

# Kapitel 24 – Numerische Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

## Numerische Verfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen

**Frage:** Was ist zu tun, wenn das AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

keinem der behandelten Typen entspricht?

**Antwort:** Verwendung eines numerischen Verfahrens, ähnlich wie die Quadraturformeln zur näherungsweisen Integration

Die **Idee der Methode** wird vom Richtungsfeld der Dgl. motiviert:

- Vom Anfangswert  $y(x_0) = y_0$  gehe einen kurzen "Schritt" zu

$$x_1 = x_0 + h, \quad y_1 = y_0 + hK_0$$

mit der Steigung  $K_0$  eines kurzen Geradenstücks.

- Die Steigung  $K_0$  wird anhand des Richtungsfelds der Dgl.  $y' = f(x, y)$  in der Nähe von  $(x_0, y_0)$  berechnet.
- Für den nächsten Schritt verwende eine neu zu berechnende Steigung  $K_1$  und erhalte

$$x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \quad y_2 = y_1 + hK_1.$$

etc.

“Gute” Verfahren ergeben Werte  $y_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , die von den wahren Werten  $y(x_k)$  der Lösung des AWP nur wenig abweichen:

$$|y(x_0 + kh) - y_k| \leq Ch^\ell, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Der Exponent  $\ell \in \mathbb{N}$  beschreibt (bei gewissen Voraussetzungen an die Funktion  $f$  in der Dgl.) die “Konvergenz-Ordnung” des Verfahrens.

Wir beschreiben zwei sog. **Einschrittverfahren**, die von  $(x_k, y_k)$  aus OHNE GEDÄCHTNIS den nächsten Punkt  $(x_{k+1} = x_k + h, y_{k+1} = y_k + hK_k)$  berechnen.

## 24.1 (Eulersches Polygonzugverfahren)

Die einfachste Methode zur numerischen Lösung des AWP

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

verwendet die Steigung  $K_k = f(x_k, y_k)$ , also

$$x_{k+1} = x_k + h = x_0 + kh, \quad y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Falls  $f$  stetig partiell differenzierbar ist und  $|f_y(x, y)|$  beschränkt ist, so gibt es Konstanten  $L, M > 0$  mit

$$|y(x_0 + kh) - y_k| \leq Lh \frac{e^{kMh} - 1}{M}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

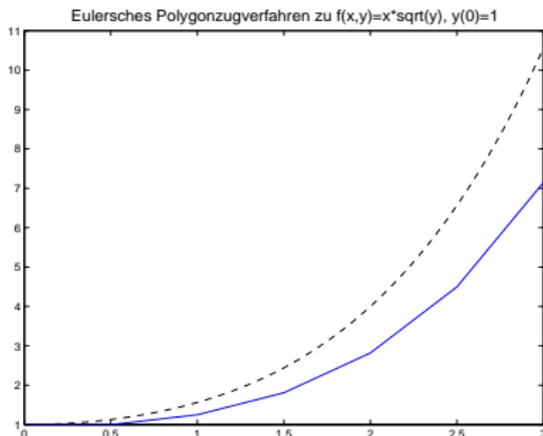
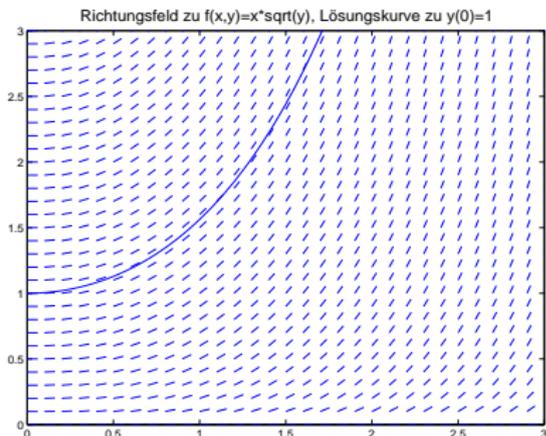
Das Verfahren hat also die Konvergenz-Ordnung 1.

## Beispiel:

Das AWP  $y' = x\sqrt{y}$ ,  $y(0) = 1$ , hat die Lösung

$$y(x) = (1 + x^2/4)^2.$$

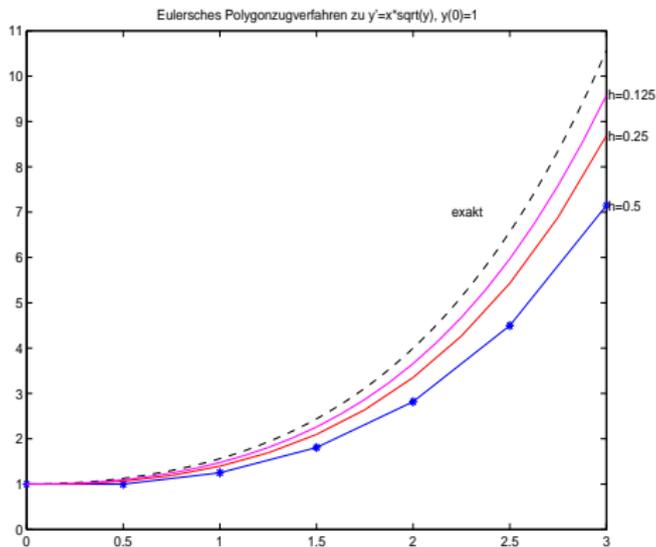
6 Schritte des Eulerschen Polygonzug-Verfahrens zur Schrittweite  $h = 0.5$  liefern eine Näherung des Graphen von  $f$  im Intervall  $[0, 3]$  (s. Tabelle).



| $k$ | $x_k$  | $y_k$  | $y(x_k)$ |
|-----|--------|--------|----------|
| 0   | 0      | 1.0000 | 1.0000   |
| 1   | 0.5000 | 1.0000 | 1.1289   |
| 2   | 1.0000 | 1.2500 | 1.5625   |
| 3   | 1.5000 | 1.8090 | 2.4414   |

| $k$ | $x_k$  | $y_k$  | $y(x_k)$ |
|-----|--------|--------|----------|
| 4   | 2.0000 | 2.8178 | 4.0000   |
| 5   | 2.5000 | 4.4964 | 6.5664   |
| 6   | 3.0000 | 7.1470 | 10.5625  |

Verkleinern wir die Schrittweite auf  $h = 0.25$  (12 Schritte) oder sogar  $h = 0.125$  (24 Schritte), entstehen immer bessere Näherungen durch Polygonzüge für  $x \in [0, 3]$ :



Im nächsten Verfahren wird die “mittlere Steigung” für das Intervall  $[x_k, x_k + h]$  deutlich besser geschätzt.

## 24.2 (Klassisches Runge-Kutta-Verfahren)

*Das klassische RUNGE-KUTTA-VERFAHREN zur numerischen Lösung des AWP*

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

*verwendet die mittlere Steigung*

$$K_k = \frac{1}{6}(\tilde{K}_{k,1} + 2\tilde{K}_{k,2} + 2\tilde{K}_{k,3} + \tilde{K}_{k,4}).$$

*Dabei werden die Werte folgendermaßen berechnet: (siehe Skizze)*

$$\begin{aligned}\tilde{K}_{k,1} &= f(x_k, y_k), \\ \tilde{K}_{k,2} &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\tilde{K}_{k,1}\right), \\ \tilde{K}_{k,3} &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}\tilde{K}_{k,2}\right), \\ \tilde{K}_{k,4} &= f(x_k + h, y_k + h\tilde{K}_{k,3})\end{aligned}$$

Die Iteration lautet dann

$$x_{k+1} = x_k + h = x_0 + kh, \quad y_{k+1} = y_k + hK_k, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Falls  $f$  4-mal stetig partiell differenzierbar ist und alle partiellen Ableitungen beschränkt sind, so gibt es Konstanten  $L, M > 0$  mit

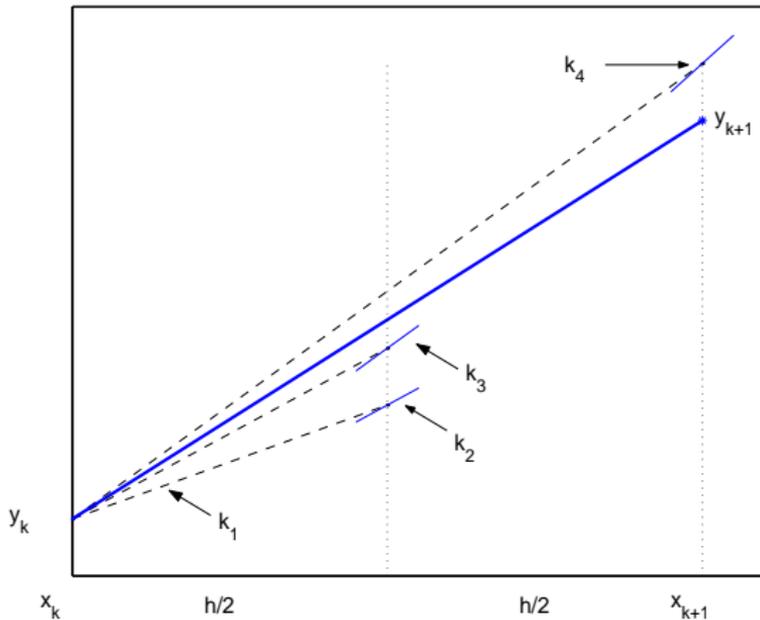
$$|y(x_0 + kh) - y_k| \leq Lh^4 \frac{e^{kMh} - 1}{M}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Das Verfahren hat also die Konvergenz-Ordnung 4.

**Bemerkung:** Bei der "Differentialgleichung"  $y' = f(x)$  geht das Runge-Kutta-Verfahren in die Simpsonregel über.

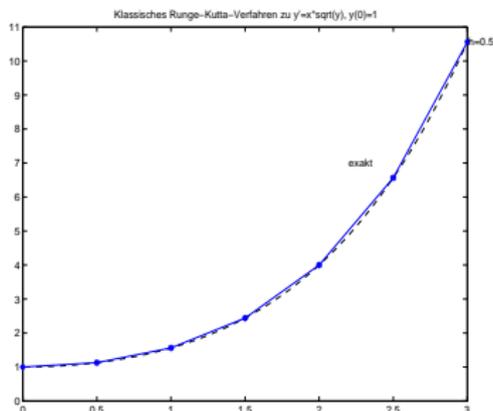
## Schema zur Berechnung der "mittleren Steigung":

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren



## Beispiel:

Wir betrachten die AWA  $y' = x\sqrt{y}$ ,  $y(0) = 1$ . 6 Schritte des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens zur Schrittweite  $h = 0.5$  liefern eine sehr gute Näherung:



| $k$ | $x_k$  | $y_k$  | $y(x_k)$ | $k$ | $x_k$  | $y_k$   | $y(x_k)$ |
|-----|--------|--------|----------|-----|--------|---------|----------|
| 0   | 0      | 1.0000 | 1.0000   | 4   | 2.0000 | 3.9995  | 4.0000   |
| 1   | 0.5000 | 1.1289 | 1.1289   | 5   | 2.5000 | 6.5655  | 6.5664   |
| 2   | 1.0000 | 1.5624 | 1.5625   | 6   | 3.0000 | 10.5610 | 10.5625  |
| 3   | 1.5000 | 2.4412 | 2.4414   |     |        |         |          |

**Bemerkung:** Beide Verfahren lassen sich sofort auf Systeme von Differentialgleichungen anwenden, indem die Steigung jeweils als vektorwertige Funktion gebildet wird (ersetze  $f(x, y)$  durch  $F(x, Y)$  in den Algorithmen).

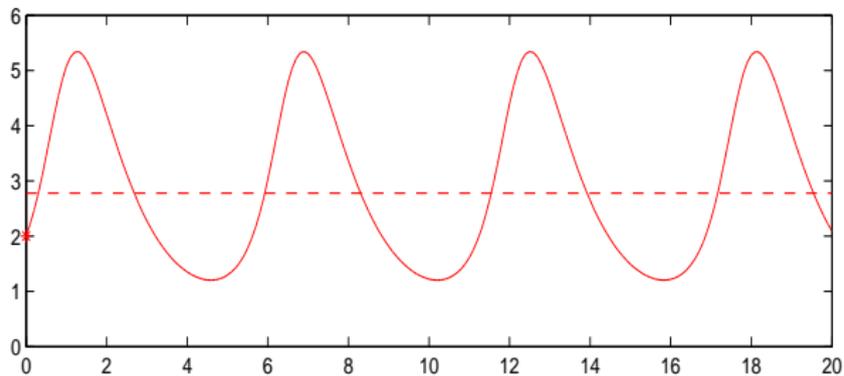
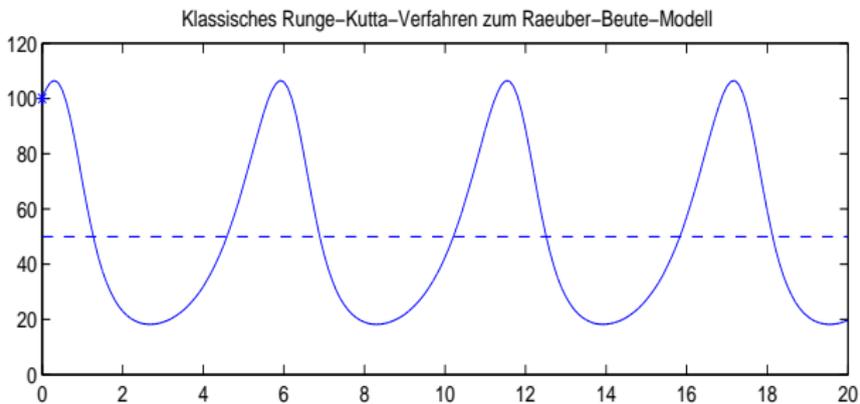
**Beispiel: Das Räuber-Beute-Modell**

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1(25/18 - \frac{1}{2}y_2) \\y_2' &= y_2(\frac{1}{50}y_1 - 1)\end{aligned}$$

hat zum Anfangswert  $y_1(0) = 100$  (Beutetiere),  $y_2(0) = 2$  (Raubtiere) die Lösung im untenstehenden Bild. Der obere Graph zeigt  $y_1$  und der untere zeigt  $y_2$ . Die Werte wurden mit dem Runge-Kutta-Verfahren zur Schrittweite  $h = 0.1$  ermittelt. Die gestrichelten Hilfslinien geben den Gleichgewichts-Zustand

$$y_1 = 50, \quad y_2 = \frac{25}{9}$$

an. Immer wenn die eine Funktion diesen Wert annimmt, hat die andere ein Maximum oder Minimum. Man erkennt sehr schön die Periodizität der Lösung (Periodenlänge  $\approx 5.5$ ).



# Kapitel 25 – Vektoranalysis und die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes

## Vektoranalysis und die Integralsätze von Gauß, Green und Stokes

Zur Integration reeller Funktionen wurden folgende Regeln behandelt (mit  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar):

- Einsetzen der Intervall-Grenzen in die Stammfunktion:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(x) \Big|_a^b = f(b) - f(a).$$

- Partielle Integration:

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

- Substitutionsregel (mit  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  stetig differenzierbar):

$$\int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t) dt = \int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x) dx.$$

Unser Ziel ist die Verallgemeinerung der ersten beiden Regeln auf Volumen- und Oberflächenintegrale.

### Definition 25.1 (Differentialoperatoren der Vektoranalysis)

Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sei offen.

(a) Für ein differenzierbares Skalarfeld  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\nabla f = (\text{grad } f)^T = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)^T.$$

Der Differentialoperator  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$  (hebräisch "Nabla") bildet das Skalarfeld  $f$  in das Vektorfeld  $\nabla f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ab.

(b) Für ein zweimal differenzierbares Skalarfeld  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Der Differentialoperator  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$  heißt LAPLACE-OPERATOR. Man schreibt

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla$$

formal als Skalarprodukt des Differentialoperators  $\nabla$  mit sich selbst.

(c) Für ein differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)^T : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_n}{\partial x_n}$$

die DIVERGENZ von  $\vec{v}$ . Man schreibt

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}$$

formal als das Skalarprodukt des Differentialoperators  $\nabla$  mit  $\vec{v}$ .

Der Differentialoperator  $\operatorname{div}$  bildet das Vektorfeld  $\vec{v}$  in ein Skalarfeld  $\operatorname{div} \vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}$  ab.

(d) (Nur für  $n = 3$ ) Für ein differenzierbares Vektorfeld

$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)^T : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ist}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

die ROTATION von  $\vec{v}$ . Man schreibt

$$\text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v}$$

formal als das Kreuzprodukt des Differentialoperators  $\nabla$  mit  $\vec{v}$ .

Der Differentialoperator  $\text{rot}$  bildet das Vektorfeld  $\vec{v}$  in ein Vektorfeld

$$\text{rot } \vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ ab.}$$

## Satz 25.2 (Rechenregeln)

Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  sei offen.

(a) Für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  gilt

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \nabla \times (\nabla f) = \vec{0}.$$

(b) Für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0.$$

(c) Für differenzierbares  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$\operatorname{div}(f \vec{v}) = \nabla f \cdot \vec{v} + f \operatorname{div} \vec{v}.$$

(d) Für differenzierbares  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt

$$\operatorname{rot}(f \vec{v}) = (\nabla f) \times \vec{v} + f \operatorname{rot} \vec{v}.$$

**Definition 25.3** (harmonisch, quellenfrei, wirbelfrei)

Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  sei offen.

- (a) Eine zweimal differenzierbare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **HARMONISCH**, wenn  $\Delta f = 0$  in  $M$  gilt.
- (b) Ein differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt **QUELLENFREI**, wenn  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  in  $M$  gilt. (engl. "divergence free")
- (c) Ein differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  (mit  $M \subseteq \mathbb{R}^3$ ) heißt **WIRBELFREI**, wenn  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$  in  $M$  gilt. (engl. "rotation free")

**Bemerkung:** Aus den Rechenregeln folgt sofort

- Jedes differenzierbare Rotationsfeld  $\vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$  ist quellenfrei.
- Jedes differenzierbare Gradientenfeld  $\vec{v} = \nabla f$  ist wirbelfrei.

Die Menge  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  sei ein Gebiet.

- In 20.8 wurde definiert: Eine skalare Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **Potential** des Vektorfeldes  $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , wenn  $\nabla f = \vec{v}$  gilt.

Für stetig differenzierbare Vektorfelder  $\vec{v}$  liefert Satz 20.10 bzw. Satz 25.2(a) die **notwendige** Bedingung

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}.$$

Also können nur wirbelfreie Vektorfelder ein Potential besitzen (siehe auch Wegunabhängigkeit des vektoriellen Kurvenintegrals in 20.10).

- Das Vektorfeld  $\vec{w} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **VEKTORPOTENTIAL** von  $\vec{v}$ , wenn  $\operatorname{rot} \vec{w} = \vec{v}$  gilt.

Die Rechenregel 25.2(b) ergibt für stetig differenzierbares  $\vec{v}$  die **notwendige** Bedingung

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

**Fazit:** Nur quellenfreie Vektorfelder können ein Vektorpotential besitzen.

- Die Bedingung  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  ist unter den gleichen Bedingungen an das Gebiet  $M$  wie in 20.10 auch **hinreichend** für die Existenz eines Vektorpotentials. Falls  $M$  ein Würfel oder eine Kugel ist, können wir z.B. das folgende Vektorpotential  $\vec{w} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  wählen:

$$w_1(x, y, z) = \int_{z_0}^z v_2(x, y, t) dt - \int_{y_0}^y v_3(x, t, z_0) dt,$$

$$w_2(x, y, z) = - \int_{z_0}^z v_1(x, y, t) dt, \quad w_3(x, y, z) = 0.$$

- Das Vektorpotential ist nach Regel 25.2(a) nur bis auf die Addition eines beliebigen Gradientenfeldes eindeutig:

$$\operatorname{rot}(\vec{w} + \nabla f) = \operatorname{rot} \vec{w}.$$

Man kann  $f$  so wählen, dass  $\vec{w} + \nabla f$  quellenfrei ist (sog. COULOMB-EICHUNG):

$$\operatorname{div}(\vec{w} + \nabla f) = 0 \iff \Delta f = -\operatorname{div} \vec{w}.$$

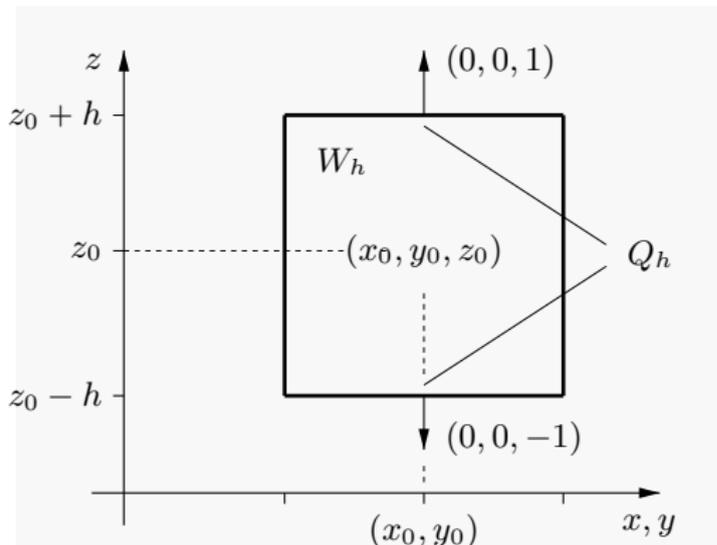
Zu einem speziellen Vektorpotential  $\vec{w}$  berechnet man  $f$  also als Lösung der POISSON-GLEICHUNG.

## Divergenz als lokale Quellstärke

Im Gebiet  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld  $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben. Um den Punkt  $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$  bilden wir kleine Würfel

$$W_h = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h] \times [z_0 - h, z_0 + h], \quad h > 0,$$

die ganz in  $M$  liegen. Der Normalenvektor der Oberfläche  $\partial W_h$  zeige nach außen.



Die **lokale Quellstärke** von  $\vec{v}$  im Punkt  $\vec{x}_0$  ist definiert als

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}_3(W_h)} \int_{\partial W_h} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma},$$

also als der **Grenzwert des Flusses** von  $\vec{v}$  durch die Oberfläche relativ zum Volumen.

