzieren:

Satz 23.9 (Reduktion der Ordnung (d'Alembert))

Ist y_0 eine nichttriviale Lösung der Dgl.

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + b_1(x)y' + b_0(x)y = 0,$$

so erfüllt $d(x) := c'(x)$ im Ansatz $y(x) = y_0(x)c(x)$ eine lineare Dgl. $(n-1)$ ter Ordnung.

Wichtige Spezialfall von linearen Dgl. sind:

Satz 23.10 (Lineare Dgl. mit konstanten Koeffizienten)

Zur homogenen linearen Dgl. n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + b_1y' + b_0y = 0$$

mit konstanten Koeffizienten $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{R}$ definieren wir das
CHARAKTERISTISCHE POLYNOM

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die reellen und komplexen Nullstellen von p liefern dann das folgende
Fundamentalsystem von Lösungen der Dgl.:

- (r_1) Ist λ_0 eine *einfache reelle* Nullstelle von p , so ist $\phi(x) = e^{\lambda_0 x}$ Lösung der Dgl.
(r_k) Ist λ_0 eine *k -fache reelle* Nullstelle von p (mit $k \geq 2$), so sind

$$\phi_1(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad \phi_2(x) = x e^{\lambda_0 x}, \quad \dots, \quad \phi_k(x) = x^{k-1} e^{\lambda_0 x}$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl.

(c_1) Sind $\lambda = \delta + i\omega$ (mit $\omega \neq 0$) und die komplex konjugierte Zahl $\bar{\lambda} = \delta - i\omega$ einfache komplexe Nullstellen von p , so sind

$$\phi_1(x) = e^{\delta x} \sin(\omega x), \quad \phi_2(x) = e^{\delta x} \cos(\omega x)$$

linear unabhängige Lösungen der Dgl.

(c_k) Sind $\lambda = \delta + i\omega$ und $\bar{\lambda} = \delta - i\omega$ (mit $\omega \neq 0$) jeweils k -fache komplexe Nullstellen von p , so sind

$$\phi_{2\ell+1}(x) = x^\ell e^{\delta x} \sin(\omega x), \quad \phi_{2\ell+2}(x) = x^\ell e^{\delta x} \cos(\omega x)$$

mit $0 \leq \ell \leq k - 1$ linear unabhängige Lösungen der Dgl.

Die Gesamtheit der n hierdurch bestimmten Lösungen der Dgl. ist linear unabhängig.

Bemerkung: Die Lösungen

$$y(x) = c_1 \phi_1(x) + \cdots + c_n \phi_n(x)$$

der homogenen linearen Dgl. n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind auf ganz \mathbb{R} definiert. Häufig interessiert man sich für das Langzeitverhalten $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x)$ bei gegebenen Anfangswerten $y(x_0) = a_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}$.

- Ist der Realteil aller Nullstellen des charakteristischen Polynoms negativ, so gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \phi_k(x) = 0$ für alle $1 \leq k \leq n$, also auch $\lim_{x \rightarrow \infty} y(x) = 0$ für beliebige Anfangswerte.
- Ist der Realteil aller Nullstellen negativ oder Null, so können mehrere Fälle auftreten, z.B.
 - $y(x) = c_1 + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x$ (zu einfachen Nullstellen $0, 2i, -2i$) hat einen Grenzwert c_1 nur dann, wenn $c_2 = c_3 = 0$ gilt. Ansonsten oszilliert die Lösung zwischen $c_1 \pm \sqrt{c_2^2 + c_3^2}$.
 - $y(x) = c_1 \cos x + c_2 x \cos x + c_3 \sin x + c_4 x \sin x$ (zu doppelten Nullstellen $i, -i$) ist nur dann beschränkt, wenn $c_2 = c_4 = 0$ gilt, ansonsten tritt eine Oszillation mit linear wachsender Amplitude ein.
- Für reelles $\lambda > 0$ treten Lösungen mit exponentiell wachsendem Betrag auf und für komplexes $\lambda = \delta + i\omega$ mit Realteil $\delta > 0$ treten oszillierende Lösungen mit exponentiell wachsender Amplitude auf.

Spezielle Lösungen für inhomogene Dgl.

Wir betrachten einige Beispiele von rechten Seiten $g(x)$ in

$$y^{(n)} + b_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + b_1y' + b_0y = g(x).$$

Das charakteristische Polynom der homogenen linearen Dgl. ist

$$p(\lambda) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0.$$

Die spezielle Lösung $y_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wird durch das Einsetzen des "Ansatzes" in die Dgl. und Koeffizienten-Vergleich berechnet.

(a) g ist ein Polynom vom Grad $M \geq 0$.

- Ansatz $y_s(x) = A_0 + A_1x + \dots + A_Mx^M$, falls $p(0) \neq 0$,
- Ansatz $y_s(x) = x^k(A_0 + A_1x + \dots + A_Mx^M)$ mit $k \geq 1$,
wenn $p(0) = 0$ und k die exakte Ordnung der Nullstelle $\lambda_0 = 0$ ist.

(b) $g(x) = Q(x)e^{\alpha x}$ mit einem Polynom Q vom Grad $M \geq 0$.

- Ansatz $y_s(x) = (A_0 + A_1x + \dots + A_Mx^M)e^{\alpha x}$, falls $p(\alpha) \neq 0$,
- Ansatz $y_s(x) = x^k(A_0 + A_1x + \dots + A_Mx^M)e^{\alpha x}$ mit $k \geq 1$,
wenn $p(\alpha) = 0$ und k die exakte Ordnung dieser Nullstelle ist.