Wir berechnen zuerst den Fluss durch die Flächen parallel zur  $(x, y)$ -Ebene. Mit  $Q_h = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - h, y_0 + h]$  ist dieser

$$\begin{aligned} & \int_{Q_h} \left[ \begin{pmatrix} v_1(x, y, z_0 + h) \\ v_2(x, y, z_0 + h) \\ v_3(x, y, z_0 + h) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1(x, y, z_0 - h) \\ v_2(x, y, z_0 - h) \\ v_3(x, y, z_0 - h) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] d(x, y) \\ &= \int_{Q_h} (v_3(x, y, z_0 + h) - v_3(x, y, z_0 - h)) d(x, y) \\ &= \int_{Q_h} \left( \int_{z_0-h}^{z_0+h} \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) dz \right) d(x, y) = \int_{W_h} \frac{\partial v_3}{\partial z}(x, y, z) d(x, y, z). \end{aligned}$$

Addieren wir den Fluss durch die anderen Flächen des Würfels, erhalten wir

$$\int_{\partial W_h} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \int_{W_h} \operatorname{div} \vec{v}(x, y, z) d(x, y, z). \quad (*)$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung 19.8 ergibt die lokale Quellstärke

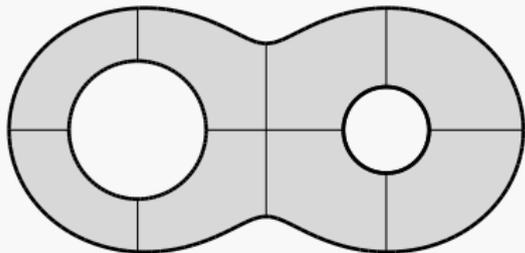
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(W_h)} \int_{\partial W_h} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{vol}_3(W_h)} \int_{W_h} \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}) d\vec{x} = \operatorname{div} \vec{v}(\vec{x}_0).$$

### Definition 25.4 (Normalgebiet)

Die Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$  (mit  $n = 2$  oder  $3$ ) sei ein beschränktes Gebiet (also offen und zusammenhängend).  $M$  heißt NORMALGEBIET,

- (a) wenn es über jeder Koordinatenachse im  $\mathbb{R}^2$  (bzw. Koordinaten-Ebene im  $\mathbb{R}^3$ ) in endlich viele **schlichte** Gebiete  $M_1, \dots, M_N$  zerlegbar ist (siehe Definition 19.14) und
- (b) jedes dieser Gebiete  $M_j$  einen Rand hat, der aus endlich vielen stückweise regulären Kurven (für  $n = 2$ , siehe 20.1) bzw. orientierten Flächenstücken (für  $n = 3$ , siehe 20.12) besteht.

**Erinnerung:** Ein Gebiet  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  heißt SCHLICHT über der  $x$ -Achse, falls es stetige  $\phi_1, \phi_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\}$ .



Analog heißt  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  schlicht über der  $x$ - $y$ -Ebene, wenn es ein Gebiet  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  und stetige Funktionen  $\phi_1, \phi_2 : G \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit  $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in G, \phi_1(x, y) < z < \phi_2(x, y)\}$ .

Die Identität (\*) besagt, dass das Volumenintegral über die lokale Quellstärke eines Vektorfeldes  $\vec{v}$  gleich dem Fluss des Vektorfeldes durch den Rand des Gebietes ist. Genau dies ist der Integralsatz von Gauß.

### Satz 25.5 (Integralsatz von Gauß)

- (a) *in der Ebene:  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein **Normalgebiet**,  $\vec{n}$  sei der äußere Normalenvektor der Länge 1 von  $\partial M$ .*

*Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\vec{v} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$*

$$\int_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{n} \, ds = \int_M \operatorname{div} \vec{v} \, d(x, y).$$

- (b) *im Raum:  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  sei ein **Normalgebiet**,  $\vec{n}$  sei der äußere Normalenvektor der Länge 1 von  $\partial M$ .*

*Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\vec{v} : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$*

$$\int_{\partial M} \vec{v} \cdot d\vec{o} = \int_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_M \operatorname{div} \vec{v} \, d(x, y, z).$$

## Anwendung: Volumenberechnung

### Satz 25.6 (Flächeninhalt und Volumen)

- *Ein ebenes Normalgebiet  $M \subseteq \mathbb{R}^2$  hat den Flächeninhalt*

$$\text{vol}_2(M) = \frac{1}{2} \int_{\partial M} (x, y)^\top \cdot \vec{n} \, ds,$$

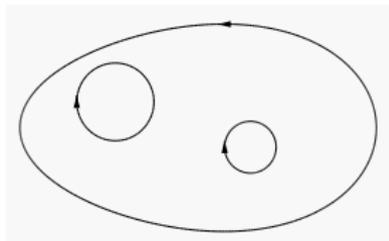
wobei  $\vec{n}$  der äußere Normalenvektor der Länge 1 von  $\partial M$  ist.

- *Ein räumliches Normalgebiet  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  hat das Volumen*

$$\text{vol}_3(M) = \frac{1}{3} \int_{\partial M} (x, y, z)^\top \cdot \vec{n} \, dS,$$

wobei  $\vec{n}$  der äußere Normalenvektor der Länge 1 von  $\partial M$  ist.

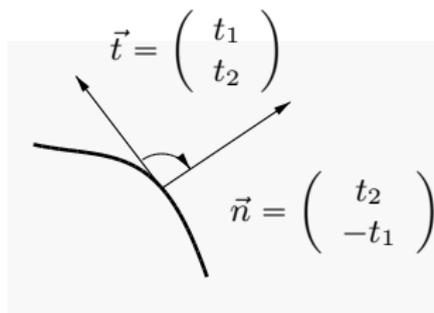
Für ebene Normalgebiete lässt sich der Satz von Gauß mit dem vektoriellen Kurvenintegral 20.6 umschreiben. Bei der Parameterdarstellung  $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  von  $\partial M$  muss man darauf achten, dass das Gebiet  $M$  beim Durchlaufen des Randes links liegt.



Dann erhält man einen äußeren Normalenvektor  $\vec{n}$  von  $\partial M$  durch Drehung des

Einheits-Tangentenvektors  $\vec{t}(s) = (\dot{c}_1(s), \dot{c}_2(s))$  um  $90^\circ$  im mathematisch negativen Sinn, also

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} (v_1 dx + v_2 dy) &= \int_{\partial M} \vec{v} \cdot \vec{t} ds \\ &= \int_{\partial M} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} ds \\ &= \int_{\partial M} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{pmatrix} ds = \int_{\partial M} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{n} ds \\ &= \int_M \operatorname{div} \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix} d(x, y) = \int_M ((v_2)_x - (v_1)_y) d(x, y) \end{aligned}$$



Aus dem Satz von Gauß erhält man so den SATZ VON GREEN

Satz 25.7 (Satz von Green)

$$\int_{\partial M} (P dx + Q dy) = \int_M (Q_x - P_y) d(x, y)$$

Für  $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  ergibt sich die GAUSS'SCHE FLÄCHENFORMEL oder SEKTORFORMEL

$$\text{vol}_2(M) = \frac{1}{2} \int_{\partial M} (x dy - y dx).$$

Anwendung des Gaußschen Satzes auf  $\vec{v} = g \nabla h$ , also

$$\operatorname{div} \vec{v} \stackrel{25.2(c)}{=} \nabla g \cdot \nabla h + g \operatorname{div} (\nabla h) \stackrel{25.2(b)}{=} \nabla g \cdot \nabla h + g \Delta h$$

ergibt

$$\int_M \operatorname{div} \vec{v} d(x, y) = \int_M (\nabla g \cdot \nabla h + g \Delta h) d(x, y) = \int_{\partial M} g \nabla h \cdot \vec{n} dS.$$

Vertauschen von  $g$  und  $h$  ergibt

$$\int_M (\nabla g \cdot \nabla h + h \Delta g) d(x, y) = \int_{\partial M} h \nabla g \cdot \vec{n} dS.$$

Subtraktion beider Identitäten führt zu

$$\int_M (g \Delta h - h \Delta g) d(x, y) = \int_{\partial M} (g \nabla h - h \nabla g) \cdot \vec{n} dS.$$

**Beachte:** Die Skalarprodukte  $\nabla g \cdot \vec{n}$  und  $\nabla h \cdot \vec{n}$  sind die **Richtungsableitungen** von  $g$  (bzw.  $h$ ) in Richtung des äußeren Normalenvektors von  $\partial M$  (siehe 17.9)

Wir haben damit folgenden Satz hergeleitet:

### Satz 25.8 (Greensche Integralformel)

$M \subset \mathbb{R}^2$  (bzw.  $\mathbb{R}^3$ ) sei ein Normalgebiet,  $g, h : \overline{M} \rightarrow \mathbb{R}$  seien zweimal stetig differenzierbar. Ist  $\vec{n}$  der äußere Normalenvektor der Länge 1 von  $\partial M$ , so gilt im  $\mathbb{R}^2$

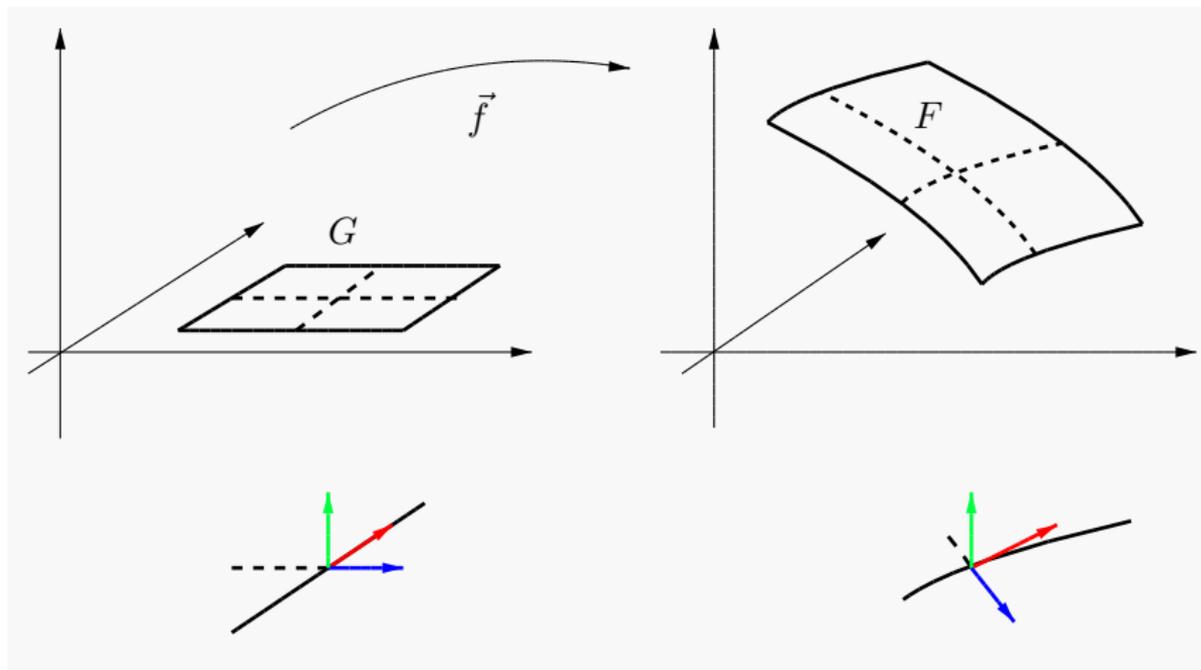
$$\int_M (h \Delta g - g \Delta h) d(x, y) = \int_{\partial M} \left( h \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} \right) ds$$

bzw. im  $\mathbb{R}^3$

$$\int_M (h \Delta g - g \Delta h) d(x, y, z) = \int_{\partial M} \left( h \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial h}{\partial \vec{n}} \right) dS.$$

**Wichtiger Spezialfall:**  $h \equiv 1$  ergibt in der Greenschen Formel

- $\int_M \Delta g d(x, y) = \int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} ds$  im  $\mathbb{R}^2$
- $\int_M \Delta g d(x, y, z) = \int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} dS$  im  $\mathbb{R}^3$ .



Bildet man das Gebiet  $G \subset \mathbb{R}^2$  in den  $\mathbb{R}^3$  ab, erhält man mit der Kettenregel aus dem Satz von Green den Satz von Stokes.

Andererseits ist der Satz von Green bzw. der ebene Satz von Gauß ein Spezialfall des Satzes von Stokes.

## Vorbereitung zum Integralsatz von Stokes

Für einen Normalbereich  $M \subset \mathbb{R}^3$  und jedes zweimal stetig differenzierbare Vektorfeld  $\vec{v} : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  gilt nach dem Gaußschen Satz

$$\int_{\partial M} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_M \operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{v}) \, d\vec{x} \stackrel{25.2(b)}{=} 0.$$

Das Oberflächenintegral der "Zirkulationsstärke"  $\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n}$  des Vektorfeldes  $\vec{v}$  in Richtung des Normalenvektors von  $\partial M$  ist also Null. Dies liegt i.w. daran, dass die Oberfläche geschlossen ist, also keine Randkurven besitzt.

Für Flächenstücke **mit Randkurven** lässt sich das Oberflächenintegral der Zirkulationsstärke in ein vektorielles Kurvenintegral überführen;

- Spezifikation des Flächenstücks  $F$ :

$G \subset \mathbb{R}^2$  sei ein Normalgebiet (ohne "Löcher"),  $\vec{\phi} : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sei zweimal stetig differenzierbar,  $\vec{\phi}|_G$  sei injektiv und es gelte

$$\vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v \neq \vec{0} \quad \text{in } G.$$

Dann ist  $F = \vec{\phi}(G) \subset \mathbb{R}^3$  ein orientiertes Flächenstück (siehe 20.12) und

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v|} \vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v$$

- Spezifikation der Randkurven:

$\partial G$  werde so durchlaufen, dass die geschlossene Bildkurve  $\vec{\phi}(\partial G)$  auf  $F$  mit dem Normalenfeld  $\vec{n}$  die Bewegungsrichtung einer Rechtsschraube hat. (Achtung:  $\vec{\phi}$  ist evtl. nicht injektiv auf  $\partial G$ , Zwei Kurven können zusammenfallen, eine Kurve kann zu einem Punkt zusammenschmelzen, siehe nachfolgendes Bsp. )

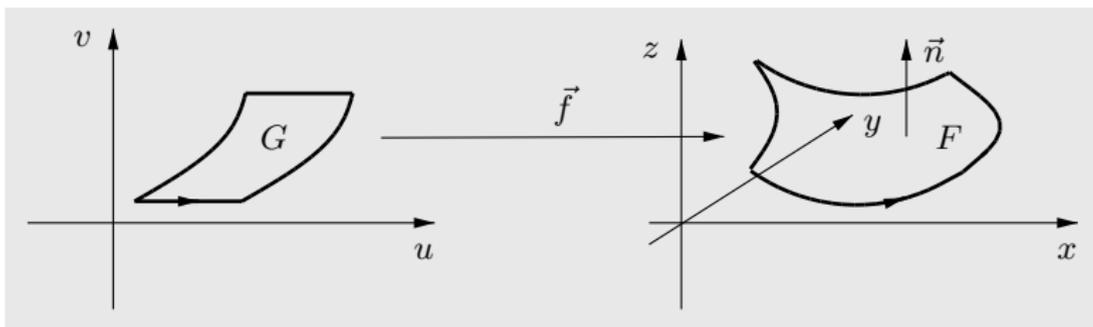
### Satz 25.9 (Integralsatz von Stokes)

*Das Gebiet  $U \subseteq \mathbb{R}^3$  enthalte  $\overline{F}$ . Mit den obigen Spezifikationen gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld  $\vec{v} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$*

$$\int_F \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \int_{\vec{\phi}(\partial G)} \vec{v} \cdot d\vec{x}.$$

- Der Fluss des Vektorfeldes  $\text{rot } \vec{v}$  durch die Fläche  $F$  stimmt also mit der "Zirkulation" von  $\vec{v}$  längs dem "Rand von  $F$ " (genauer  $\vec{\phi}(\partial G)$ ) überein.
- Zum Vorzeichen: Beim Oberflächenintegral im Satz von Stokes bestimmt das Normalenfeld von  $F$  das Vorzeichen.

Beim vektoriellen Kurvenintegral bestimmt die Durchlauf-Richtung das Vorzeichen. Diese beiden Orientierungen passen zusammen, wenn die Durchlauf-Richtung der Kurve sich zum Normalenfeld wie die Rechtsdrehung einer Schraube verhält ("Rechte-Hand-Regel").



Die durch die Reihenfolge  $u-v$  gegebene Orientierung des Randes des Parametergebiets  $G$  induziert durch  $\vec{\phi}$  eine Orientierung des Randes von  $F$ .

Der Normalenvektor  $\vec{n}$  passt dazu, wenn  $\vec{n}$  die Richtung von  $\vec{\phi}_u \times \vec{\phi}_v$  (in genau dieser Reihenfolge) hat.

# Kapitel 26 – Komplexe Funktionen: Die komplexe Differenzierbarkeit

## Funktionentheorie

In den folgenden Kapiteln betrachten wir Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $M \subseteq \mathbb{C}$ . Wir nennen solche Funktionen **KOMPLEXE FUNKTIONEN**.

### 26.1 (Grundbegriffe)

- Die komplexe Zahl  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  wird durch ihren Realteil  $x \in \mathbb{R}$  und ihren Imaginärteil  $y \in \mathbb{R}$  definiert.

Manchmal betrachten wir Teilmengen von  $\mathbb{C}$  auch als Teilmengen von  $\mathbb{R}^2$ :

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Alternativ wird die Darstellung in Polarkoordinaten verwendet:

$$z = x + iy = |z|(\cos \phi + i \sin \phi) = |z|e^{i\phi} \quad (\text{für } z \neq 0), \text{ mit}$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arg(z) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{falls } y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{falls } y < 0, \end{cases}$$

den **BETRAG** und das **ARGUMENT** von  $z$  bezeichnen.

( $\arg(z) \in [0, 2\pi)$  ist der Winkel, den der Vektor vom Nullpunkt zum Punkt  $(x, y)$  mit der positiven  $x$ -Achse bildet.)

- Zu  $z = x + iy$  (mit  $x, y \in \mathbb{R}$ ) ist

$$\bar{z} = x - iy = |z|(\cos \phi - i \sin \phi) = |z|e^{-i\phi}$$

die komplex konjugierte Zahl. Es gilt  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ .

- Die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $R > 0$  ist

$$K_R(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}.$$

- Eine Menge  $M \subseteq \mathbb{C}$  ist **OFFEN**, wenn zu jedem Punkt  $z \in M$  eine offene Kreisscheibe um  $z$  existiert, die Teilmenge von  $M$  ist.
- Eine offene Menge  $M \subseteq \mathbb{C}$  ist **ZUSAMMENHÄNGEND**, wenn sie **NICHT** die Vereinigung von zwei nichtleeren und disjunkten offenen Teilmengen ist. Eine offene und zusammenhängende Menge nennen wir **GEBIET**.

**Bemerkung:** Gebiete übernehmen die Rolle offener Intervalle in  $\mathbb{R}$ .

## Definition 26.2 (Kurven, einfach zusammenhängende Mengen)

- Eine Kurve in  $\mathbb{C}$  ist eine stetige Abbildung  $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  (wie in Def. 20.1). Die Kurve  $c$  heißt
  - GESCHLOSSEN, wenn  $c(a) = c(b)$  gilt,
  - DOPPELPUNKTFREI, wenn  $c(t_1) \neq c(t_2)$  für alle  $a < t_1 < t_2 < b$  gilt, also die Injektivität auf dem offenen Intervall  $(a, b)$  vorliegt,
  - REGULÄR, wenn  $c$  stetig differenzierbar ist und

$$\frac{d}{dt} c(t) = \dot{c}(t) \neq \vec{0} \quad \text{für alle } t \in [a, b] \text{ gilt,}$$

- STÜCKWEISE REGULÄR, wenn  $c$  die Aneinanderreihung endlich vieler regulärer Kurven ist (siehe 20.1).
- Das INNERE einer geschlossenen doppelunktpunkt freien und stückweise regulären Kurve ist das beschränkte Gebiet  $M$ , dessen Rand die Kurve ist.
- Ein Gebiet  $M \subseteq \mathbb{C}$  heißt EINFACH ZUSAMMENHÄNGEND, wenn das Innere jeder geschlossenen doppelunktpunkt freien und stückweise regulären Kurve eine Teilmenge von  $M$  ist.

*Anschaulich:  $M$  hat keine Löcher.*

### 26.3 (Grenzwerte in $\mathbb{C}$ )

Wir bilden Grenzwerte wie im  $\mathbb{R}^2$ : Eine Folge  $(z_n)_{n \rightarrow \infty}$  konvergiert gegen  $c = a + ib \in \mathbb{C}$  genau dann, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - c| = 0$  gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re} z_n = a \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im} z_n = b$$

gilt.

### 26.4 (Real- und Imaginärteil komplexer Funktionen)

Die Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  (mit  $M \subseteq \mathbb{C}$ ) kann mit ihrem Real- und Imaginärteil geschrieben werden:

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

wobei  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  der Realteil und  $v : M \rightarrow \mathbb{R}$  der Imaginärteil von  $f$  ist.

Beachte: Wir schreiben das Argument von  $u$  und  $v$  als Koordinaten-Paar  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  anstatt  $x + iy$ . Eigenschaften von  $f$  lassen sich durch Eigenschaften von  $u$  und  $v$  ausdrücken.

## 26.5 (Definition und Satz: Stetigkeit)

(a) Eine komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  heißt stetig im Punkt  $z_0 \in M$ , wenn

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

gilt. Wir sagen  $f$  ist stetig, wenn  $f$  in jedem  $z_0 \in M$  stetig ist.

(b)  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann stetig (im Punkt  $z_0$ ), wenn ihr Realteil und ihr Imaginärteil (im Punkt  $z_0$ ) stetig sind.

## Beispiele:

(a)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^2$  ist stetig. Jedes Polynom mit reellen oder komplexen Koeffizienten ist stetig.

(b)  $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $g(z) = \frac{1}{z}$  ist stetig. Jede rationale Funktion

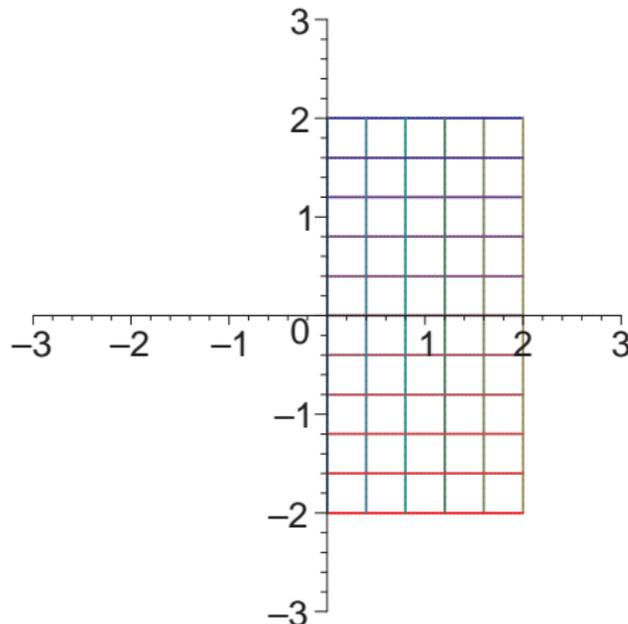
$$h : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

mit Polynomen  $P$  und  $Q$  ist stetig. Hierbei bezeichnen  $z_1, \dots, z_r \in \mathbb{C}$  sämtliche Nullstellen des Polynoms  $Q$ .

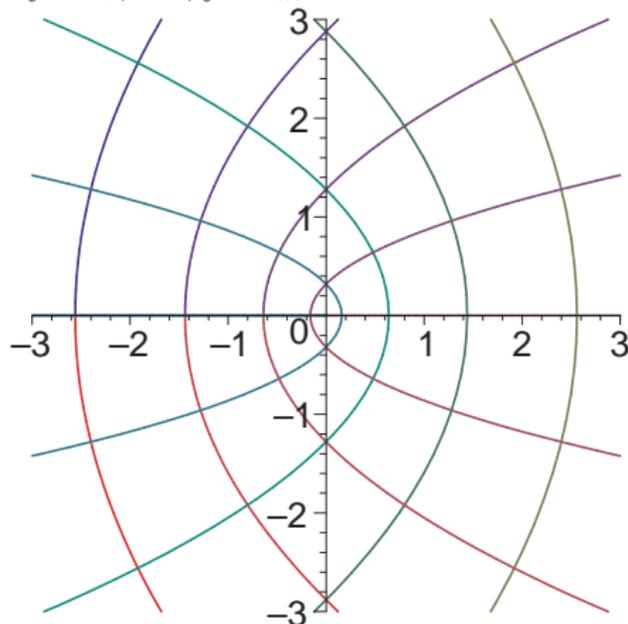
(c)  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $h(z) = e^z$  ist stetig.

## Darstellung komplexer Funktionen

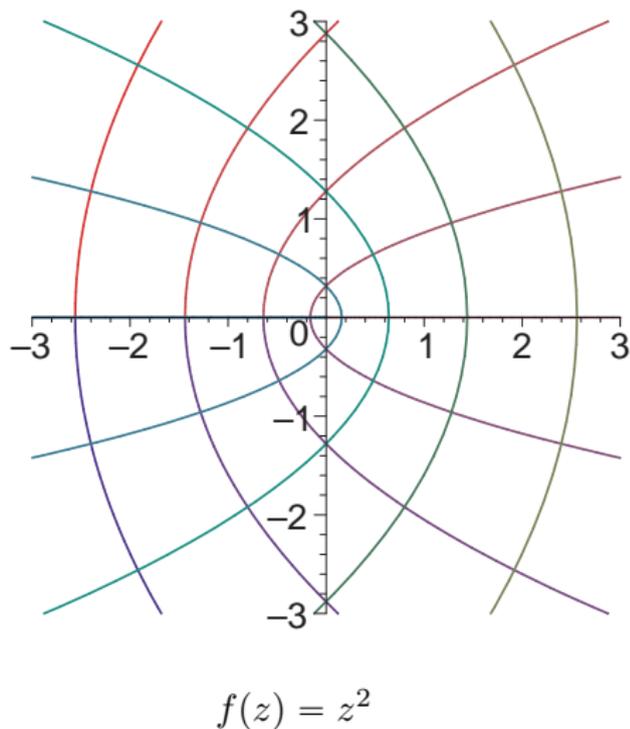
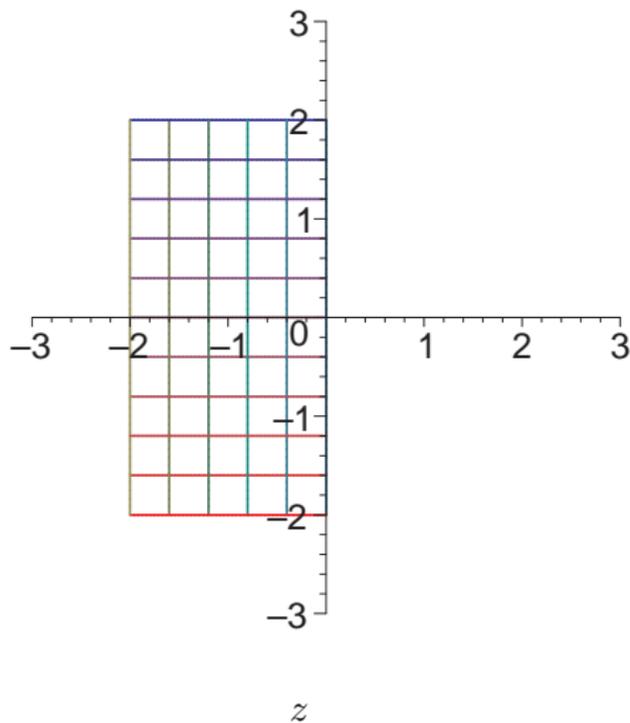
- Zeichne die Graphen von  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  getrennt.
- Häufige Alternative: zeichne zu mehreren Kurven  $\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_m$  im Definitionsbereich  $M$  die Bildkurven  $f \circ \vec{c}_1, \dots, f \circ \vec{c}_m$ .

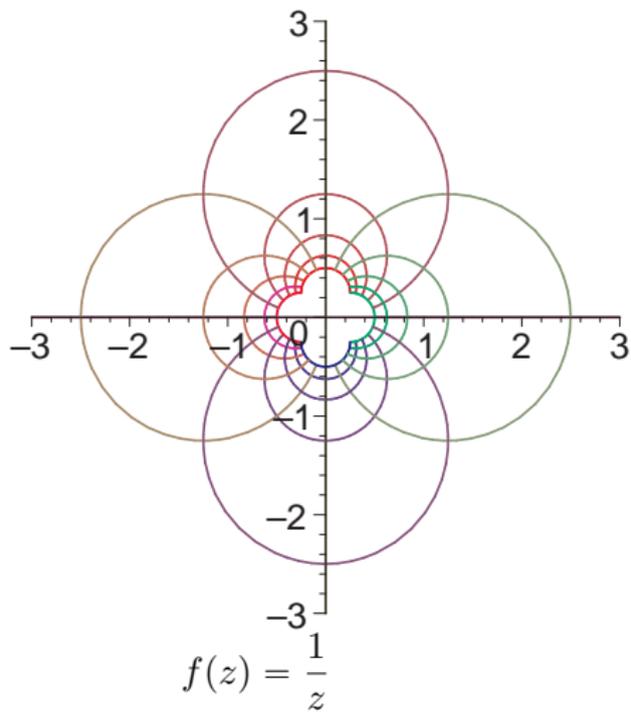
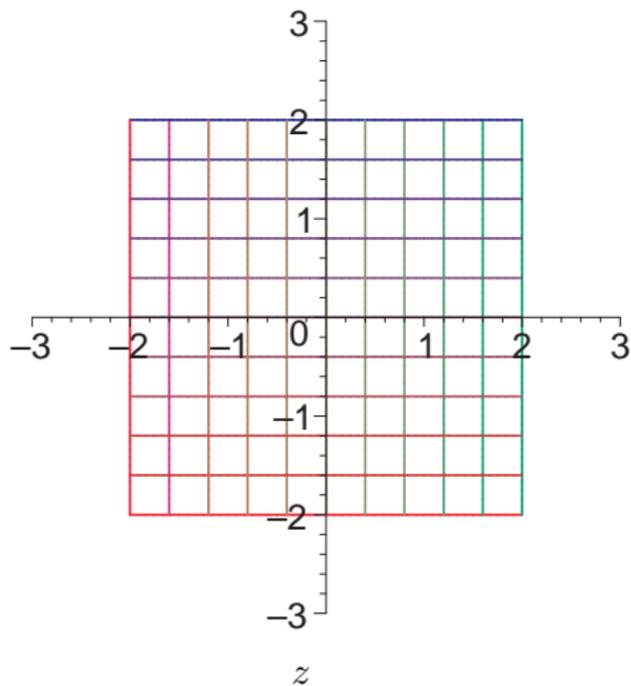


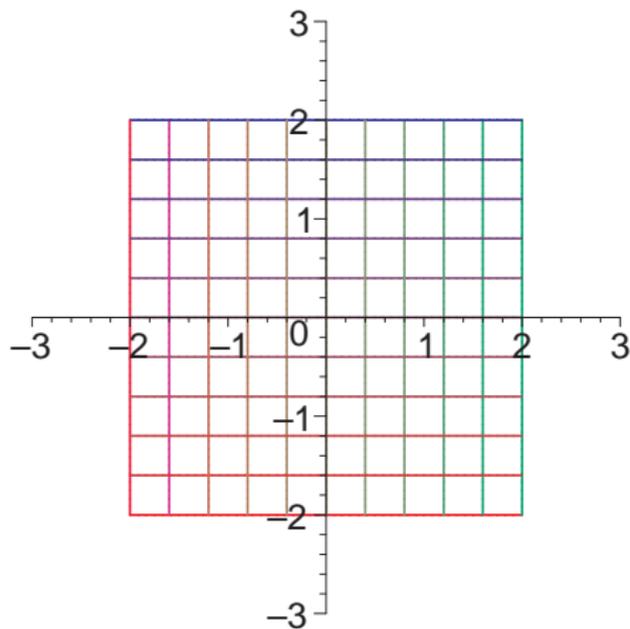
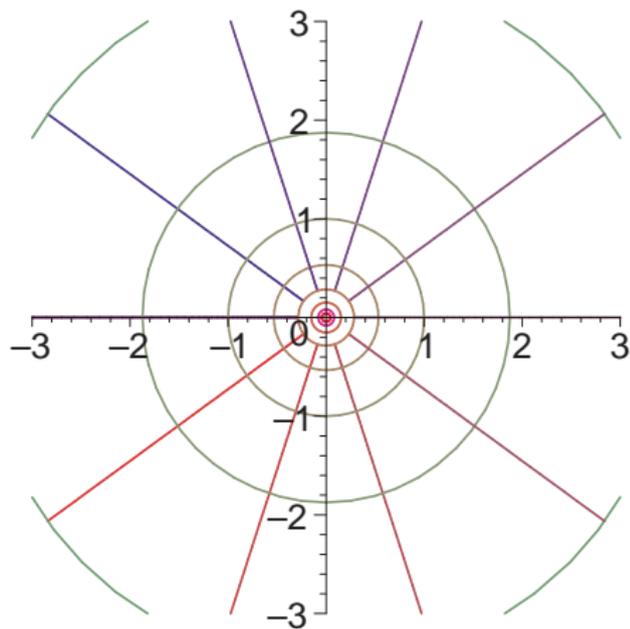
$z$



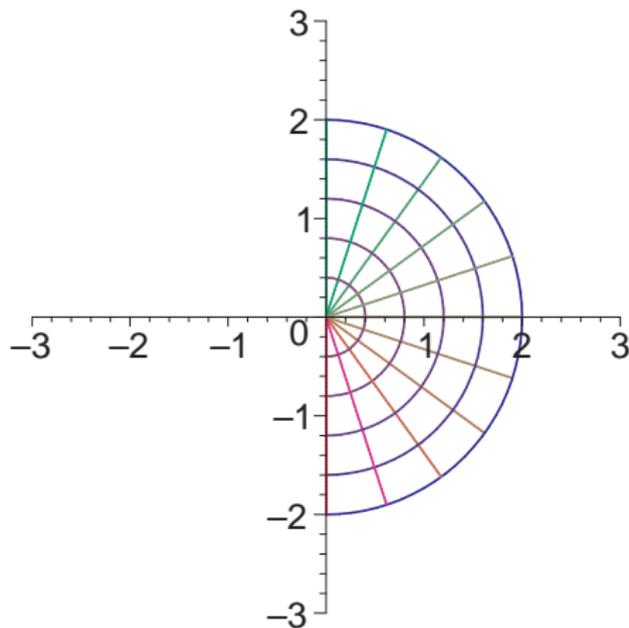
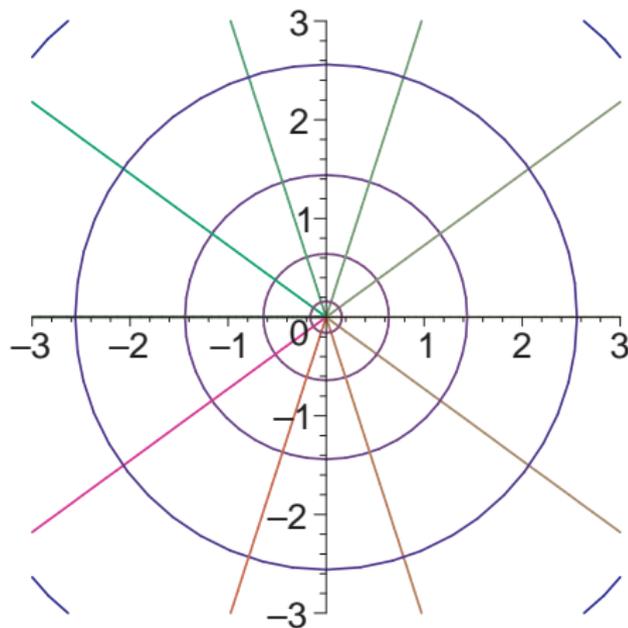
$$f(z) = z^2$$

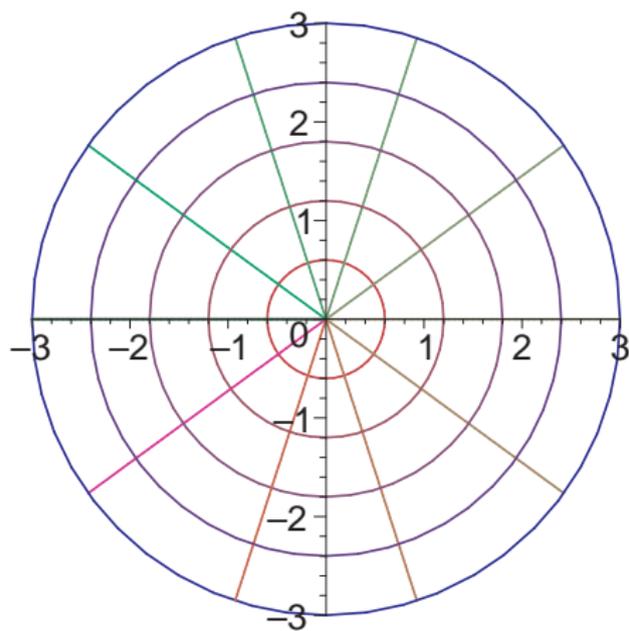
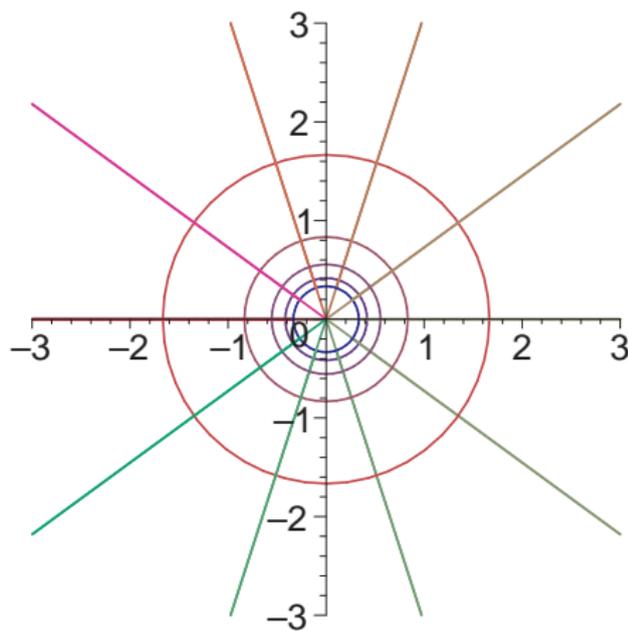




 $z$  $f(z) = e^z$

Bilder in "Polarkoordinaten", also den Geraden durch den Nullpunkt und Kreisen um den Nullpunkt:


 $z$ 

 $f(z) = z^2$

 $z$ 

$$f(z) = \frac{1}{z}$$



Bei Betrachtung der Beispiele stellt man fest:

Schneiden sich die Kurven  $c_1$  und  $c_2$  des Definitionsbereichs rechtwinklig im Punkt  $z_0$ , so schneiden sich die Bildkurven  $f \circ c_1$  und  $f \circ c_2$  im Punkt  $f(z_0)$  ebenfalls rechtwinklig.

**Bemerkung:** Diese Eigenschaft gilt auch für andere Schnittwinkel  $\alpha \neq \pi/2$ . Dies führt auf die Definition der KONFORMEN ABBILDUNG.

**Definition 26.6 (Komplexe Differenzierbarkeit)**

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sowie  $z_0 \in M$  seien gegeben.  
 $f$  heißt KOMPLEX DIFFERENZIERBAR in  $z_0$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$$

existiert. Die komplexe Zahl  $f'(z_0)$  heißt die Ableitung von  $f$  in  $z_0$ . Falls  $f$  in jedem Punkt von  $M$  komplex differenzierbar ist, so heißt  $f$  HOLOMORPH in  $M$ .

**Bemerkung:** Die Holomorphie (=komplexe Differenzierbarkeit im Gebiet  $M$ ) ist eine sehr starke Eigenschaft: Im nächsten Abschnitt zeigen wir, dass hieraus die Eigenschaft folgt, dass  $f$  um jeden Punkt  $z_0$  in eine Potenzreihe entwickelt werden kann. Hieraus folgt dann:

**Satz 26.7**

Falls  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist, so ist  $f$  unendlich oft komplex differenzierbar!

Wir benötigen keine neuen Rechenregeln!

Satz 26.8 (Rechenregeln für die komplexe Ableitung)

*Für die komplexe Ableitung gelten die gleichen Rechenregeln wie im Reellen: die Summe, die Differenz, das Produkt, der Quotient und die Verkettung von komplex differenzierbaren Funktionen ist wieder komplex differenzierbar, und die Ableitung wird mit den Regeln für Summen, Differenzen bzw. mit der Produkt-, Quotienten- und Kettenregel berechnet.*

Wir kommen auf die geometrische Betrachtung zurück:

### Definition 26.9 (Konforme Abbildung)

- Der ORIENTIERTE WINKEL  $\alpha = \angle(c_1, c_2)$  zwischen zwei regulären Kurven  $c_1, c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  mit gleichem Anfangspunkt  $z_0$  wird definiert als

$$\alpha = \arg \dot{c}_2(0) - \arg \dot{c}_1(0).$$

- Eine komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  auf einem Gebiet  $M$  heißt KONFORM, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
  - (a) Für jede reguläre Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  ist auch die Bildkurve  $f \circ c$  regulär.
  - (b) Schneiden sich zwei reguläre Kurven  $c_1$  und  $c_2$  im Punkt  $z_0 \in M$  mit dem orientierten Winkel  $\alpha$ , so schneiden sich die Bildkurven  $f \circ c_1$  und  $f \circ c_2$  im Punkt  $f(z_0)$  ebenfalls mit dem orientierten Winkel  $\alpha$ , d.h.  $f$  ist winkeltreu.

**Satz 26.10 (Holomorphe und konforme Funktionen)**

*Jede holomorphe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , die zusätzlich  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in M$  erfüllt, ist konform.*

**Beispiel:** Man betrachte nochmals die Bilder zu  $f(z) = z^2$ .

- $f$  ist in  $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  konform, denn  $f$  ist holomorph in  $M$  und  $f'(z) \neq 0$  für alle  $z \in M$ .
- Die Kurven in  $\mathbb{C}$ , die durch den Nullpunkt  $z_0 = 0$  laufen, haben keine regulären Bildkurven. Also ist  $f$  nicht in ganz  $\mathbb{C}$  konform.

In diesem Zusammenhang sei der folgende Hauptsatz der Funktionentheorie erwähnt.

**Satz 26.11 (Riemannscher Abbildungssatz)**

*$M \subset \mathbb{C}$  sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und es sei  $M \neq \mathbb{C}$ . Dann existiert eine **bijektive konforme holomorphe** Abbildung von  $M$  auf die Einheitskreisscheibe*

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

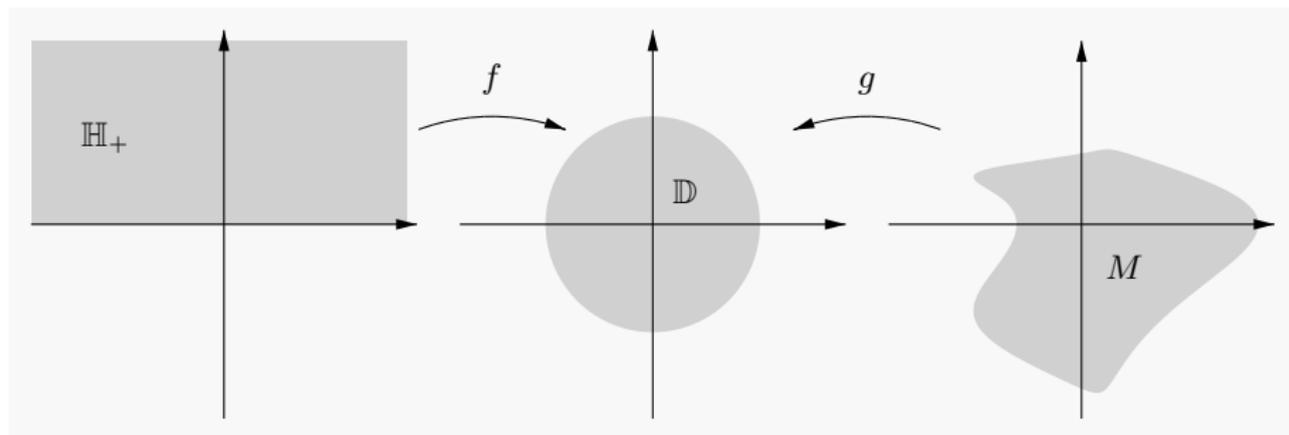
Der Beweis gibt keine konkrete Abbildung an, sondern zeigt nur die Existenz.

**Beispiel:** Die obere Halbebene

$$\mathbb{H}_+ = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0\}$$

ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Die Funktion  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  bildet  $\mathbb{H}_+$  bijektiv, holomorph und konform auf den Einheitskreis  $\mathbb{D}$  ab.

Der Beweis dieser Tatsache erfolgt später.



### Satz 26.12 (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)

Auf dem Gebiet  $M \subseteq \mathbb{C}$  sei die komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

mit  $u = \operatorname{Re} f$  und  $v = \operatorname{Im} f$  definiert. Dann sind äquivalent:

- (i)  $f$  ist holomorph in  $M$ .
- (ii)  $u$  und  $v$  sind in  $M$  stetig partiell differenzierbar, und die partiellen Ableitungen erfüllen die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen.

$$\begin{aligned}u_x(x_0, y_0) &= a, & v_x(x_0, y_0) &= b, \\u_y(x_0, y_0) &= -b, & v_y(x_0, y_0) &= a,\end{aligned}$$

in Kurzform

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

In diesem Fall ist die komplexe Ableitung

$$f'(z) = f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y).$$

## 26.13 (Ergänzung)

Betrachtet man eine in  $z_0 = x_0 + iy_0$  komplex differenzierbare Funktion  $f$  mit

$f'(z_0) \neq 0$  als  $\tilde{f}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}$ , so hat die Ableitungsmatrix die Form

$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , ist also das Vielfache einer orthogonalen Matrix. Daraus folgt noch einmal die Winkeltreue.

## Satz 26.14

Die komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  mit Realteil  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  und Imaginärteil  $v : M \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann im Punkt  $z_0 = x_0 + iy_0 \in M$  komplex differenzierbar, wenn  $u$  und  $v$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  total differenzierbar sind und dort die Cauchy-Riemann Dgl. gelten.

## 26.15 (Folgerung)

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und die komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph in  $M$ .

- (a) Falls  $f'(z) = 0$  für alle  $z \in M$  gilt, so ist  $f$  konstant.
- (b) Falls  $|f|$  eine konstante Funktion ist, so ist auch  $f$  konstant.