(c) $g(x) = Q(x)e^{\alpha x} \sin(\omega x)$ oder $g(x) = Q(x)e^{\alpha x} \cos(\omega x)$ mit einem Polynom Q vom Grad $M \geq 0$.

→ Ansatz $y_s(x) = (A_0 + A_1x + \dots + A_Mx^M)e^{\alpha x} \sin(\omega x) + (B_0 + B_1x + \dots + B_Mx^M)e^{\alpha x} \cos(\omega x)$ (BEIDE!),
wenn $p(\alpha \pm i\omega) \neq 0$ gilt,

→ Ansatz $y_s(x) = x^k(A_0 + A_1x + \dots + A_Mx^M)e^{\alpha x} \sin(\omega x) + x^k(B_0 + B_1x + \dots + B_Mx^M)e^{\alpha x} \cos(\omega x)$
mit $k \geq 1$, wenn $p(\alpha \pm i\omega) = 0$ und k die exakte Ordnung dieser komplexen Nullstelle ist.

(d) Linearkombinationen dieser speziellen rechten Seiten werden durch Superposition behandelt (siehe 23.4(iv)).

(e) Die **allgemeine** Lösung der Dgl. erhält man wie in 23.4.

Wir behandeln im Folgenden lineare Dgl. 2. Ordnung, deren Lösungen $y_I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Darstellung als **Potenzreihe** besitzen:

Satz 23.11 (Potenzreihenansatz)

In der homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

sollen die Funktionen p, q im Intervall $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ die Darstellung durch Potenzreihen besitzen, also

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(x - x_0)^k.$$

Dann ist jede Lösung $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und besitzt die in I konvergente Potenzreihe

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k. \quad (*)$$

Bemerkung: Fundamentallösungen ϕ_1, ϕ_2 erhält man, indem man die Koeffizienten $(a_0, a_1) = (1, 0)$ für ϕ_1 bzw. $(a_0, a_1) = (0, 1)$ für ϕ_2 in (*) vorgibt und dann die Koeffizienten a_2, a_3, \dots durch Einsetzen in die Dgl. und Koeffizientenvergleich bestimmt.

Hilfreich: mit $a_{-1} = a_{-2} := 0$ ist

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n & y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n & y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n \\
 xy &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n & xy' &= \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n & xy'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \\
 x^2 y &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-2} x^n & x^2 y' &= \sum_{n=0}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n & x^2 y'' &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^n
 \end{aligned}$$

Definition 23.12 (Schwach singuläre Dgl. 2. Ordnung)

In der homogenen linearen Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + \frac{p(x)}{x - x_0} y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0,$$

sollen die Funktionen p, q im Intervall $I = (x_0 - r, x_0 + r)$ die Darstellung durch Potenzreihen besitzen, also

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k.$$

x_0 heißt dann **SCHWACH SINGULÄRE STELLE** der Dgl.

Satz 23.13

Der Ansatz

$$y(x) = (x - x_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad (x > x_0, \rho, a_k \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0)$$

mit in $(x_0 - r, x_0 + r)$ konvergenter Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ liefert mindestens eine nicht-triviale Lösung der Dgl. Der Exponent ρ erfüllt dabei die **Indexgleichung**

$$\rho(\rho - 1) + p(x_0)\rho + q(x_0) = 0.$$

Bemerkung: Falls zwei Lösungen $\rho_1 \neq \rho_2$ der Indexgleichung existieren, so liefert der Ansatz zwei Lösungen ϕ_1, ϕ_2 .

(a) Falls $\rho_1 - \rho_2 \notin \mathbb{Z}$ gilt, so sind ϕ_1, ϕ_2 linear unabhängig, also ein Fundamentalsystem der Dgl.

(b) Falls $\rho_1 - \rho_2 \in \mathbb{Z}$ gilt, muss die lineare Unabhängigkeit geprüft werden (es kann sich bei den Darstellungen von ϕ_1, ϕ_2 um reine Verschiebungen des Summations-Index der Potenzreihe handeln!)

Falls die Indexgleichung eine doppelte Nullstelle hat, macht man den zusätzlichen Ansatz

$$y_2(x) = (x - x_0)^\rho \ln(x - x_0) \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k.$$

Dies entspricht dem Auffinden einer zweiten Lösung durch das d'Alembertsche Reduktionsverfahren.

Praktische Vorgehensweise: Man findet ρ_1, ρ_2 aus der Indexgleichung, macht den obigen Ansatz und findet die Koeffizienten der Potenzreihe durch Einsetzen in die Dgl.

Euler-Dgl.: Für die schwach singuläre Dgl. mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + \frac{a}{x}y' + \frac{b}{x^2}y = 0$$

seien ρ_1, ρ_2 die Lösungen der Indexgleichung

$$\rho(\rho - 1) + a\rho + b = 0.$$

Dann ist ein Fundamentalsystem gegeben durch

- $\phi_1(x) = x^{\rho_1}, \quad \phi_2(x) = x^{\rho_2}$, falls $\rho_1 \neq \rho_2$, (diese sind auch im Fall $\rho_2 - \rho_1 \in \mathbb{Z}$ lin. unabh.)
- $\phi_1(x) = x^{\rho_1}, \quad \phi_2(x) = x^{\rho_1} \ln x$, falls $\rho_1 = \rho_2$.