Eine viel weitreichendere Folgerung der CR-Dgl'en ist:

**Satz 26.16 (Zusammenhang holomorpher und harmonischer Funktionen)**

*Sowohl der Realteil als auch der Imaginärteil einer holomorphen Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sind HARMONISCH, d.h. für  $f = u + iv$  gilt*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \Delta v = v_{xx} + v_{yy} = 0 \quad \text{in } M.$$

**Ziel:** Konstruktion einer holomorphen Funktion  $f(z) = f(x + iy)$ , wenn z.B. nur der Realteil  $u(x, y)$  vorgegeben ist.

### Definition 26.17 (konjugiert harmonische Funktionen)

$M$  sei ein Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  (oder in  $\mathbb{C}$ ). Zwei harmonische Funktionen  $u, v : M \rightarrow \mathbb{R}$  heißen ZUEINANDER KONJUGIERT HARMONISCH, wenn sie die CR-Dgl'en erfüllen.

In diesem Fall ist die komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

holomorph in  $M$ .

## Satz 26.18 (Konstruktion einer konjugiert harmonischen Funktion)

$M \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein *einfach-zusammenhängendes Gebiet* und  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei harmonisch. Weiter sei  $z_0 = x_0 + iy_0 \in M$ .

Dann gibt es zu jedem Anfangswert  $A \in \mathbb{R}$  genau eine harmonische Funktion  $v : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $v(x_0, y_0) = A$  und so, dass  $u$  und  $v$  zueinander konjugiert harmonisch sind.

Für jede stückweise reguläre Kurve  $\vec{c} : [0, b] \rightarrow M$  mit dem Anfangspunkt  $\vec{c}(0) = (x_0, y_0)$  gilt

$$v(\vec{c}(b)) = A + \int_{\vec{c}} (-u_y dx + u_x dy).$$

## Bemerkung:

- Man beachte, dass das vektorielle Kurvenintegral in diesem Satz wegunabhängig ist. Dies erkennt man daran, dass das Vektorfeld  $(-u_y, u_x)$  die Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$(-u_y)_y = (u_x)_x, \quad \text{denn } u \text{ ist harmonisch.}$$

- Der Satz besagt: Zu einer harmonischen Funktion  $u$  auf einem einfach-zusammenhängenden Gebiet  $M \subseteq \mathbb{C}$  lässt sich immer eine harmonische Funktion  $v$  konstruieren, so dass  $f = u + iv$  holomorph auf  $M$  ist.

Eine einfache Folgerung aus Satz 26.18 ist:

### Satz 26.19

*$M, N \subseteq \mathbb{C}$  seien einfach zusammenhängende Gebiete. Falls  $f : M \rightarrow N$  holomorph ist und  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  harmonisch ist, so ist auch  $h = g \circ f$  harmonisch.*

Mit Hilfe dieser Tatsache und des Riemannsches Abbildungssatzes kann man das Dirichlet-Problem der Potentialgleichung auf das Standardgebiet "Einheitskreis" transportieren, dort lösen und die Lösung auf das ursprüngliche Gebiet zurückübersetzen.

# Kapitel 27 – Beispiele holomorpher Funktionen

## Beispiele holomorpher Funktionen

Viele “elementare” Funktionen aus der reellen Analysis lassen sich auf  $\mathbb{C}$  erweitern.

### 27.1 Polynome, rationale Funktionen

- Jedes Polynom

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad P(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n,$$

mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$  ist holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ .

- Jede rationale Funktion

$$R : \mathbb{C} \setminus N_Q \rightarrow \mathbb{C}, \quad R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

wobei  $P$  und  $Q$  Polynome sind und die Menge  $N_Q := \{z_1, \dots, z_m\} \subset \mathbb{C}$  die Menge aller Nullstellen von  $Q$  ist, ist holomorph in ganz  $\mathbb{C} \setminus N_Q$ .

**Bemerkung:**

- Bis auf einen konstanten Vorfaktor, sind Polynome bereits durch ihre Nullstellen (und deren Vielfachheit) festgelegt:

$$P(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k),$$

falls  $P$  ein Polynom vom Grad  $n$  mit dem Höchstkoeffizienten  $a_n \neq 0$  ist.

- Rationale Funktionen  $R = \frac{P}{Q}$  treten als sog. “Filter” in der Signalverarbeitung auf. Zur Darstellung zeichnet man häufig ein Diagramm, das nur die Nullstellen  $N_R$  und die Polstellen  $N_Q$  enthält.

## 27.2 Die Exponentialfunktion

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

ist holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ , und es gilt

$$f'(z) = e^z \quad \text{und} \quad e^{z+w} = e^z e^w, \quad w, z \in \mathbb{C}.$$

Die angegebene Potenzreihe konvergiert für jedes  $z \in \mathbb{C}$ . Sie konvergiert sogar gleichmäßig auf beschränkten Teilmengen  $M \subset \mathbb{C}$ .

- Real- und Imaginärteil von  $e^z$  (mit  $z = x + iy$ ) erhält man aus

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Insbesondere gilt

$$|e^z| = e^x \quad \text{für} \quad z = x + iy.$$

- Die Exponentialfunktion auf  $\mathbb{C}$  ist nicht injektiv. Vielmehr ist sie  $2\pi$ -periodisch in  $y$ -Richtung:

$$e^{z+2\pi i} = e^z \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Um eine Umkehrfunktion  $\ln z$  zu definieren, muss man die Exponentialfunktion auf einen Streifen parallel zur  $x$ -Achse einschränken, z.B.

$$S = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi) \subset \mathbb{C}.$$

## 27.3 Die Hyperbel-Funktionen

$$\cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \cosh(z) = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sinh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

sind holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ , ihre Potenzreihen konvergieren für jedes  $z \in \mathbb{C}$ . Es gilt

$$(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z.$$

- Real- und Imaginärteil der Funktionen lassen sich leicht berechnen:

$$\cosh(x + iy) = \frac{1}{2}(e^x(\cos y + i \sin y) + e^{-x}(\cos y - i \sin y)) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y,$$

$$\sinh(x + iy) = \frac{1}{2}(e^x(\cos y + i \sin y) - e^{-x}(\cos y - i \sin y)) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y.$$

Hieran erkennt man

$$\cosh\left(z + i\frac{\pi}{2}\right) = i \sinh z$$

und

$$|\cosh z| \leq \cosh x, \quad |\sinh z| \leq \cosh x \quad \text{für } z = x + iy.$$

- Beide Hyperbelfunktionen sind  $2\pi$ -periodisch in  $y$ -Richtung:

$$\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z, \quad \sinh(z + 2\pi i) = \sinh z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

## 27.4 Die komplexe Cosinus- und Sinusfunktion

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

sind holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ , ihre Potenzreihen konvergieren für jedes  $z \in \mathbb{C}$ .

Es gilt

$$(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z.$$

Wie im Reellen ist

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

- Real- und Imaginärteil der Funktionen lassen sich ebenso berechnen:

$$\cos(x + iy) = \frac{1}{2}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,$$

$$\sin(x + iy) = \frac{1}{2i}(e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Hieran erkennt man, dass die aus dem Reellen bekannten Beziehungen

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin z \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$$

auch im Komplexen gültig ist. Weiterhin gilt

$$|\cos z| \leq \cosh y, \quad |\sin z| \leq \cosh y \quad \text{für } z = x + iy.$$

Insbesondere sind  $\cos z$  und  $\sin z$  im Komplexen NICHT beschränkt.

- Der komplexe Cosinus und Sinus ist  $2\pi$ -periodisch in  $x$ -Richtung:

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

## 27.5 Wurzelfunktion

- Wir betrachten zunächst die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = z^2$ . Für  $0 \leq \alpha \leq \pi$  betrachten wir die HALBEBENE

$$H_\alpha = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0, \alpha < \arg z < \alpha + \pi\}.$$

Die Einschränkung

$$f|_{H_\alpha} : H_\alpha \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid w \neq 0, \arg w \neq 2\alpha\}$$

ist bijektiv. Die Bildmenge ist ganz  $\mathbb{C}$  ohne einen Strahl  $\Gamma_\beta$  ausgehend vom Nullpunkt in Richtung  $\arg z = \beta$  mit  $\beta = 2\alpha$ ; diesen Strahl nennt man einen VERZWEIGUNGSSCHNITT und  $\mathbb{C} \setminus \Gamma_\beta$  eine GESCHLITZTE EBENE.

- Zu jedem Schnitt  $\Gamma_\beta$  kann die Umkehrfunktion gebildet werden:

$$g_1 : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\beta \rightarrow H_\alpha, \quad g_1(z) = \sqrt{z}.$$

$g_1$  ist holomorph und definiert einen ZWEIG der komplexen Wurzelfunktion zum Schnitt  $\Gamma_\beta$ : Mit Polarkoordinaten für  $z = |z|e^{i\phi}$  und  $\phi = \arg z \in (\beta, \beta + 2\pi)$  gilt

$$g_1(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\phi/2} \in H_\alpha, \quad \alpha = \beta/2.$$

- Ein zweiter Zweig der Wurzelfunktion zum Schnitt  $\Gamma_\beta$  ist die holomorphe Funktion

$$g_2(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i(\phi/2+\pi)} \in H_{\alpha+\pi}.$$

- Für jeden Schnitt  $\Gamma_\beta$  gibt es zwei Zweige  $g_1$  und  $g_2$  der Wurzelfunktion. Für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_\beta$  gilt (wie im Reellen)

$$g_1'(z) = \frac{1}{2g_1(z)}, \quad g_2'(z) = \frac{1}{2g_2(z)}.$$

Hierbei darf man nicht von dem Zweig  $g_1$  auf den anderen Zweig  $g_2$  “springen”.

**27.6 Bemerkung:** Ebenso lassen sich zum Schnitt  $\Gamma_\beta$  jeweils  $n$  Zweige der  $n$ -ten Wurzelfunktion bestimmen: mit  $z = |z|e^{i\phi}$  und  $\phi = \arg z \in (\beta, \beta + 2\pi)$  ist

$$g_k : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\beta \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid w \neq 0, (\beta + 2k\pi)/n < \arg w < (\beta + 2(k+1)\pi)/n\},$$

$$g_k(z) = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\phi+2k\pi)/n},$$

der  $k$ -te Zweig von  $\sqrt[n]{z}$ ,  $0 \leq k \leq n-1$ . Die Bildmenge ist jeweils ein Kegel mit Spitze in 0 und Öffnungswinkel  $2\pi/n$ .

Die Funktionen  $g_k$  sind holomorph und es gilt (wie im Reellen)

$$g'_k(z) = \frac{1}{n(g_k(z))^{n-1}}.$$

Hierbei darf man nicht auf einen anderen Zweig der  $n$ -ten Wurzel "springen".

## 27.7 Logarithmusfunktion

- Wir betrachten zunächst die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $f(z) = e^z$ .  
Für  $c \in \mathbb{R}$  definieren wir den STREIFEN

$$S_c = \{z \in \mathbb{C} \mid c < \operatorname{Im} z < c + 2\pi\},$$

also eine "Periode" der komplexen Exponentialfunktion. Die Einschränkung

$$f|_{S_c} : S_c \rightarrow \{w \in \mathbb{C} \mid w \neq 0, \arg w \neq c + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

ist **bijektiv**. Die Bildmenge besitzt den Verzweigungsschnitt  $\Gamma_c$ .

- Insbesondere wählen wir den Schnitt  $\Gamma_\pi$ . Die Umkehrfunktion wird mit "log z" bezeichnet:

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = x + 0i, x \leq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

log ist holomorph und definiert einen "Zweig" der komplexen Logarithmusfunktion zum Schnitt  $\Gamma_\pi$ : Mit Polarkoordinaten für  $z = |z|e^{i\phi}$  und  $\phi = \arg z \in (-\pi, \pi)$  gilt

$$\log_0(z) := \log z = \ln |z| + i\phi.$$

- Weitere Zweige der Logarithmusfunktion zum gleichen Schnitt  $\Gamma_\pi$  sind

$$\log_k(z) = \ln |z| + i(\phi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- Es gilt (wie im Reellen)

$$\log'_k(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi.$$

- **Bemerkung:** Mit dem gleichen Verzweigungsschnitt bei  $\arg z = \pi$  für alle beteiligten Funktionen **und bei passender Wahl der Zweige** gelten die Formeln

$$\sqrt{z} = e^{(\log z)/2} = z^{1/2}, \quad \sqrt[n]{z} = e^{(\log z)/n} = z^{1/n}.$$

- Es ist stets  $\exp(\log z) = z$  und  $\log \exp(z) = z + 2k\pi i$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ .

In Verallgemeinerung der für reelle positive Basen gültigen Formel  $a^b = e^{b \ln a}$  definiert man

### Definition 27.1 (Allgemeine Potenz)

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$  mit  $z \neq 0$ . Dann ist

$$z^w := \exp(w \log z) = \exp(w(\ln |z| + i \arg z + 2k\pi i)) \text{ mit } k \in \mathbb{Z}.$$

- Für  $w \in \mathbb{Z}$  hat die allgemeine Potenz nur einen Wert.
- Die Schreibweise ist mit  $\sqrt{z} = z^{1/2}$  kompatibel.

Wir behandeln nun spezielle rationale Funktionen, deren Zähler und Nenner jeweils ein Polynom vom Grad 0 oder 1 ist.

### Definition 27.2 (Möbius-Transformation)

*Eine rationale Funktion*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \quad ad - bc \neq 0,$$

*heißt MÖBIUS-TRANSFORMATION.*

### Satz 27.3 (Eigenschaften der Möbiustransformation)

Die Möbius-Transformation  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  (mit  $ad - bc \neq 0$ ) ist holomorph und konform im Definitionsbereich  $M_f$ , wobei

- $M_f = \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ , falls  $c \neq 0$  gilt,
- $M_f = \mathbb{C}$ , falls  $c = 0$  (und  $d \neq 0$ ) ist.

Die Ableitung ist

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0 \quad \text{für alle } z \in M_f.$$

Der Bildbereich ist

- $N_f = \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ , falls  $c \neq 0$  gilt,
- $N_f = \mathbb{C}$ , falls  $c = 0$  (und  $d \neq 0$ ) gilt.

## Satz 27.4

Es gilt weiterhin:

(a) Die bijektive Funktion  $f : M_f \rightarrow N_f$  besitzt die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1} : N_f \rightarrow M_f, \quad g(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

ist also selbst wieder eine Möbius-Transformation.

(b) Die Komposition  $f \circ g$  von Möbius-Transformationen  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  und  $g(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$  lautet

$$f \circ g : M_g \rightarrow N_f, \quad (f \circ g)(z) = \frac{(ae + bg)z + (af + bh)}{(ce + dg)z + (cf + dh)},$$

ist also wieder eine Möbius-Transformation.

**Merkregeln:** Die Parameter  $a, b, c, d$  der Möbius-Transformation schreibt man in Form einer  $2 \times 2$ -Matrix:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \sim A_f := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

- Die Bedingung  $ad - bc \neq 0$  bedeutet  $\det A_f \neq 0$ .
- Die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  passt zur Matrix

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (\det A_f) A_f^{-1}.$$

- Die Komposition  $f \circ g$  passt zum Matrixprodukt

$$\begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = A_f A_g.$$

Daran erkennt man auch, dass  $f \circ g$  die Zusatzbedingung erfüllt:

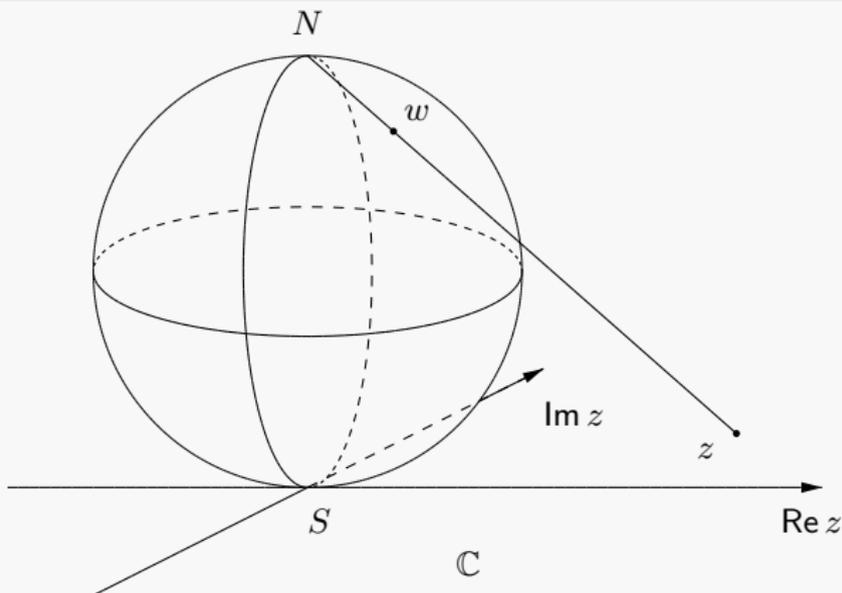
$$\det(A_f A_g) = \det \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} = \det A_f \det A_g \neq 0.$$

## Definition 27.5 (Riemannsche Zahlenkugel)

Wir definieren  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

- (a) Die RIEMANNSCHE ZAHLENKUGEL  $S$  ist eine Kugel mit Radius 1, deren Südpol im Ursprung der komplexen Ebene liegt.
- (b) Die STEREOGRAPHISCHE PROJEKTION ordnet bijektiv jedem Punkt  $w$  auf  $S$  eine Zahl  $z \in \hat{\mathbb{C}}$  zu. Der Nordpol  $N$  wird auf den "unendlich fernen Punkt"  $\infty$  abgebildet.

Damit definiert man: Eine Folge komplexer Zahlen  $z_n \in \mathbb{C}$  konvergiert gegen  $\infty$  genau dann, wenn die entsprechende Folge  $w_n \in S$  bezüglich des gewöhnlichen Abstandsbegriffs gegen  $N$  konvergiert.



Es gelten die Entsprechungen:

- Gerade in  $\mathbb{C} \iff$  Kreis auf  $S$  durch  $N$
- Kreis in  $\mathbb{C} \iff$  Kreis auf  $S$  nicht durch  $N$

Jede Möbiustransformation lässt sich als **bijektive** Abbildung  $S \rightarrow S$  auffassen, die Kreise auf  $S$  auf Kreise abbildet.

**Satz 27.6 (Geometrische Eigenschaft der Möbius-Transformation)**

Für eine beliebige Möbius-Transformation  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  (mit  $ad - bc \neq 0$ ) gilt:

- Falls  $c = 0$  ist: Die Bildmenge einer beliebigen Geraden in  $\mathbb{C}$  ist eine Gerade, und die Bildmenge einer beliebigen Kreislinie in  $\mathbb{C}$  ist eine Kreislinie.
- Falls  $c \neq 0$  ist:
  - Die Bildmenge einer beliebigen Geraden durch den Punkt  $-d/c$  ist eine Gerade durch den Punkt  $a/c$ .
  - Die Bildmenge jeder anderen Geraden in  $\mathbb{C}$  ist eine Kreislinie durch den Punkt  $a/c$ .
  - Die Bildmenge einer beliebigen Kreislinie durch den Punkt  $-d/c$  ist eine Gerade.
  - Die Bildmenge jeder anderen Kreislinie in  $\mathbb{C}$  ist eine Kreislinie.

**Kurz gesagt:** Jede Möbius-Transformation bildet Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab.

Satz 27.7 (Geraden und Kreise in  $\mathbb{C}$ )

- Die Gerade  $px + qy = c$  (mit  $p, q, c \in \mathbb{R}$  und  $(p, q) \neq (0, 0)$ ) in der Gaußschen Zahlenebene wird beschrieben durch

$$\alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} = \beta \quad (\alpha = p - qi \in \mathbb{C}, \quad \alpha \neq 0, \quad \beta = 2c \in \mathbb{R}).$$

- Der Kreis  $|z - z_0|^2 = r^2$  (mit  $r > 0$ ) wird beschrieben durch

$$z \bar{z} + \alpha z + \bar{\alpha} \bar{z} = \beta \quad (\alpha = -\bar{z}_0 \in \mathbb{C}, \quad \beta = r^2 - |z_0|^2 \in \mathbb{R}, \quad \alpha \bar{\alpha} + \beta = r^2 > 0).$$

Als Methode zur Konstruktion von Möbius-Transformationen wird das DOPPELVERHÄLTNIS verwendet.

**27.14 Ziel:** Bestimme eine Möbius-Transformation, die die 3 Punkte  $z_1, z_2, z_3$  auf die 3 Bildpunkte  $w_1, w_2, w_3$  abbildet.

**Beachte:** Je drei Punkte bestimmen einen Kreis oder eine Gerade.

**Lösung:** Stelle das Doppelverhältnis auf (auch 6-PUNKTE-FORMEL genannt):

$$\underbrace{\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)}}_{=g(w)} = \underbrace{\frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}}_{=h(z)}$$

Auflösen nach  $w$  ergibt eine Möbius-Transformation

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit } ad - bc \neq 0.$$

Dass tatsächlich  $w_k = f(z_k)$  für  $k = 1, 2, 3$  erfüllt ist, sieht man folgendermaßen:

$$g(w) = h(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = w_1 \quad \text{und} \quad z = z_1,$$

$$g(w) = h(z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad w = w_2 \quad \text{und} \quad z = z_2,$$

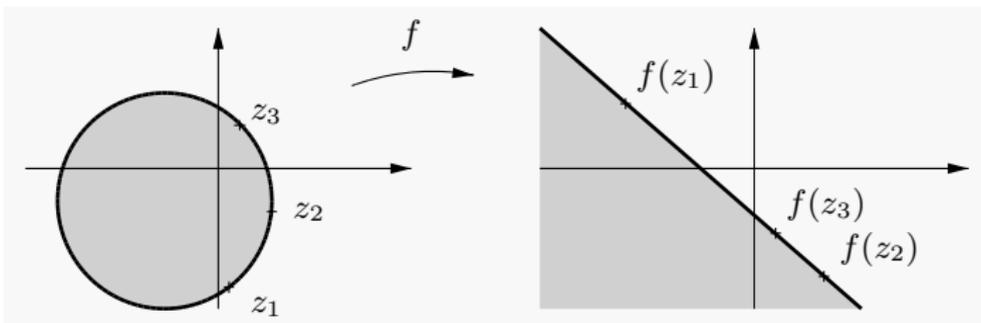
$$g(w) = h(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad w = w_3 \quad \text{und} \quad z = z_3.$$

**27.15 Bemerkung:** Die orientierte Kreislinie (oder Gerade) durch die Punkte  $z_1, z_2, z_3$  teilt  $\mathbb{C}$  in zwei disjunkte Mengen: eine Menge  $M_1$ , die links von dieser Linie liegt, und eine Menge  $M_2$ , die rechts von dieser Linie liegt.

Ebenso ergibt die orientierte Kreislinie (oder Gerade) durch die Bildpunkte  $w_1, w_2, w_3$  eine Menge  $N_1$ , die links von dieser Linie liegt, und eine Menge  $N_2$ , die rechts von dieser Linie liegt.

Als konforme Abbildung muss die Möbius-Transformation diese Orientierung beibehalten, d.h. die Bildmengen sind

$$f(M_1) = N_1, \quad f(M_2) = N_2.$$



**27.16 Bemerkung** Für Geraden bietet sich die Wahl des "Punktes"  $z_k = \infty$  für ein  $k$  an. Wird z.B.  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 1$ ,  $z_3 = \infty$  gewählt (Gerade  $G =$  reelle Achse), so vereinfacht sich die rechte Seite im Doppelverhältnis zu

$$h(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = z.$$

Genauer: Die Faktoren im Zähler und Nenner, die  $z_k = \infty$  enthalten, werden gegeneinander "gekürzt", d.h. ihr Quotient wird durch 1 ersetzt.

Ebenso darf man auch mit der Wahl der Bildpunkte verfahren, falls sie auf einer Geraden liegen. Dadurch vereinfacht sich die linke Seite im Doppelverhältnis entsprechend.

**Beweis von  $f(\mathbb{H}_+) = \mathbb{D}$  für  $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ :**

$f(z) = \frac{z-i}{z+i}$  ist eine Möbiustransformation mit  $f(0) = -1$ ,  $f(\infty) = 1$  und  $f(1) = \frac{1-i}{1+i} = \frac{-2i}{2} = -i$ . Daher wird die reelle Achse auf die Einheitskreislinie abgebildet.

Wegen  $f(i) = 0$  wird die obere Halbebene auf das Innere des Kreises abgebildet.

### Beispiel: Allpass-Filter

Die speziellen Möbius-Transformationen der Form

$$h_\alpha(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{C}, |\alpha| < 1,$$

bilden jeweils bijektiv  $\left\{ \begin{array}{l} \text{das Innere} \\ \text{den Rand} \\ \text{das Äußere} \end{array} \right\}$  des Einheitskreises auf sich ab. Denn:

- die Werte

$$h_\alpha(1) = \frac{1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}}, \quad h_\alpha(i) = \frac{i - \alpha}{1 - i\bar{\alpha}} = i \frac{1 + i\alpha}{1 + i\bar{\alpha}}, \quad h_\alpha(-1) = \frac{-1 - \alpha}{1 + \bar{\alpha}}$$

liegen alle auf dem Rand des Einheitskreises (sie sind von der Form  $\sigma \frac{w}{\bar{w}}$  mit  $\sigma \in \{1, -1, i\}$ , haben also den Betrag 1.)

- Weil  $h_\alpha$  eine Möbius-Transformation ist, bildet sie die gesamte Einheits-Kreislinie bijektiv auf einen Kreis oder eine Gerade ab. Wir haben durch die Angabe der 3 Bildpunkte gezeigt, dass das Bild wieder die Einheits-Kreislinie ist.
- Um zu entscheiden, ob das Innere des Einheitskreises auf sich abgebildet wird, braucht man nur einen Wert zu testen, z.B.  $h_\alpha(0) = -\alpha$ . Wegen  $|\alpha| < 1$  liegt  $h_\alpha(0)$  im Innern des Einheitskreises, also wird das gesamte Innere des Einheitskreises bijektiv auf sich abgebildet. Dann folgt auch, dass das Äußere bijektiv auf sich abgebildet wird.
- Beachte:  $|\alpha| > 1$  würde eine Umkehrung des Inneren nach außen bewirken.

Diese speziellen Möbius-Transformationen heißen *Allpass-Filter*, da

$$|S(z)h_\alpha(z)| = |S(z)| \quad \text{für alle } z \text{ der Form } z = e^{it}$$

gilt, die Amplitude eines gegebenen Signals  $S(z)$  also erhalten bleibt.

# Kapitel 28 – Holomorphe Funktionen: Cauchy'sche Integralsätze

## Holomorphe Funktionen und die Cauchy'schen Integralsätze

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Eigenschaften holomorpher Funktionen entwickelt. Grundlage ist ein Integralsatz, den wir in 3 Versionen angeben werden.

**Motivation:** Wir versuchen, das Konzept der Stammfunktion mit Hilfe komplexer Kurvenintegralen zu entwickeln.

Die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z$  ist holomorph in ganz  $\mathbb{C}$ . Die Funktionen

$$F(z) = \frac{z^2}{2} + A \quad \text{mit einer Konstanten } A \in \mathbb{C}$$

sind ihre **komplexen Stammfunktionen**, denn  $F'(z) = f(z)$ .

Wir versuchen nun, die Stammfunktionen  $F$  durch ein geeignetes Kurvenintegral zu bestimmen. Zu gegebenem  $z \in \mathbb{C}$  wählen wir die Strecke von 0 nach  $z$

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \quad c(t) = tz.$$

Definieren wir das **KOMPLEXE KURVENINTEGRAL** gemäß

$$\int_c f(w) dw = \int_0^1 f(c(t)) \dot{c}(t) dt = \int_0^1 tz \cdot z dt = z^2 \int_0^1 t dt = \frac{z^2}{2},$$

so ergibt sich die Stammfunktion  $F$  mit  $F(0) = 0$ .

Alle Stammfunktionen erhält man also als

$$F(z) = A + \int_c f(w) dw.$$

## 28.2 Bemerkung:

- Das gerade verwendete komplexe Kurvenintegral

$$\int_c f(z) dz = \int_0^1 f(c(t)) \dot{c}(t) dt$$

ist tatsächlich etwas ganz Neues. Hier wird das komplexe Produkt von  $f(c(t)) \in \mathbb{C}$  mit dem "Tangentenvektor"  $\dot{c}(t) \in \mathbb{C}$  gebildet. Dies unterscheidet sich wesentlich vom Skalarprodukt von Vektoren im  $\mathbb{R}^2$ , das beim reellen vektoriellen Kurvenintegral 20.6 auftritt.

Den Zusammenhang zum vektoriellen Kurvenintegral erkennt man mit

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

und

$$\begin{aligned} c(t) &= c_1(t) + ic_2(t) \\ \vec{c}(t) &:= (c_1(t), c_2(t))^T. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\vec{c}$  eine Kurve  $\vec{c}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ .

Dann ist das komplexe Kurvenintegral gegeben durch

$$\begin{aligned}\int_c f(z) dz &= \int_0^1 f(c(t)) \dot{c}(t) dt \\ &= \int_0^1 (u(\vec{c}(t)) + iv(\vec{c}(t))) (\dot{c}_1(t) + i\dot{c}_2(t)) dt \\ &= \int_0^1 [u(\vec{c}(t))\dot{c}_1(t) - v(\vec{c}(t))\dot{c}_2(t) + i(u(\vec{c}(t))\dot{c}_2(t) + v(\vec{c}(t))\dot{c}_1(t))] dt \\ &= \int_{\vec{c}} (u dx - v dy) + i \int_{\vec{c}} (u dy + v dx),\end{aligned}$$

also durch je ein vektorielles Kurvenintegral für den Real- und Imaginärteil.

**Definition 28.1 (Komplexes Kurvenintegral)**

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und

$$c : [a, b] \rightarrow M.$$

sei eine stückweise reguläre Kurve in  $M$ . Für eine stetige komplexe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir das **KOMPLEXE KURVENINTEGRAL**

$$\int_c f(z) dz := \int_a^b f(c(t)) \dot{c}(t) dt.$$

Dieses lässt sich mit Hilfe von zwei vektoriellen Kurvenintegralen

$$\int_c f(z) dz = \int_{\vec{c}} (u dx - v dy) + i \int_{\vec{c}} (v dx + u dy)$$

schreiben, wobei  $f = u + iv$  und  $\vec{c} = (\operatorname{Re}(c), \operatorname{Im}(c))^T$  gesetzt wird.

**Satz 28.2 (Grundlegende Eigenschaften des komplexen Kurvenintegrals)**

Die Funktionen  $f, g : M \rightarrow \mathbb{C}$  seien stetig und die Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  sei stückweise regulär.

(a) *Linearität:* 
$$\int_c (af(z) + bg(z)) dz = a \int_c f(z) dz + b \int_c g(z) dz \text{ für alle } a, b \in \mathbb{C}.$$

(b) *Umkehrung der Kurve:* 
$$\int_{-c} f(z) dz = - \int_c f(z) dz. \text{ Dabei ist } -c : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{C}$$
 definiert durch  $-c(t) := c(-t)$ .

(c) *Ist  $c$  aus stückweise regulären Kurven  $c_1, \dots, c_n$  zusammengesetzt, so gilt*

$$\int_c f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{c_k} f(z) dz.$$

(d) *Der Betrag des komplexen Kurvenintegrals lässt sich durch ein skalares Kurvenintegral abschätzen:*

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq \int_{\vec{c}} |f| ds = \int_a^b |f(c(t))| |\dot{c}(t)| dt.$$

**Folgerung aus (d):** Falls  $|f(z)| \leq M$  entlang der Kurve  $c$  gilt, so ist

$$\left| \int_c f(z) dz \right| \leq M \ell_c,$$

wobei  $\ell_c = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt$  die Bogenlänge der Kurve  $c$  ist, siehe 20.3.

Eine wichtige Eigenschaft ist die folgende:

### Satz 28.3 (Wegunabhängigkeit des komplexen Kurvenintegrals)

*$M \subseteq \mathbb{C}$  sei einfach zusammenhängend und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Sind  $c_1$  und  $c_2$  stückweise reguläre Kurven in  $M$ , die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt besitzen, so gilt*

$$\int_{c_1} f(z) dz = \int_{c_2} f(z) dz.$$

**Satz 28.4 (komplexe Stammfunktion)**

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei eine komplexe Funktion.

Die Funktion  $F : M \rightarrow \mathbb{C}$  heißt **KOMPLEXE STAMMFUNKTION** von  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , wenn  $F$  holomorph ist und  $F' = f$  gilt.

- (a) Eine stetige Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  besitzt genau dann eine komplexe Stammfunktion  $F$ , wenn das komplexe Kurvenintegral über  $f$  wegunabhängig ist. In diesem Fall gilt

$$\int_c f(z) dz = F(c(b)) - F(c(a))$$

für jede stückweise reguläre Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$ .

- (b) Wenn  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist und  $M$  einfach zusammenhängend ist, dann besitzt  $f$  die folgende komplexe Stammfunktion  $F$ :

Zu festem  $z_0 \in M$  und beliebigem  $z \in M$  wählen wir eine stückweise reguläre Kurve  $c : [a, b] \rightarrow M$  mit Anfangspunkt  $c(a) = z_0$  und Endpunkt  $c(b) = z$  und setzen

$$F(z) = A + \int_c f(w) dw \quad \text{mit beliebigem } A \in \mathbb{C}.$$

## 28.7 Beispiele von komplexen Stammfunktionen

(a)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = z^k$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  hat als Stammfunktionen  $F(z) = A + \frac{z^{k+1}}{k+1}$ .

(b)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = e^{cz}$  mit  $c \neq 0$  hat als Stammfunktionen  $F(z) = A + \frac{1}{c}e^{cz}$ .

(c)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \cos z$  hat die Stammfunktionen  $F(z) = A + \sin z$ ,  
 $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = \sin z$  hat die Stammfunktionen  $G(z) = A - \cos z$ .

(d)  $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = \frac{1}{z}$  hat keine Stammfunktion in  $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ : die Kurvenintegrale zu

$$c_1 : [0, \pi] \rightarrow M, \quad c_1(t) = e^{it},$$

$$c_2 : [0, \pi] \rightarrow M, \quad c_2(t) = e^{-it}$$

ergeben unterschiedliche Werte, obwohl beide den Anfangspunkt 1 und den Endpunkt  $-1$  haben (obere bzw. untere Hälfte des Einheitskreises):

$$\int_{c_1} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = \int_0^\pi i dt = i\pi,$$

$$\int_{c_2} \frac{1}{z} dz = \int_0^\pi \frac{1}{e^{-it}} (-i e^{-it}) dt = \int_0^\pi (-i) dt = -i\pi.$$

Also ist das komplexe Kurvenintegral nicht wegunabhängig, also hat  $f$  keine Stammfunktion (in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ).

## 28.7 Beispiele (Forts.):

(e) Schränkt man  $1/z$  auf eine geschlitzte Ebene ein, z.B.

$$g : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi \rightarrow \mathbb{C}, \quad g(z) = \frac{1}{z},$$

so existiert die Stammfunktion! Denn  $\mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi$  ist einfach zusammenhängend und  $g$  ist holomorph. Stammfunktionen sind

$$G(z) = A + \log z, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi,$$

wobei  $\log z$  ein beliebiger Zweig der Logarithmus-Funktion zum Schnitt  $\Gamma_\pi$  sein darf. (Verschiedene Zweige zum Schnitt  $\Gamma_\pi$  unterscheiden sich nur durch  $2k\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .)

(f) Genau so lassen sich auch Stammfunktionen von

$$f : \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^a$$

mit  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_0$ ,  $a \neq -1$ , angeben. Damit  $f$  wohldefiniert ist, müssen wir beim Umschreiben

$$f(z) = e^{a \log z}$$

einen festen Zweig der Logarithmusfunktion zum Schnitt  $\Gamma_\pi$  wählen. Unter Verwendung desselben Zweiges erhalten wir dann

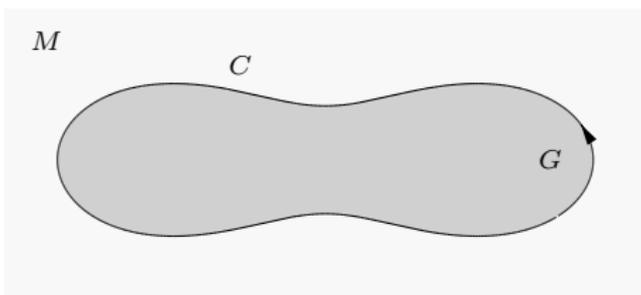
$$F(z) = A + \frac{z}{a+1} e^{a \log z} = A + \frac{1}{a+1} z^{a+1}.$$

Eine wichtige Rolle spielen die komplexen Kurvenintegrale zu **geschlossenen** Kurven.

Satz 28.5 (Cauchy'scher Integralsatz (1. Formulierung))

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei einfach zusammenhängend und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Dann gilt für jede **geschlossene** stückweise reguläre Kurve  $C : [a, b] \rightarrow M$

$$\int_C f(z) dz = 0.$$



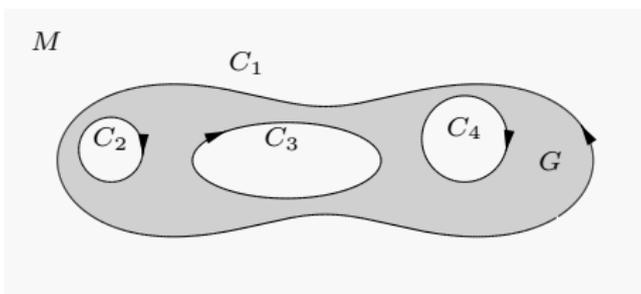
Eine andere Version des Cauchy'schen Integralsatzes ist die folgende.

**Satz 28.6 (Cauchy'scher Integralsatz (2. Formulierung))**

*$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph.  $G$  sei ein Normalgebiet mit  $\overline{G} \subset M$ ; also besteht der Rand  $\Gamma = \partial G$  aus endlich vielen geschlossenen doppelungspunktfreien Kurven  $C_1, \dots, C_r$ .*

*Wird jede dieser Kurven so durchlaufen, dass  $G$  links liegt, so gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_r} f(z) dz = 0.$$



Eine noch allgemeinere Version des Cauchy'schen Integralsatzes funktioniert ohne den Übergang zu Teilgebieten  $G \subset M$ .

**Satz 28.7 (Cauchy'scher Integralsatz (3. Formulierung))**

*$G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Normalgebiet,  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig in  $\overline{G}$  und holomorph in  $G$ . Der Rand  $\Gamma = \partial G$  besteht aus endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien Kurven  $C_1, \dots, C_r$ . Jede dieser Kurven werde so durchlaufen, dass  $G$  links liegt. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \dots + \int_{C_r} f(z) dz = 0.$$

## 28.11 Ein wichtiges Kurvenintegral

Die Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Zu  $z_0 \in M$  wählen wir einen Kreis  $K_r(z_0)$  vom Radius  $r$  um  $z_0$ , der ganz in  $M$  liegt. Die Randkurve (in mathematisch positiver Orientierung) ist

$$c_r : [0, 2\pi] \rightarrow M, \quad c_r(t) = z_0 + re^{it}.$$

### Satz 28.8

*Das komplexe Kurvenintegral*

$$\int_{c_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

*ist unabhängig vom Radius  $r$ , sofern  $\overline{K_r(z_0)} \subset M$  gilt.*

Welchen Wert nimmt dieses Integral an?

**Satz 28.9 (Integralformel von Cauchy (1. Version))**

*Die Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph.*

*Für  $z_0 \in M$  sei  $r > 0$  so gewählt, dass  $\overline{K_r(z_0)} \subset M$  gilt. Dann gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0),$$

*mit der geschlossenen Kurve  $c_r : [0, 2\pi] \rightarrow M$ ,  $c_r(t) = z_0 + re^{it}$ , die den Kreisrand (genau einmal) gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.*

Hiermit ist die wichtigste Formel für holomorphe Funktionen gezeigt.

Die Verallgemeinerung wie in 28.7 bietet sich an:

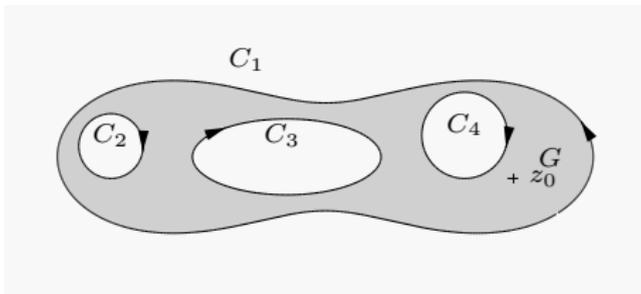
### Satz 28.10 (Integralformel von Cauchy (2. Version))

$G \subseteq \mathbb{C}$  sei Normalgebiet,  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig in  $\overline{G}$  und holomorph in  $G$ .

Der Rand  $\Gamma = \partial G$  besteht aus endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien Kurven  $C_1, \dots, C_r$ . Jede dieser Kurven werde so durchlaufen, dass  $G$  links liegt.

Dann gilt für jedes  $z_0 \in G$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0),$$



**28.14 Bemerkung:** Die Integralformel erlaubt es, viele komplexe Kurvenintegrale "ohne Integration" auszurechnen: z.B. ist für  $\Gamma = \partial K_1(1)$  (gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen)

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{2z}}{z-1} dz = i2\pi e^2,$$

weil die Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = e^{2z}$  holomorph ist.

Aus der Integralformel 28.10 folgt diese Aussage mit weitreichenden Konsequenzen:

### Satz 28.11

*$G \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Normalgebiet,  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig in  $\overline{G}$  und holomorph in  $G$ .*

*Dann ist  $f$  in ganz  $G$  allein durch die Funktionswerte auf dem Rand von  $G$  eindeutig bestimmt.*

In der Herleitung der Cauchyformel wurde der Spezialfall  $G = K_r(z_0)$  bereits behandelt:

### Satz 28.12 (Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen)

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Dann gilt für jedes  $z_0 \in M$  und  $r > 0$  mit  $K_r(z_0) \subset M$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

Damit haben wir ein Maximumprinzip für holomorphe Funktionen!

### Satz 28.13 (Maximumprinzip holomorpher Funktionen)

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph und nicht konstant. Dann besitzt  $|f|$  in  $M$  kein lokales oder globales Maximum.

Insbesondere: Falls  $M$  beschränkt ist und  $f$  sogar stetig in  $\overline{M}$  ist, so nimmt  $|f|$  sein Maximum auf dem Rand  $\partial M$  an.

Die letzten Aussagen lassen sich auch für harmonische Funktionen treffen. Dazu setzen wir manchmal voraus, dass  $G$  einfach zusammenhängend ist, damit die harmonische Funktion  $u : G \rightarrow \mathbb{R}$  als Realteil einer holomorphen Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  interpretiert werden darf (siehe 26.16).

### Satz 28.14 (Eigenschaften harmonischer Funktionen)

*$G \subset \mathbb{R}^2$  sei ein Normalgebiet, einfach zusammenhängend und beschränkt, Dann ist jede Funktion  $u : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}$ , die stetig in  $\overline{G}$  und harmonisch in  $G$  ist, allein durch die Funktionswerte auf dem Rand von  $G$  eindeutig bestimmt.*

**Satz 28.15 (Mittelwerteeigenschaft harmonischer Funktionen)**

$M \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein Gebiet und  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei harmonisch.

Dann gilt für jedes  $(x_0, y_0) \in M$  und  $r > 0$  mit  $\overline{K_r(x_0, y_0)} \subset M$

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos t, y_0 + r \sin t) dt.$$

Man beachte, dass  $u$  reellwertig ist, wir also Maxima und Minima von  $u$  behandeln können (ohne den Übergang zu Beträgen durchzuführen).

**Satz 28.16 (Maximumprinzip harmonischer Funktionen)**

$M \subseteq \mathbb{R}^2$  sei ein Gebiet und  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei harmonisch und nicht konstant.

Dann nimmt  $u$  in  $M$  weder lokale noch globale Maxima oder Minima an.

Insbesondere: Falls  $M$  beschränkt ist und  $u$  sogar stetig in  $\overline{M}$  ist, so nimmt  $u$  sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand  $\partial M$  an.

## Satz 28.17 (Poisson-Kern)

Die Funktion  $f : \overline{K_r(0)}$  sei holomorph in  $K_r(0)$  und stetig in  $\overline{K_r(0)}$ .

Dann sind der Realteil  $u$  und der Imaginärteil  $v$  für alle

$(x, y) = (s \cos \phi, s \sin \phi) \in K_r((0, 0))$  mit  $0 \leq s < r$  und  $\phi \in [0, 2\pi)$  gegeben durch

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos t, r \sin t) \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(t - \phi)} dt,$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(r \cos t, r \sin t) \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(t - \phi)} dt.$$

$u$  und  $v$  lassen sich also durch Integration ihrer Randwerte mit Hilfe des **POISSON-KERNS**

$$p(x, y) = P(s, \phi) = \frac{r^2 - s^2}{r^2 + s^2 - 2rs \cos(t - \phi)}$$

bestimmen.

Wir haben damit eine explizite Form der Lösung der Laplace-Gleichung

$$\Delta u(x, y) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in K_r((0, 0))$$

bei vorgegebenen (stetigen) Randwerten

$$u(r \cos t, r \sin t) = h(t) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi).$$

Die schwierig aussehenden Integrale lassen sich mit dem im nächsten Abschnitt enthaltenen RESIDUENSATZ berechnen.

### Satz 28.18 (Cauchysche Integralformel)

Die Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph.

Dann ist  $f$  beliebig oft komplex differenzierbar.

Für  $z_0 \in M$  sei  $r > 0$  so gewählt, dass  $\overline{K_r(z_0)} \subset M$  gilt. Dann gilt für  $n \in \mathbb{N}_0$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{c_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

mit der geschlossenen Kurve  $c_r : [0, 2\pi] \rightarrow M$ ,  $c_r(t) = z_0 + re^{it}$ , die den Kreisrand (genau einmal) gegen den Uhrzeigersinn durchläuft.

**Bemerkung:** Die Aussagen

- $f$  ist komplex differenzierbar im Gebiet  $M$ ,
- $f$  ist holomorph im Gebiet  $M$ ,
- $f$  ist beliebig oft komplex differenzierbar im Gebiet  $M$

sind alle äquivalent.

Eine Variante der Integralformel für die  $n$ -te Ableitung folgt wie in 28.10.

### Satz 28.19 (Cauchysche Integralformeln (2. Version))

$G \subseteq \mathbb{C}$  sei Normalgebiet,  $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig in  $\overline{G}$  und holomorph in  $G$ .

Der Rand  $\Gamma = \partial G$  besteht aus endlich vielen geschlossenen doppel­punkt­freien Kurven  $C_1, \dots, C_r$ . Jede dieser Kurven werde so durchlaufen, dass  $G$  links liegt.

Dann gilt für jedes  $z_0 \in G$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz.$$

## Weitere Anwendungen der Integralformel von Cauchy:

## Satz 28.20 (Satz von Liouville)

Eine holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt GANZE FUNKTION.

Falls die ganze Funktion  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  beschränkt ist (d.h. es gibt ein  $B > 0$  mit  $|f(z)| \leq B$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ ), so ist sie konstant.

Die Integralformel von Cauchy liefert tiefliegende mathematische Resultate. Zwei weitere Beispiele dafür sollen noch angegeben werden.

### Satz 28.21

*Es existiert keine bijektive, holomorphe und konforme Abbildung von  $\mathbb{C}$  auf den Einheitskreis  $K_1(0)$  (Vgl. hierzu den Riemannschen Abbildungssatz).*

### Satz 28.22 (Fundamentalsatz der Algebra)

*Jedes nichtkonstante Polynom  $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  hat mindestens eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ .*

# Kapitel 29 – Holomorphe Funktionen, Potenzreihen und Laurentreihen

## Holomorphe Funktionen, Potenzreihen und Laurentreihen

**Einleitung:** Wir wissen bereits, dass eine holomorphe Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  unendlich oft komplex differenzierbar ist. Für jedes  $z_0 \in M$  können wir die (komplexe) **Taylorreihe** von  $f$  mit dem Entwicklungspunkt  $z_0$  bilden:

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Die Frage nach dem Konvergenzradius dieser Potenzreihe hat für holomorphe Funktionen eine interessante Antwort.

## Erinnerung an Potenzreihen:

Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  mit den Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  besitzt den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}}.$$

(a) Falls  $0 < r < \infty$  ist, so gilt:

- Die Reihe konvergiert für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < r$ .
- Die Reihe divergiert für jedes  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| > r$ .
- Eine allgemeine Aussage zur Konvergenz für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| = r$  lässt sich nicht treffen.

(b) Falls  $r = \infty$  ist (d.h.  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ ), so konvergiert die Potenzreihe in ganz  $\mathbb{C}$ .

(c) Falls  $r = 0$  ist, so konvergiert die Potenzreihe nur im Punkt  $z_0$ .

**Bemerkung:** Eine zweite Berechnungsformel für den Konvergenzradius funktioniert, wenn die Koeffizienten  $a_k$  der Potenzreihe für alle  $k \geq k_0$  ungleich Null sind und wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = c$$

(incl. der Fälle  $c = 0$  und  $c = \infty$ ) existiert. Dann gilt

$$r = \frac{1}{c}.$$

(incl. der Fälle  $r = \infty$  und  $r = 0$ ), siehe 15.4.

Falls die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  den Konvergenzradius  $r > 0$  hat, so

konvergiert sie **gleichmäßig und absolut** in jedem abgeschlossenen Kreis  $\overline{K_s(z_0)}$  mit  $0 < s < r$ . Deswegen darf die Potenzreihe gliedweise differenziert und integriert werden, siehe 15.9. Damit folgt:

### Satz 29.1

*Eine Potenzreihe stellt in ihrem Konvergenzgebiet  $K_r(z_0)$  eine holomorphe Funktion dar, d.h.*

$$f : K_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k,$$

*ist holomorph.*

**Umgekehrt:** Sei nun  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Die Taylorreihe von  $f$  mit dem Entwicklungspunkt  $z_0$  ist die Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Ihr Konvergenzradius  $r$  lässt sich oft allein durch Betrachtung der Geometrie bestimmen:

### Satz 29.2 (Konvergenzradius der Taylorreihe einer holomorphen Funktion)

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Zu  $z_0 \in M$  bestimmen wir die Zahl

$$\rho := d(z_0, \partial M) = \sup\{s > 0 \mid K_s(z_0) \subset M\},$$

also den Abstand von  $z_0$  zum Rand von  $M$ . Dann hat die Taylorreihe von  $f$  mit Entwicklungspunkt  $z_0$  den Konvergenzradius  $r \geq \rho$  und es gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in K_\rho(z_0).$$

Satz 29.2 ergibt eine neue Charakterisierung der holomorphen Funktionen:

**Satz 29.3 (Holomorphe Funktionen sind analytisch)**

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet.

Eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann holomorph, wenn sie analytisch ist, d.h. wenn zu jedem  $z_0 \in M$  eine Kreisscheibe  $K_s(z_0)$  mit  $s > 0$  existiert, so dass

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

für alle  $z \in K_s(z_0)$  gilt.

Den Identitätssatz für Potenzreihen haben wir in 15.5 kennengelernt. Mit dem letzten Satz (und ein paar geometrischen Überlegungen, die hier nicht gezeigt werden) folgt:

### Satz 29.4 (Identitätssatz für holomorphe Funktionen)

$M_1, M_2$  seien Gebiete in  $\mathbb{C}$  und  $M_1 \cap M_2$  sei nichtleer.

Falls zwei holomorphe Funktionen  $f_1 : M_1 \rightarrow \mathbb{C}$  und  $f_2 : M_2 \rightarrow \mathbb{C}$  an allen Stellen  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  einer komplexen Zahlenfolge mit paarweise verschiedenen Folgengliedern übereinstimmen und falls diese Folge einen Häufungspunkt  $z_0 \in M_1 \cap M_2$  besitzt, so gilt

$$f_1(z) = f_2(z) \quad \text{für alle } z \in M_1 \cap M_2.$$

**Bemerkung:**

Man interessiert sich meist für den **maximalen Definitionsbereich** einer gegebenen holomorphen Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ , also für eine holomorphe Funktion  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $M \subset \tilde{M}$ , die auf  $M$  mit  $f$  übereinstimmt.

Der Identitätssatz besagt, dass eine solche “Fortsetzung” von  $f$  eindeutig ist.

Es gilt sogar noch mehr:

**Satz 29.5**

*$I \subseteq \mathbb{R}$  sei ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei analytisch, d.h. die Taylorreihe mit beliebigem Entwicklungspunkt  $x_0 \in \mathbb{R}$  hat einen positiven Konvergenzradius.*

*Dann existiert eine **eindeutige** Fortsetzung zu einer **holomorphen** Funktion  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $\tilde{M}$  ein Gebiet in  $\mathbb{C}$  ist, das das Intervall  $I$  enthält.*

## Motivation der Laurent-Reihen:

Gibt es so etwas wie eine "Taylorreihe" von  $\frac{1}{z}$  oder von  $e^{\frac{1}{z}}$  mit Entwicklungspunkt  $z_0 = 0$ ?

Idee: Betrachte die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k.$$

Insbesondere für die Stabilität von Filtern ist es wichtig zu wissen, für welche  $z \in \mathbb{C}$  diese Reihe konvergiert, ob also Radien  $0 < \rho_1 < \rho_2$  existieren, so dass die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } \rho_1 < |z| < \rho_2$$

konvergiert.

Damit wird das Konzept der Potenzreihen in zweierlei Hinsicht erweitert:

- Die Reihe erstreckt sich auch über negative Potenzen von  $(z - z_0)$ .
- Die Konvergenzbereiche sind keine Kreise, sondern Kreisringe mit einem inneren Radius  $\rho_1$  und einem äußeren Radius  $\rho_2$ .

**Definition 29.6 (Laurent-Reihe)**

Eine Reihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit Koeffizienten  $a_k \in \mathbb{C}$  heißt LAURENT-REIHE mit dem Entwicklungspunkt  $z_0$ .

**Bezeichnung:** Man nennt den Teil

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$$

den HAUPTTEIL der Laurentreihe. Den anderen Teil nennt man Potenzreihen-Anteil oder NEBENTEIL.

## Satz 29.7 (Konvergenz einer Laurent-Reihe)

Eine Laurentreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

heißt (absolut) konvergent in einem Punkt  $z \in \mathbb{C}$ , wenn *beide* Reihen

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

(absolut) konvergieren.

Wir setzen

$$\rho_1 := \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_{-k}|},$$

$$\rho_2 := \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

wobei die Fälle  $\rho_1 = \infty$  oder  $\rho_2 = \infty$  auftreten können.

**Satz 29.8**

Falls  $\rho_1 < \rho_2$  ist,

- konvergiert die Laurentreihe absolut für alle  $z$  im Kreisring

$$K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\},$$

- divergiert die Laurentreihe für alle  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| < \rho_1$  oder  $|z - z_0| > \rho_2$ .
- Eine allgemeine Aussage für  $z \in \mathbb{C}$  mit  $|z - z_0| = \rho_1$  oder  $\rho_2$  kann nicht getroffen werden.

Falls  $\rho_1 > \rho_2$  oder  $\rho_1 = \infty$  gilt, divergiert die Laurent-Reihe für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

Falls  $\rho_1 = \rho_2 < \infty$  gilt, kann höchstens Konvergenz in Punkten der Kreislinie  $|z - z_0| = \rho_1$  vorliegen.

**Beweis:** Der Hauptteil der Laurentreihe ist als Potenzreihe von  $1/(z - z_0)$  anzusehen. Diese Potenzreihe hat den Konvergenzradius  $1/\rho_1$ , also konvergiert die Reihe absolut für alle  $z$  mit

$$\frac{1}{|z - z_0|} < \frac{1}{\rho_1} \Leftrightarrow |z - z_0| > \rho_1.$$

Sie divergiert für alle  $z$  mit

$$\frac{1}{|z - z_0|} > \frac{1}{\rho_1} \Leftrightarrow |z - z_0| < \rho_1.$$

(Die Fälle  $\rho_1 = 0$  und  $\rho_1 = \infty$  sind sinnvoll zu interpretieren.)

Der Potenzreihen-Anteil hat den Konvergenzradius  $\rho_2$ . Also gilt absolute Konvergenz für alle  $z$  mit  $|z - z_0| < \rho_2$  und Divergenz für  $|z - z_0| > \rho_2$ .

Die absolute Konvergenz beider Teile liegt im Durchschnitt  $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$  vor.

**Bemerkung:** Die folgende Formel kann zur Berechnung von  $\rho_1$  und  $\rho_2$  verwendet werden.

- Wenn die Koeffizienten  $a_k$  des Potenzreihenanteils für alle  $k \geq k_2$  (mit  $k_2 \geq 0$ ) ungleich Null sind und wenn der Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = c_2$$

(incl. der Fälle  $c_2 = 0$  und  $c_2 = \infty$ ) existiert, so gilt  $\rho_2 = \frac{1}{c_2}$ .

- Wenn die Koeffizienten  $a_k$  des Hauptteils für alle  $k \leq k_1$  (mit  $k_1 < 0$ ) ungleich Null sind und wenn

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{-(k+1)}|}{|a_{-k}|} = c_1$$

(incl. der Fälle  $c_1 = 0$  und  $c_1 = \infty$ ) existiert, so gilt  $\rho_1 = c_1$ .

Einige Aussagen gelten ähnlich wie bei Potenzreihen.

Falls die Laurentreihe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  im Kreisring  $K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0)$  konvergiert, so konvergiert sie **gleichmäßig und absolut** in jedem abgeschlossenen Kreisring  $\overline{K_{s_1 < s_2}(z_0)}$  mit  $\rho_1 < s_1 < s_2 < \rho_2$ . Deswegen darf auch die Laurentreihe gliedweise differenziert und integriert werden. **Dabei ändern sich die Radien  $\rho_1$  und  $\rho_2$  nicht**, siehe 15.9

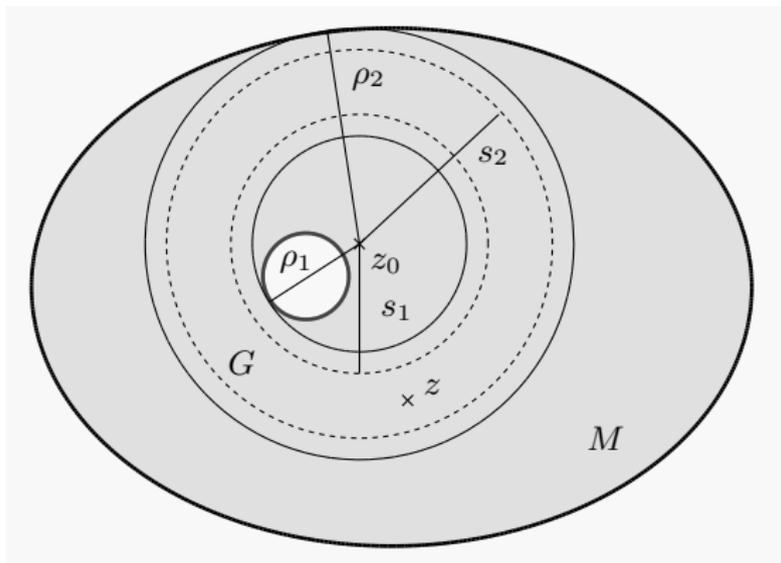
### Satz 29.9 (Laurentreihen sind holomorph)

*Eine Laurentreihe mit Radien  $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq \infty$  stellt in ihrem Konvergenzgebiet  $K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0)$  eine holomorphe Funktion dar; d.h.*

$$f : K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k,$$

*ist holomorph.*

**Frage:** Können wir auch umgekehrt zu einer holomorphen Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  eine Laurentreihe bestimmen, deren Grenzwert die Funktion  $f$  ist?



Insgesamt erhalten wir das folgende Resultat:

### Satz 29.10 (Laurentreihe einer holomorphen Funktion)

$M \subseteq \mathbb{C}$  sei ein Gebiet und  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Zu  $z_0 \in \mathbb{C}$  gebe es Radien  $\rho_1 \geq 0$  (minimal) und  $\rho_2 > \rho_1$  (maximal), so dass

$$K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0) \subset M$$

gilt. Weiter sei  $s > 0$  mit  $\rho_1 < s < \rho_2$  ausgewählt.

Setzen wir

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw, \quad k \in \mathbb{Z},$$

so gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für alle } z \in K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0).$$

Insbesondere konvergiert die angegebene Laurentreihe von  $f$  im Kreisring  $K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0)$ .

## Bemerkungen:

- In Satz 29.10 ist auch Satz 29.2 zur Taylorreihe enthalten:  
Falls  $f$  im Kreis  $K_r(z_0)$  holomorph ist, setzen wir  $\rho_1 = 0$  und  $\rho_2 = r$ . Dann gilt für jedes  $0 < s < r$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{k+1}} dw = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} & \text{für } k \geq 0, \textcircled{1} \\ 0 & \text{für } k < 0, \textcircled{2} \end{cases}$$

①: Cauchysche Integralformel 28.10    ②: Cauchyscher Integralsatz 28.5

In diesem Fall ist also die Laurentreihe gleich der Taylorreihe von  $f$  zum Entwicklungspunkt  $z_0$ .

- Die Laurentreihe mit den Koeffizienten  $a_k$  in Satz 29.10 konvergiert im Kreisring  $K_{\rho_1 < \rho_2}(z_0)$ . Man beachte hierbei, dass die Radien  $\rho_1$  und  $\rho_2$  wieder rein geometrisch bestimmt werden, also keine Berechnung über die Formel der Konvergenzradien erfordern.

**Bemerkung:**

Zu einer gegebenen Funktion  $f$  und festem Entwicklungspunkt  $z_0$  gibt es im Allgemeinen **mehrere Paare** von Radien  $(\rho_1, \rho_2)$  und zugehörige Kreisinge, in denen  $f$  als Laurentreihe dargestellt wird.

**Beispiel:**  $f$  sei eine rationale Funktion mit Polstellen in  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 3$  und  $z_3 = 5i$ . Der Entwicklungspunkt sei  $z_0 = 0$ .

Es gibt drei Paare von Radien, also auch drei Kreisinge:

- Mit  $\rho_1 = 0$  und  $\rho_2 = 3$  erhalten wir eine Laurentreihe von  $f$ , die für  $0 < |z| < 3$  konvergiert. Die Koeffizienten  $a_k$  in 29.10 erhält man durch Integration längs der Kreislinie vom Radius  $s = 2$  (oder zu beliebigem Radius  $0 < s < 3$ ).
- Mit  $\rho_1 = 3$  und  $\rho_2 = 5$  erhalten wir eine Laurentreihe von  $f$ , die für  $3 < |z| < 5$  konvergiert. Die Koeffizienten  $a_k$  ergeben sich durch Integration längs der Kreislinie vom Radius  $s = 4$ .
- Mit  $\rho_1 = 5$  und  $\rho_2 = \infty$  erhalten wir eine Laurentreihe von  $f$ , die für  $|z| > 5$  konvergiert. Die Koeffizienten  $a_k$  ergeben sich durch Integration längs der Kreislinie vom Radius  $s = 6$ .

Die Koeffizienten, und damit die Laurentreihe, hängen also vom ausgewählten Kreisring ab, in dem  $f$  holomorph ist (d.h. keine Polstellen besitzt). Deshalb kann man nicht von "der" Laurentreihe einer Funktion  $f$  zum Entwicklungspunkt  $z_0$  sprechen, sondern muss immer den Kreisring mit angeben.

Ab jetzt betrachten wir holomorphe Funktionen  $f : M \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$ , wobei  $M \subseteq \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $N$  eine diskrete “Ausnahmemenge” von Punkten

$$N = \{z_1, \dots, z_K\} \subset M \quad \text{oder} \quad N = \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset M,$$

ist. Die Menge  $N$  soll keine Häufungspunkte enthalten. Genauer:

### Satz 29.11 (Isolierte Singulariät)

*Der Punkt  $z_n \in M$  heißt ISOLIERTE SINGULARITÄT von  $f$ , wenn es ein  $s > 0$  so gibt, dass  $f : K_s(z_n) \setminus \{z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph ist.*

Wir unterscheiden 3 Typen von isolierten Singularitäten, die wir anschließend durch die Laurentreihe von  $f$  charakterisieren.

### Definition 29.12 (Typen von isolierten Singularitäten)

$f : M \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph.  $z_n \in N$  sei eine isolierte Singularität von  $f$ .

- (a)  $z_n$  heißt **HEBBAR** (vom Begriff "heben=aufheben, eliminieren"), wenn der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_n} f(z) = A \in \mathbb{C}$  existiert.
- (b)  $z_n$  heißt ein **POL DER ORDNUNG  $m$**  (mit  $m \in \mathbb{N}$ ), wenn der Grenzwert  $\lim_{z \rightarrow z_n} (z - z_n)^m f(z) = A \in \mathbb{C}$  existiert **und ungleich Null** ist.
- (c)  $z_n$  heißt **WESENTLICHE SINGULARITÄT**, wenn  $z_n$  weder hebbar noch ein Pol irgendeiner Ordnung  $m \in \mathbb{N}$  ist.

## Satz 29.13 (Singularitäten und Laurentreihe)

$f : M \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph.  $z_n \in N$  sei eine isolierte Singularität von  $f$  und

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_n)^k$$

sei die Laurent-Reihe von  $f$  im Kreisring  $0 < |z - z_n| < \rho_2$ .

Dann gilt:

- (a)  $z_n$  ist genau dann hebbar, wenn der Hauptteil der Laurentreihe verschwindet, also  $0 = a_{-1} = a_{-2} = \dots$  gilt.  
In diesem Fall ist  $f$  sogar holomorph in  $K_{\rho_2}(z_n)$ .
- (b)  $z_n$  ist genau dann ein Pol der Ordnung  $m \in \mathbb{N}$ , wenn der Hauptteil nur die Glieder mit  $k = -m, -m + 1, \dots, -1$  besitzt;  
genauer: wenn  $a_{-m} \neq 0$  und  $0 = a_{-m-1} = a_{-m-2} = \dots$  gilt.
- (c)  $z_n$  ist genau dann eine wesentliche Singularität, wenn der Hauptteil unendlich viele Glieder besitzt; genauer: es existieren  $0 > k_1 > k_2 > \dots$  mit  $a_{k_p} \neq 0$  für alle  $p \in \mathbb{N}$ .

**Spezialfall:** Anstelle rationaler Funktionen betrachten wir die größere Klasse von Funktionen

$$R(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

wobei  $f, g : M \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und nicht identisch Null sind.

- Die Nullstellen von  $g$  sind isolierte Singularitäten von  $R$ : Hätten sie einen Häufungspunkt in  $M$ , so wäre  $g \equiv 0$  nach dem Identitätssatz 29.4.
- Ob eine Nullstelle von  $g$  eine hebbare Singularität oder ein Pol ist, kann man an den Taylorreihen von  $f$  und  $g$  ablesen. Dies führt u.a. zur [Regel von de l'Hospital](#).

## Satz 29.14 (Regel von de l'Hospital)

Die Funktionen  $f, g : M \rightarrow \mathbb{C}$  seien holomorph. Für ein  $z_0 \in M$  und ein  $n \in \mathbb{N}$  gelte

$$g(z_0) = g'(z_0) = \dots = g^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad g^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Weiter sei  $m \in \mathbb{N}_0$  gegeben mit

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

(Der Fall  $m = 0$  bedeutet hierbei nur  $f(z_0) \neq 0$ .)

Mit anderen Worten:  $g$  hat in  $z_0$  eine Nullstelle der Ordnung  $n$  und  $f$  hat dort keine Nullstelle ( $m = 0$ ) oder eine Nullstelle der Ordnung  $m$ .

- Falls  $m < n$  gilt, so hat  $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  eine Polstelle der Ordnung  $n - m$  in  $z_0$ .
- Falls  $m \geq n$  gilt, so hat  $R(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$  eine hebbare Singularität in  $z_0$ , und es gilt die Regel von de l'Hospital

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^{(n)}(z)}{g^{(n)}(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}.$$

Die komplexe Funktion  $f$  habe eine isolierte Singularität  $z_0$ . Der Koeffizient  $a_{-1}$  der Laurentreihe zum innersten Kreisring  $0 < |z - z_0| < r$  lautet als Kurvenintegral

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} f(z) dz,$$

wobei  $C_s$  eine Kreislinie um  $z_0$  vom Radius  $0 < s < r$  ist. Dieser einzelne Koeffizient spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung von komplexen Kurvenintegralen.

### Definition 29.15 (Residuum)

Die komplexe Funktion  $f$  sei holomorph im Gebiet  $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ . Für ein  $0 < s < r$  sei  $C_s$  die Randkurve von  $K_s(z_0)$  orientiert gegen den Uhrzeigersinn. Dann heißt der Koeffizient der Laurentreihe

$$\operatorname{Res}(f; z_0) := a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_s} f(z) dz$$

das RESIDUUM von  $f$  in  $z_0$ .

**Bemerkung:** Ist  $f$  sogar holomorph im Kreis  $K_r(z_0)$  (oder  $z_0$  eine hebbare Singularität von  $f$ ), so gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz 28.5

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = 0.$$

**Satz 29.16 (Residuen rationaler Funktionen)**

Für die rationale Funktion  $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$  sei die Partialbruchzerlegung

$$R(z) = \sum_{n=1}^K \sum_{\ell=1}^{m_n} \frac{A_{n,\ell}}{(z - z_n)^\ell} + S(z),$$

$S$  Polynom, bekannt. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(R; z_n) = A_{n,1}, \quad n = 1, 2, \dots, K.$$

**Satz 29.17 (Residuum an einer Polstelle)**

*$f$  sei holomorph in  $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$  und habe eine Polstelle der Ordnung  $m$  in  $z_0$ . Wir definieren  $g : K_r(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ . Dann gilt*

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g^{(m-1)}(z)}{(m-1)!} = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}.$$

## Spezialfälle:

- $z_0$  ist hebbare Singularität oder ein **einfacher** Pol:

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z).$$

- $R = \frac{f}{g}$  mit  $f$  und  $g$  holomorph,  $g(z_0) = 0$  und  $g'(z_0) \neq 0$  hat das Residuum

$$\operatorname{Res}(R(z); z_0) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Die Integralformeln von Cauchy ermöglichen die Berechnung vieler komplexer Kurvenintegrale durch Verwendung von Residuen.

### Satz 29.18 (Residuensatz)

*$M$  sei ein Gebiet und  $N \subset M$  eine diskrete Teilmenge ohne Häufungspunkt. Die Funktion  $f : M \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph.*

*$G$  sei ein Normalgebiet mit  $\overline{G} \subset M$ . Der Rand  $\Gamma = \partial G$  bestehe aus endlich vielen geschlossenen doppelpunktfreien regulären Kurven, die so durchlaufen werden, dass  $G$  links liegt. Weiterhin gelte  $\Gamma \cap N = \emptyset$ .*

*Dann enthält  $G$  höchstens endlich viele isolierte Singularitäten  $z_1, \dots, z_K \in N$  von  $f$ , und es gilt*

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^K \operatorname{Res}(f; z_n).$$

### Satz 29.19 (Berechnung reeller Integrale)

Der Residuensatz kann zur Berechnung bestimmter Integrale verwendet werden.

- *Typ 1:*

*Integration  $2\pi$ -periodischer Funktionen  $R(\sin x, \cos x)$  über eine volle Periode. Dabei ist  $R$  eine gebrochen rationale Funktion der Variablen  $\sin x$  und  $\cos x$  ohne Polstellen.*

*Wir setzen dazu  $z = e^{ix}$ , siehe 29.20.*

- *Typ 2:*

*uneigentliche Integrale  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$  oder  $\int_0^{\infty} f(x) dx$ .*

*Wir "komplexifizieren" das Integral und setzen dazu  $z = x$ , siehe 29.21.*

## Satz 29.20 (Integrale des Typs 1)

Sei  $R$  eine gebrochen rationale Funktion der Variablen  $\sin x$  und  $\cos x$  ohne Polstellen. Dann ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = 2\pi \sum_{|z_k| < 1} \operatorname{Res} \left( \frac{1}{z} R \left( \frac{z^2 + 1}{2z}, \frac{z^2 - 1}{2iz} \right), z_k \right)$$

Summiert wird dabei also über alle Residuen von Punkten, die innerhalb des Einheitskreises liegen, d.h. für die  $|z_k| < 1$  gilt.

Die obige Methode lässt sich allgemein beschreiben.

### Satz 29.21 (Integrale vom Typ 2)

Das Gebiet  $M \subseteq \mathbb{C}$  enthalte die abgeschlossene obere Halbebene  $\mathbb{H}_+$ .  
Die Teilmenge  $N \subset M$  sei endlich, enthalte keine Punkte der reellen Achse und die Funktion  $f : M \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Weiter gelte

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R|f(Re^{i\phi})| = 0 \quad \text{gleichmäßig für } \phi \in [0, \pi].$$

Dann gilt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=1}^K \operatorname{Res}(f; z_n),$$

wobei  $z_1, \dots, z_K \in N$  sämtliche Punkte von  $N$  mit  $\operatorname{Im} z > 0$  sind.

**Bemerkung:** Wird die Aussage entsprechend für die untere Halbebene formuliert, ergibt sich wegen der Orientierung des Randes

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = -2\pi i \sum_{n=1}^K \operatorname{Res}(f; z_n).$$

**Beispiel:** Typische Beispiele für die Anwendung von Satz 29.21 sind uneigentliche Integrale über rationale Funktionen

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0}$$

mit  $a_n \neq 0$  und  $b_m \neq 0$  und  $m \geq n + 2$ , d.h. der Grad des Nennerpolynoms ist um mindestens 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms. Wenn der Nenner keine reelle Nullstelle besitzt, folgt die Konvergenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

mit dem Majorantenkriterium 16.25. Außerdem gilt

$$R|f(Re^{i\phi})| = \left| \frac{a_n R^{n+1} e^{in\phi} + \cdots + a_1 R^2 e^{i\phi} + a_0 R}{b_m R^m e^{im\phi} + \cdots + b_1 R e^{i\phi} + b_0} \right| \approx \frac{|a_n|}{|b_m| R^{m-n-1}} \quad \text{für großes } R > 0,$$

also die gleichmäßige Konvergenz  $\lim_{R \rightarrow \infty} R|f(Re^{i\phi})| = 0$ . Wir erhalten insgesamt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = 2\pi i \sum_{n=1}^K \operatorname{Res}(f; z_n),$$

wobei  $z_1, \dots, z_K$  die Nullstellen des Nennerpolynoms in der oberen Halbebene sind.

Für manche Integrale kann die Voraussetzung an  $f$  abgeschwächt werden.

### Satz 29.22 (Uneigentliche Integrale vom Fourier-Typ)

Das Gebiet  $M \subseteq \mathbb{C}$  enthalte die abgeschlossene obere Halbebene  $\mathbb{H}_+$ . Die Teilmenge  $N \subset M$  sei endlich, enthalte keine Punkte der reellen Achse und die Funktion  $f : M \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$  sei holomorph. Weiter gelte für ein  $R_0 > 0$

$$|zf(z)| \leq B \quad \text{für alle } z = |z|e^{i\phi} \text{ mit } |z| \geq R_0, \phi \in [0, \pi].$$

Dann gilt für jedes  $\omega > 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{i\omega x} dx = 2\pi i \sum_{n=1}^K \operatorname{Res}(f(z)e^{i\omega z}; z_n),$$

wobei  $z_1, \dots, z_K \in N$  sämtliche Punkte von  $N$  mit  $\operatorname{Im} z > 0$  sind.

## 29.23 (Anwendung)

Die Voraussetzungen aus 29.22 sind insbesondere in diesem Fall erfüllt:

Sei  $\omega > 0$  und  $f(x) = e^{i\omega x} \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Dabei sei der Grad von  $Q$  um mindestens eins größer als der Grad von  $P$ , und  $Q$  habe keine reellen Nullstellen. Dann ist wegen

$$\cos \omega x = \operatorname{Re} e^{i\omega x} \text{ und } \sin \omega x = \operatorname{Im} e^{i\omega x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega x \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \operatorname{Im} \left[ 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z), z_k) \right] = 2\pi \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega x \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \operatorname{Re} \left[ 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z), z_k) \right] = -2\pi \operatorname{Im} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{Res}(f(z), z_k)$$

# Kapitel 30 – Laplace-Transformation

## 30: Laplace-Transformation

Für Funktionen  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  führen wir ein wichtiges Parameterintegral ein:

$$f(t) \longrightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

Die hierdurch definierte Funktion  $F$  heißt die LAPLACE-TRANSFORMIERTE von  $f$ .

- Unter geeigneten Bedingungen an  $f$  gilt für alle  $s > 0$

$$f'(t) \longrightarrow sF(s) - f(0),$$

$$f''(t) \longrightarrow s^2F(s) - f'(0) - sf(0).$$

- Mit der *Linearität* der Laplace-Transformation lassen sich lineare Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen umwandeln:

$$5y'' - 3y' + 2y = f(t) \longrightarrow (5s^2 - 3s + 2)Y(s) - 5y'(0) - (5s - 3)y(0) = F(s).$$

Anstatt der gesuchten Funktion  $y$  erhalten wir ihre Laplace-Transformierte

$$Y(s) = \frac{F(s) + 5y'(0) + (5s - 3)y(0)}{5s^2 - 3s + 2}.$$

- Die Lösung  $y$  des Anfangswertproblems mit gegebenen  $y(0)$ ,  $y'(0)$  ergibt sich nun durch Bestimmung der *inversen Laplace-Transformierten* von  $Y(s)$ .

### Definition 30.1 (zulässige Funktionen)

Eine Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  ist ZULÄSSIG MIT DEM PARAMETER  $a \in \mathbb{R}$ ,

(i) wenn  $f$  in jedem beschränkten Intervall  $[0, b]$  stückweise stetig ist sowie  $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)$  gilt,

(ii) und wenn zusätzlich  $f$  den EXPONENTIALTYP  $a$  besitzt, d.h. es existiert ein  $M > 0$ , so dass

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad \text{für alle } t \geq 0$$

*gilt.*

### Satz 30.2 (Laplace-Transformierte)

Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  sei zulässig mit dem Parameter  $a$ . Dann ist die LAPLACE-TRANSFORMIERTE

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} s > a$  definiert.

**Beachte:** Die Laplace-Transformierte ist für jedes komplexe  $s$  im Halbraum  $\operatorname{Re} s > a$  definiert. Ihr Wert ist beschränkt durch  $|\mathcal{L}[f](s)| \leq \frac{M}{\operatorname{Re} s - a}$ .

### 30.3 (Konventionen)

- (a) Ist  $f$  eine Funktion, deren Laplace-Transformierte berechnet werden soll, so sei stets  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ .
- (b) Wenn nicht anders gesagt, wird die Laplace-Transformierte einer Funktion mit dem entsprechenden Großbuchstaben gekennzeichnet, also  $F(s) := \mathcal{L}[f](s)$ ,  $Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$ .  
Ausnahme ist die Heaviside-Funktion  $H(t)$  (siehe 30.8).

Wichtige Eigenschaften sind:

### Satz 30.4 (Rechenregeln)

Wenn  $f$  und  $g$  zulässige Funktionen mit dem Parameter  $a$  sind, so ist auch  $h = \alpha f + \beta g$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  zulässig mit dem Parameter  $a$ , und für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} s > a$  gilt

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha \mathcal{L}[f](s) + \beta \mathcal{L}[g](s). \quad (\text{Linearität})$$

Weitere Rechenregeln für zulässiges  $f$  mit dem Parameter  $a$  sind:

(a) *Skalierung*: für reelles  $c > 0$  sei

$$h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) = f(ct).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}[h](s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}[f] \left( \frac{s}{c} \right), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > ca.$$

Fortsetzung von Satz 30.4:

(b) Verschiebung nach rechts: für reelles  $\tau > 0$  sei

$$h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq t < \tau \\ f(t - \tau) & \text{für } t \geq \tau. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}[h](s) = e^{-\tau s} \mathcal{L}[f](s), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > a.$$

(c) Multiplikation mit  $e^{ct}$ : für  $c \in \mathbb{C}$  sei

$$h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) = e^{ct} f(t).$$

Dann gilt

$$\mathcal{L}[h](s) = \mathcal{L}[f](s - c), \quad s \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re} s > a + \operatorname{Re} c.$$

Weitere Rechenregeln betreffen die Ableitungen und die Stammfunktion von  $f$ .

### Satz 30.5 (Laplace-Transformierte der Ableitung)

Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $r$ -mal differenzierbar und  $f, f', \dots, f^{(r)}$  seien zulässig mit dem gleichen Parameter  $a \in \mathbb{R}$ . Dann gilt für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} s > a$

$$\mathcal{L}[f'](s) = s\mathcal{L}[f](s) - f(0),$$

und allgemein für  $r \geq 1$

$$\mathcal{L}[f^{(r)}](s) = s^r \mathcal{L}[f](s) - s^{r-1} f(0) - \dots - s f^{(r-2)}(0) - f^{(r-1)}(0).$$

**Satz 30.6 (Laplace-Transformation der Stammfunktion)**

Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  sei zulässig mit dem Parameter  $a \in \mathbb{R}$ . Dann ist die Stammfunktion

$$g(t) = \int_0^t f(u) \, du, \quad t \geq 0,$$

zulässig mit jedem Parameter  $c > \tilde{a} = \max\{a, 0\}$  und für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re} s > \tilde{a}$  gilt

$$\mathcal{L}[g](s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f](s).$$

**Satz 30.7 (Holomorphie der Laplace-Transformierten)**

Die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  sei zulässig mit dem Parameter  $a \in \mathbb{R}$ .  
Dann ist die Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}[f] : \mathbb{H}_a = \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > a\} \rightarrow \mathbb{C}$   
holomorph in der Halbebene  $\mathbb{H}_a$ . Ihre komplexe Ableitung ist

$$(\mathcal{L}[f(t)])'(s) = - \int_0^{\infty} t f(t) e^{-st} dt = -\mathcal{L}[t f(t)](s) =: \mathcal{L}[h(t)](s)$$

und damit selbst die Laplace-Transformierte der Funktion  $h(t) = -t f(t)$ .

Es ist also  $\mathcal{L}[t f(t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s)$ .

| Parameter                                 | $f(t)$                  | $\mathcal{L}[f](s)$                 | Einschränkung                               |
|---|-------------------------|-------------------------------------|---|
| $n \in \mathbb{N}_0$                      | $t^n$                   | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                | $\operatorname{Re} s > 0$                   |
| $n \in \mathbb{N}_0, c \in \mathbb{C}$    | $t^n e^{ct}$            | $\frac{n!}{(s-c)^{n+1}}$            | $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$ |
| $\omega \in \mathbb{R}$                   | $\sin(\omega t)$        | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$     | $\operatorname{Re} s > 0$                   |
| $\omega \in \mathbb{R}$                   | $\cos(\omega t)$        | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$          | $\operatorname{Re} s > 0$                   |
| $\omega \in \mathbb{R}$                   | $\sinh(\omega t)$       | $\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$     | $\operatorname{Re} s >  \omega $            |
| $\omega \in \mathbb{R}$                   | $\cosh(\omega t)$       | $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$          | $\operatorname{Re} s >  \omega $            |
| $\omega \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ | $e^{ct} \sin(\omega t)$ | $\frac{\omega}{(s-c)^2 + \omega^2}$ | $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$ |
| $\omega \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{C}$ | $e^{ct} \cos(\omega t)$ | $\frac{s-c}{(s-c)^2 + \omega^2}$    | $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$ |

| $f(t)$                    | $\mathcal{L}[f](s)$   | Einschränkung  |
|---------------------------|---|--|
| $e^{ct} \sinh(\omega t)$  | $\frac{\omega}{(s-c)^2 - \omega^2}$                                       | $\operatorname{Re} s >  \omega  + \operatorname{Re} c$ |
| $e^{ct} \cosh(\omega t)$  | $\frac{s-c}{(s-c)^2 - \omega^2}$  | $\operatorname{Re} s >  \omega  + \operatorname{Re} c$ |
| $te^{ct} \sin(\omega t)$  | $\frac{2\omega(s-c)}{((s-c)^2 + \omega^2)^2}$                             | $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$            |
| $te^{ct} \cos(\omega t)$  | $\frac{1}{(s-c)^2 + \omega^2} - \frac{2\omega^2}{((s-c)^2 + \omega^2)^2}$ | $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} c$            |
| $te^{ct} \sinh(\omega t)$ | $\frac{2\omega(s-c)}{((s-c)^2 - \omega^2)^2}$                             | $\operatorname{Re} s >  \omega  + \operatorname{Re} c$ |
| $te^{ct} \cosh(\omega t)$ | $\frac{1}{(s-c)^2 - \omega^2} + \frac{2\omega^2}{((s-c)^2 - \omega^2)^2}$ | $\operatorname{Re} s >  \omega  + \operatorname{Re} c$ |

Parameter:  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{C}$

| $f(t)$  | $\mathcal{L}[f](s)$   | Einschr.                  |
|---|---|---------------------------|
| <p>Sprungfunktion:</p> $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ 1, & t \geq \tau \end{cases}$  | $\frac{e^{-\tau s}}{s}$   | $\operatorname{Re} s > 0$ |
| <p>Indikatorfunktion:</p> $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ 1, & \tau < t \leq \tau + \delta \\ 0, & t \geq \tau + \delta \end{cases}$  | $\frac{e^{-\tau s} - e^{-(\tau+\delta)s}}{s}$                           | $s \in \mathbb{C}$        |
| <p>Hutfunktion:</p> $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau \\ t - \tau, & \tau \leq t < \tau + \delta \\ \tau + 2\delta - t, & \tau + \delta \leq t < \tau + 2\delta \\ 0, & t \geq \tau + 2\delta \end{cases}$ | $\frac{e^{-\tau s} - 2e^{-(\tau+\delta)s} + e^{-(\tau+2\delta)s}}{s^2}$ | $s \in \mathbb{C}$        |

Parameter:  $\tau \geq 0, \delta > 0$

Bei den beiden letzten Beispielen ist  $s = 0$  hebbare Singularität.

Zur Darstellung von Treppenfunktionen ist die folgende Definition hilfreich.

**Definition 30.8 (Heaviside-Funktion, Indikatorfunktion)**

Die auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktion

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

heißt HEAVISIDE-FUNKTION. Für  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$  mit  $\tau_1 < \tau_2$  nennen wir die Funktion

$$\mathbb{1}_{[\tau_1, \tau_2)}(t) = H(t - \tau_1) - H(t - \tau_2) = \begin{cases} 0, & t < \tau_1 \\ 1, & \tau_1 \leq t < \tau_2 \\ 0, & t \geq \tau_2 \end{cases}$$

die INDIKATORFUNKTION des Intervalls  $[\tau_1, \tau_2)$ .

Für die Laplace-Transformation sind diese Funktionen jeweils auf  $[0, \infty)$  einzuschränken.

Hiermit lassen sich Treppenfunktionen einfach darstellen:

für  $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$  ist eine Treppenfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned} f(t) &= c_1 \mathbb{1}_{[\tau_1, \tau_2)}(t) + c_2 \mathbb{1}_{[\tau_2, \tau_3)}(t) + c_3 \mathbb{1}_{[\tau_3, \tau_4)}(t) + \dots \\ &= c_1 H(t - \tau_1) + (c_2 - c_1)H(t - \tau_2) + (c_3 - c_2)H(t - \tau_3) + \dots \end{aligned}$$

Hierbei sind  $c_k$  die Funktionswerte der Treppenfunktion im Intervall  $[\tau_k, \tau_{k+1})$  und  $(c_k - c_{k-1})$  ist die Sprunghöhe an der Stelle  $\tau_k$ .

Die Laplace-Transformierte erhält man als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f](s) &= \frac{c_1(e^{-\tau_1 s} - e^{-\tau_2 s}) + c_2(e^{-\tau_2 s} - e^{-\tau_3 s}) + c_3(e^{-\tau_3 s} - e^{-\tau_4 s}) + \dots}{s} \\ &= \frac{c_1 e^{-\tau_1 s} + (c_2 - c_1)e^{-\tau_2 s} + (c_3 - c_2)e^{-\tau_3 s} + \dots}{s}. \end{aligned}$$

Das Verfahren wird an einem Beispiel erklärt.

### 30.9 (Beispiel)

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

Laplace-Transformation ergibt

$$\left( s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) \right) - 3 \left( sY(s) - y(0) \right) + 2Y(s) = 0$$

$$\iff Y(s)(s^2 - 3s + 2) = sy(0) + (y'(0) - 3y(0))$$

$$\iff Y(s) = \frac{sy(0) + (y'(0) - 3y(0))}{s^2 - 3s + 2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2}$$

Damit kann man für jede Wahl der Anfangswerte die Konstante  $A$  und  $B$  bestimmen und damit durch die Verwendung der Tabelle die (eindeutige) Lösung der Dgl. bestimmen; z.B. erhält man für  $y(0) = 0$  und  $y'(0) = 1$

$$Y(s) = \frac{-1}{s-1} + \frac{1}{s-2}, \text{ also } y(t) = -e^t + e^{2t}.$$

Die **inhomogene** lineare Dgl.

$$y'' + 2py' + qy = f(t), \quad p, q \in \mathbb{R},$$

führt auf

$$\begin{aligned} (s^2 + 2ps + q)Y(s) - (s + 2p)y(0) - y'(0) &= F(s) \\ \implies Y(s) &= \frac{(s + 2p)y(0) + y'(0) + F(s)}{s^2 + 2ps + q}. \end{aligned}$$

Hier taucht also ein zusätzlicher Summand

$$Y_p(s) := \frac{F(s)}{s^2 + 2ps + q}$$

auf, der zu einer speziellen Lösung  $y_p$  der inhomogenen Dgl. gehört.

Die speziellen rechten Seiten  $f(t)$  in der Dgl. (Polynome, Cosinus-, Sinus- und Exponentialfunktion) führen auf eine rationale Funktion  $F(s)$ . Die Berechnung von  $y$  erfolgt also wieder anhand der Zerlegung des Bruchs in Terme der Laplace-Tabelle.

Ein allgemeiner Zugang zur inhomogenen linearen Dgl. wird mit Hilfe der **Faltung** beschrieben.

**Definition 30.10 (Faltung)**

Die Funktionen  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  seien zulässig mit dem Parameter  $a$ . Dann heißt die Funktion  $f * g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t - u) du, \quad t \in [0, \infty),$$

die FALTUNG von  $f$  und  $g$ . Diese Funktion ist zulässig mit jedem Parameter  $c > a$ .

**Satz 30.11 (Eigenschaften der Faltung, Faltungssatz)**

- (a) Die Faltung von zulässigen Funktionen  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt die Rechenregeln einer 'Multiplikation', also die Kommutativität, Assoziativität, und Distributivität:

$$\begin{aligned}f * g &= g * f \\f * (g * h) &= (f * g) * h \\f * (g + h) &= (f * g) + (f * h).\end{aligned}$$

- (b) Es gilt der FALTUNGSSATZ: Die Laplace-Transformierte eines "Faltungsprodukts" zulässiger Funktionen  $f, g : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  mit dem Parameter  $a$  ist das Produkt der Laplace-Transformierten:

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f](s) \mathcal{L}[g](s), \quad \operatorname{Re} s > a.$$

### Satz 30.12 (Lösung inhomogener linearer Differentialgleichungen)

Die Funktion  $\phi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sei die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (AWP) zur homogenen linearen Dgl. mit konstanten Koeffizienten

$$y'' + 2py' + qy = 0, \quad \boxed{y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.}$$

Falls  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  zulässig mit dem Parameter  $a$  ist, so ist  $y = \phi * f$  die eindeutige Lösung des AWP zur inhomogenen Dgl.

$$y'' + 2py' + qy = f(t), \quad \boxed{y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.}$$

Eine entsprechende Aussage gilt für lineare Dgl. höherer Ordnung:

Die Lösung des Anfangswertproblems der Dgl. mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = f(t), \quad y^{(n-1)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0$$

ist gegeben durch  $y = \phi * f$ , wobei  $\phi$  das AWP

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \quad y^{(n-2)}(0) = \cdots = y'(0) = y(0) = 0, \\ y^{(n-1)}(0) = 1 \text{ löst.}$$

Hier macht es keine Schwierigkeiten, auch mit unstetigen Inhomogenitäten zu rechnen.

An mehreren Stellen wurde von der Laplace-Transformierten  $F(s)$  auf die Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  geschlossen. Ist dies überhaupt erlaubt?

**Frage:** Ist  $f$  durch  $\mathcal{L}[f]$  eindeutig bestimmt?

### Satz 30.13 (Inverse Laplace-Transformation, Umkehrformel)

*Man kann hierzu eine "Umkehrformel" beweisen, mit der  $f(t)$  aus den Werten der Laplace-Transformierten  $\mathcal{L}[f](s)$  entlang einer Geraden parallel zur  $\text{Im } s$ -Achse berechnet wird. Die Formel lautet für geeignetes  $f$ , das zulässig mit dem Parameter  $a$  ist:*

$$\frac{1}{2\pi} \text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} F(s + iy) e^{t(s+iy)} dy = \frac{1}{2} (f(t-) + f(t+)).$$

Die Methoden zur Integration komplexer Funktionen lassen weitere Darstellungen der Umkehrformel zu.

### Satz 30.14 (Inverse Laplace-Transformation als komplexes Kurvenintegral)

*Die inverse Laplace-Transformation aus Satz 30.13 besitzt die Darstellung als komplexes Kurvenintegral*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \mathcal{L}[f](z) e^{tz} dz,$$

*wobei die Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $c(y) = s + iy$  mit festem  $s \in \mathbb{C}$ ,  $\operatorname{Re} s > a$  gegeben ist.*

### Satz 30.15 (Berechnung mit dem Residuensatz)

Unter den folgenden Voraussetzungen lässt sich das Integral mit dem Residuensatz berechnen:

- $\mathcal{L}[f]$  lässt sich zu einer holomorphen Funktion

$$\tilde{F} : \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\} \rightarrow \mathbb{C}$$

fortsetzen, wobei  $z_1, \dots, z_n$  isolierte Singularitäten mit  $\operatorname{Re} z_k \leq a$  sind,

- für ein  $R_0 > 0$  und ein  $c > a$  gilt

$$|z\tilde{F}(z)| \leq B \quad \text{für alle } z \text{ mit } \operatorname{Re} z \leq c, \quad |z - c| \geq R_0.$$

Dann gilt für  $t > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \mathcal{L}[f](z) e^{tz} dz = \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(\tilde{F}(z)e^{tz}; z_k).$$

## 30.16 (Folgerung)

Jede zulässige und stetige Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist durch ihre Laplace-Transformierte  $\mathcal{L}[f]$  eindeutig bestimmt. Die Zuordnung

$$\mathcal{L}[f] \rightarrow f$$

heißt INVERSE LAPLACE-TRANSFORMATION.

**Bemerkung:** Ist  $\mathcal{L}[f]$  bekannt, so findet man  $f$  üblicherweise durch Zuhilfenahme von Tabellen; dabei nutzt man die Linearität von  $\mathcal{L}$  aus.

Ist  $\mathcal{L}[y]$  eine rationale Funktion, so berechnet man entweder

- (a) die Partialbruchzerlegung mit den komplexen Nullstellen des Nenners. Dies führt auf Terme, deren inverse Laplace-Transformierte das Produkt aus einem Polynom und einer Exponentialfunktion ist,

oder

- (b) Terme im Nenner wie z.B.  $s^2 \pm \omega^2$  mit reellem  $\omega$ ; dies führt zu Produkten aus einem Polynom und einer Sinus-, Cosinus- oder Hyperbelfunktion.

**Satz 30.17 (Transformation periodischer Funktionen)**

Sei  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig und periodisch mit Periode  $T > 0$ , d.h.

$$f(t + T) = f(t) \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Dann ist die Laplace-Transformierte von  $f$  durch  $F(s) = \frac{\int_0^T f(t)e^{-st} dt}{1 - e^{-Ts}}$  gegeben.

# Kapitel 31 – Normierte Vektorräume

## 31: Normierte Vektorräume

Für eine systematische Behandlung von Grenzwert-Prozessen für Funktionenfolgen benötigen wir die allgemeine Definition der normierten Vektorräume und einen passenden Abstandsbegriff.

Hierauf aufbauend behandeln wir im Weiteren

- die Fourier-Reihen
- die Fourier-Transformation

**Bemerkung:** Ein Teil der hier zusammengestellten Begriffe und Sätze wurde bereits im Kapitel über allgemeine Vektorräume definiert und bewiesen. Daher enthält dieser Abschnitt zum Teil Wiederholungen.

**Konvention:** Vektoren werden im Folgenden ohne Pfeil geschrieben.

Wir wollen:

- weitere Normen auf dem  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$
- Normen auf vielen weiteren Vektorräumen, z.B. dem Vektorraum der stetigen Funktionen

$$C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\} \text{ bzw. } C[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

kennenlernen.

### Definition 31.1 (Norm, normierter Raum)

*Es sei  $V$  ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine NORM auf  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:*

- (a) POS. DEFINITHEIT:  $\|v\| \geq 0$  für alle  $v \in V$ , und  $(\|v\| = 0 \iff v = 0)$ ,
- (b) HOMOGENITÄT:  $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$  für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{C}$  und  $v \in V$ ,
- (c) DREIECKSUNGLEICHUNG:  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$  für alle  $v, w \in V$ .

*Ein Vektorraum  $V$  mit einer Norm  $\|\cdot\|$  heißt ein NORMIERTER RAUM.*

**Bemerkungen:** Die Norm liefert einen Abstands-Begriff:

- $\|v\|$  ist der Abstand des Vektors  $v$  vom Nullpunkt  $0 \in V$ .
- $\|v - w\|$  ist der Abstand der beiden Vektoren  $v$  und  $w$

Genau wie es für den Betrag gemacht wurde, beweist man die ZWEITE DREIECKSUNGLEICHUNG: In jedem normierten Raum gilt

$$\|v - w\| \geq | \|v\| - \|w\| |.$$

Beispiele von Normen auf dem  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$ 

- EUKLIDISCHE NORM:  $\|x\| = \|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$
- MAXIMUMSNORM:  $\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$
- BETRAGSSUMMENNORM:  $\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$
- Allgemein: für  $1 \leq p < \infty$  die sog.  $p$ -NORM

$$\|x\|_p := (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} .$$

Zum Beweis der Dreiecksungleichung für die  $p$ -Normen benötigt man die HÖLDER-UNGLEICHUNG.

### Satz 31.2 (Hölder- und Minkowski-Ungleichung)

Wir definieren

- zu  $1 < p < \infty$  den KONJUGIERTEN EXPONENTEN  $q = \frac{p}{p-1}$  (also ist  $1 < q < \infty$  und  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ),
- zu  $p = 1$  den konjugierten Exponenten  $q = \infty$  und zu  $p = \infty$  den konjugierten Exponenten  $q = 1$ .

Dann gilt für beliebige Vektoren  $x, y \in \mathbb{R}^n$  die HÖLDER-UNGLEICHUNG

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Daraus folgt die Dreiecksungleichung, die hier MINKOWSKI-UNGLEICHUNG heißt:

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

## Weitere Beispiele von Normen

1. Für  $1 \leq p < \infty$  definieren wir die Folgenräume

$$l^p(\mathbb{N}, \mathbb{R}) := \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R} \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}$$

mit der  $l^p$ -Norm  $\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{l^p} := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$ . Hölder- und Minkowski-Ungleichung gelten auch für Folgen.

2. Der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen und beschränkten Intervall  $I = [a, b]$  wurde mit  $C[a, b]$  bezeichnet. Wir definieren verschiedene Normen auf diesem Vektorraum:
  - MAXIMUMSNORM:  $\|f\|_{\infty} := \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$ .
  - für  $1 \leq p < \infty$  die  $L_p$ -NORM:

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Auch diese Norm ist wohldefiniert.

Es folgt

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \|f\|_\infty \int_a^b |g(x)| dx \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Dies ist eine Version der Hölder-Ungleichung für Integrale. Allgemein:

### Satz 31.3 (Hölder- und Minkowski-Ungleichung auf $C[a, b]$ )

Zu  $1 \leq p \leq \infty$  sei  $q$  der konjugierte Exponent wie in 31.2. Dann gilt für stetige Funktionen  $f, g \in C[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Weiter gilt die Dreiecks- bzw. Minkowski-Ungleichung

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Nach den Überlegungen zur GEOMETRIE normierter Räume kommen wir noch zur TOPOLOGIE dieser Räume: Die Norm beinhaltet den Abstandsbegriff und ermöglicht die Einführung der Begriffe der Analysis wie im  $\mathbb{R}^n$ :

#### Definition 31.4 (Konvergenz von Folgen und Reihen)

Eine Folge  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Elementen  $v_k$  des normierten Raumes  $V$  heißt KONVERGENT gegen  $v \in V$ , wenn gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v - v_k\| = 0.$$

Eine Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$  mit Summanden  $v_k \in V$  heißt KONVERGENT gegen  $w \in V$ , wenn gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| w - \sum_{k=1}^N v_k \right\| = 0.$$

Eine Teilmenge  $W$  eines normierten Raumes  $V$  heißt DICHT, wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  und jedem  $v \in V$  ein  $w \in W$  gibt mit  $\|v - w\| < \varepsilon$ .

## Definition 31.5 (Äquivalenz von Normen)

Zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  auf einem Vektorraum heißen ÄQUIVALENT, wenn

$$\|v - v_k\|_1 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \|v - v_k\|_2 \rightarrow 0.$$

**Bemerkung:** Das ist genau dann der Fall, wenn es positive Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  gibt, so dass für alle  $v$  im Vektorraum gilt

$$C_1\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq C_2\|v\|_1.$$

- (a) Alle Normen auf dem  $\mathbb{R}^n$  sind ÄQUIVALENT: Die Konvergenz  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v$  bzgl. einer Norm (z.B. der Maximums-Norm) zieht sofort die Konvergenz bezüglich aller anderen Normen nach sich:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|v - v_k\|_p = 0 \quad \text{für alle } 1 \leq p \leq \infty.$$

Dies folgt aus den Ungleichungen

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq n^{1/p} \|v\|_\infty.$$

(b) Die  $L_p$ -Normen auf  $C[a, b]$  sind **nicht** äquivalent.

- Die Maximumsnorm ( $p = \infty$ ) führt auf den Konvergenzbegriff der GLEICHMÄSSIGEN KONVERGENZ:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \max_{x \in [a, b]} |f_k(x) - f(x)| \right) = 0.$$

- Die  $L_2$ -Norm auf  $C[a, b]$  führt auf die KONVERGENZ IM QUADRATISCHEN MITTEL:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \int_a^b |f_k(x) - f(x)|^2 dx \right) = 0.$$

- Es gibt **keine** Norm auf  $C[a, b]$ , die die PUNKTWEISE KONVERGENZ induziert.

Wie beim Übergang von den rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen gibt es auch bei normierten Räumen den Begriff der VOLLSTÄNDIGKEIT:

**Definition 31.6 (Cauchy-Folge, vollständig, Banachraum)**

- Eine Folge  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von Elementen  $v_k$  des normierten Raumes  $V$  heißt CAUCHY-FOLGE, wenn für jedes  $\epsilon < 0$  ein  $N \in \mathbb{N}$  existiert, so dass für alle  $m, n \geq N$

$$\|v_m - v_n\| < \epsilon.$$

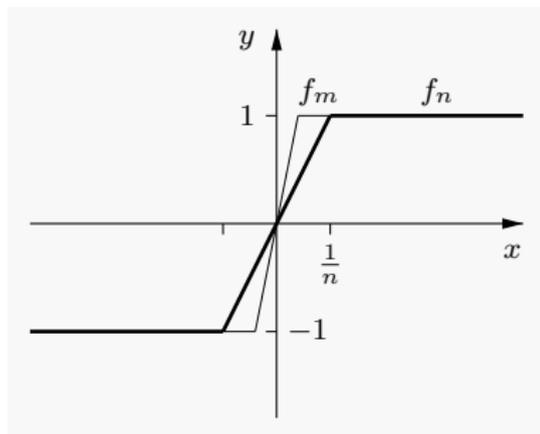
- Ein normierter Raum  $V$  heißt VOLLSTÄNDIGER RAUM oder BANACHRAUM, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert  $v \in V$  besitzt.
- Ein Skalarproduktraum (siehe 31.9)  $V$  heißt VOLLSTÄNDIGER RAUM oder HILBERTRAUM, wenn  $V$  mit der Norm  $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$  vollständig ist.

## Beispiele

- (a)  $\mathbb{R}^n$  ist mit jeder  $p$ -Norm ein Banachraum, und mit der Euklidischen Norm ( $p = 2$ ) sogar ein Hilbertraum.
- (b)  $C[a, b]$  ist mit der Maximumsnorm ein Banachraum.
- (c)  $C[a, b]$  versehen mit der  $L_2$ -Norm ist **nicht** vollständig. Ein Beispiel einer Cauchy-Folge in  $C[-1, 1]$  ohne einen Grenzwert in  $C[-1, 1]$  ist

$$f_k(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -\frac{1}{k} \\ kx & -\frac{1}{k} \leq x \leq \frac{1}{k} \\ 1 & x \geq \frac{1}{k} \end{cases}, k = 1, 2, \dots$$

Man erkennt, dass  $\|f_n - f_m\|_2^2 \leq 2 \max\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$  ist. Eine stetige Grenzfunktion müsste für  $x > 0$  den Wert 1 und für  $x < 0$  den Wert  $-1$  haben.



**Definition 31.7 (Norm und Stetigkeit)**

Seien  $V$  und  $W$  normierte Räume mit den Normen  $\|\cdot\|_V$  bzw.  $\|\cdot\|_W$ ,  $D \subset V$  und  $v_0 \in V$ .  $f : D \rightarrow W$  sei eine Abbildung.

- $f$  heißt in  $v_0$  STETIG, wenn gilt  $\|v - v_0\|_V \rightarrow 0 \implies \|f(v) - f(v_0)\|_W \rightarrow 0$ .
- $f$  heißt in  $D$  STETIG, wenn  $f$  in jedem Punkt von  $D$  stetig ist.

Besonders einfach ist es für LINEARE ABBILDUNGEN, die auf  $D := V$  definiert sind.

**Satz 31.8**

Es sei  $L : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

1.  $L$  ist stetig.
2.  $L$  ist in  $v_0 = 0$  stetig.
3. Es gibt ein  $C \geq 0$ , so dass für alle  $v \in V$  gilt:  $\|L(v)\|_W \leq C\|v\|_V$ .

Das Infimum aller  $C$  mit dieser Eigenschaft wird mit  $\|L\|$  bezeichnet.

Es ist also immer  $\|L(v)\|_W \leq \|L\| \cdot \|v\|_V$ , und es gibt keine kleinere Konstante als  $\|L\|$  mit dieser Eigenschaft.

Eine besonders wichtige Rolle spielen Skalarprodukträume.

### Definition 31.9 (Skalarprodukt und Norm)

- Ein SKALARPRODUKT auf einem Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $(v, w) \longrightarrow \langle v, w \rangle$  von  $V \times V$  in die reellen oder komplexen Zahlen, die definit, symmetrisch, linear in der ersten und antilinear in der zweiten Komponente ist.
- Wie in HM1 bewiesen wurde, induziert das Skalarprodukt eine Norm durch

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Jeder Skalarprodukt-Raum ist also auch ein normierter Raum. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

- Es gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung

$$|\langle v, w \rangle| \leq \sqrt{\langle v, v \rangle \langle w, w \rangle} = \|v\| \|w\|$$

## Satz 31.10 (Parallelogramm-Identität und Winkel)

(a) In einem Skalarproduktraum  $V$  gilt die Identität

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2). \quad (*)$$

(b) Umgekehrt: Falls in einem normierten Raum  $V$  die Parallelogramm-Identität (\*) gilt, so ist durch

$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$$

bzw. im komplexen Fall

$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{4} (\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2 + i\|v - iw\|^2 - i\|v + iw\|^2)$$

ein Skalarprodukt definiert, das diese Norm induziert.

(c) In reellen Räumen ist durch

$$\cos(\alpha) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$$

der Winkel  $\alpha = \angle(v, w)$  im Intervall  $0 \leq \alpha \leq \pi$  festgelegt.

**Beispiel:** Der Vektorraum  $C[a, b]$  mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in C[a, b]$$

ist ein Skalarproduktraum. Die induzierte Norm ist die  $L_2$ -Norm,

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Die Cauchy-Schwarz Ungleichung lautet hier

$$\left| \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \right| \leq \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Dies ist ein Spezialfall (mit  $p = q = 2$ ) der Hölder-Ungleichung.

Wieder gilt:  $v, w \in V$  heißen ORTHOGONAL, wenn  $\langle v, w \rangle = 0$  gilt.

Ein normierter Raum heißt SEPARABEL, wenn es eine abzählbare dichte Menge gibt. Wir betrachten hier nur separable Hilberträume.

### Definition 31.11 (Orthonormal-System)

- Die Vektoren  $v_1, v_2, \dots$  im Skalarproduktraum  $V$  bilden ein ORTHONORMAL-SYSTEM (ONS), wenn gilt

$$\langle v_j, v_k \rangle = \begin{cases} 0 & \text{für } j \neq k \\ 1 & \text{für } j = k \end{cases}$$

- Das ONS heißt VOLLSTÄNDIG, wenn aus  $\langle w, v_j \rangle = 0$  für alle  $j$  schon  $w = 0$  folgt.

Zur Konstruktion von ONS kann (auch für unendlich viele Vektoren) das Gram-Schmidt-Verfahren verwendet werden.

### Satz 31.12 (Satz des Pythagoras und Besselsche Ungleichung)

Falls die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_N$  im Skalarproduktraum  $V$  ein Orthonormal-System bilden, so gilt der Satz des Pythagoras

$$\left\| \sum_{k=1}^N c_k v_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^N |c_k|^2 \quad (c_k \in \mathbb{C} \text{ beliebig})$$

und die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^N |\langle w, v_k \rangle|^2 \leq \|w\|^2 \quad (w \in V \text{ beliebig}).$$

Orthonormalsysteme in Hilberträumen haben fast dieselben Eigenschaften wie in endlichdimensionalen Räumen:

### Satz 31.13 (Orthonormalbasen und Parseval-Identität)

Sei  $v_1, v_2, \dots$  ein vollständiges ONS in einem Skalarproduktraum  $V$ . Dann gilt:

- a)  $v_1, v_2, \dots$  ist eine ORTHONORMALBASIS (ONB): es gilt für jeden Vektor  $w \in V$ :

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \langle w, v_k \rangle v_k$$

- b) Es gilt die PARSEVALSCHE IDENTITÄT

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle w, v_k \rangle|^2 = \|w\|^2$$

Orthonormalsysteme dienen beispielsweise zur PROJEKTION auf den Teilraum

$$Z = \text{span} (v_1, \dots, v_N).$$

### Definition 31.14 (Orthogonalprojektion)

Die Vektoren  $v_1, v_2, \dots, v_N$  seien ein Orthonormalsystem in  $V$ . Mit  $Z$  sei der obige Teilraum bezeichnet. Zu beliebigem  $w \in V$  ist der Vektor

$$P(w) := \sum_{k=1}^N \langle w, v_k \rangle v_k$$

die Orthogonal-Projektion von  $w$  auf den Teilraum  $Z$ , d.h.

$$\langle w - P(w), z \rangle = 0 \quad \text{für alle } z \in Z.$$

## Satz 31.15

Es gelten die Identitäten

$$\text{a) } \|w\|^2 = \|w - P(w)\|^2 + \|P(w)\|^2$$

$$\text{b) } \|w - z\|^2 = \|w - P(w)\|^2 + \|P(w) - z\|^2 \quad \text{für alle } z \in Z.$$

Damit ist die Orthogonal-Projektion  $P(w) \in Z$  der eindeutig bestimmte Vektor im Teilraum  $Z$  mit minimalem Abstand vom Vektor  $w$ .

**Bemerkung:** Man sieht an der expliziten Form in diesem Satz, dass die Orthogonalprojektion ein LINEARER Operator ist, dass also

$$P(\alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha P(w_1) + \beta P(w_2)$$

gilt.

# Kapitel 32 – Periodische Funktionen, Fourier-Entwicklung

## Periodische Funktionen, Fourier-Entwicklung

Die Fourier-Entwicklung ist eines der wichtigsten mathematischen Werkzeuge in fast allen technischen Bereichen. Sie wurde vom französischen Mathematiker und Physiker Jean Baptiste Joseph Fourier (geb. 21. März 1768 bei Auxerre; gest. 16. Mai 1830 in Paris) eingeführt. Auf ihn geht die Theorie der Wärmeleitung zurück.

Fourier stellte fest, dass man durch die “unendliche” Linearkombinationen der Funktionen

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots,$$

also durch die nach ihm benannten Fourier-Reihen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

(fast) jede periodische Funktion mit der Periodenlänge  $T = 2\pi$  “erhält”. Durch Wahl der Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  gelang es ihm, einige Differentialgleichungen für periodische Funktionen zu lösen.

Fourier gab damit einen wesentlichen Impuls für die Untersuchung der Konvergenz von Reihen. Die heute klar formulierten Begriffe wie “punktweise Konvergenz” bzw. “gleichmäßige Konvergenz” von Funktionenreihen waren zu seiner Zeit noch unbekannt; durch die fehlende Präzisierung erschienen unendliche Reihen noch als “mysteriös”.

Eigentlich reicht hier eine Untersuchung reellwertiger Funktionen. Durch die Benutzung komplexwertiger Funktionen werden Beweise oft sehr vereinfacht.

### Definition 32.1 (Quadrat-integrierbare Funktionen)

- a) Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  heißt QUADRAT-INTEGRIERBAR, wenn das Integral

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt$$

existiert.

- b) Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}$  heißt NULLMENGE, wenn zu jedem  $\varepsilon > 0$  Intervalle  $I_1, I_2, \dots$  existieren, so dass

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon.$$

## Fortsetzung von Definition 32.1

- c) Zwei quadrat-integrierbare Funktionen  $f$  und  $g$  werden als gleich angesehen (d.h. miteinander "identifiziert"), geschrieben  $f \sim g$ , wenn

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt = 0$$

gilt. Die Funktion  $f$  repräsentiert eine ganze ÄQUIVALENZKLASSE von Funktionen,

$$[f] := \{g \mid f \sim g\}.$$

Es gilt  $f \sim g$  genau dann, wenn sich die Funktionen nur auf einer Nullmenge voneinander unterscheiden. Schreibweise:

$$f = g \quad \text{f. ü. (in englischsprachigen Texten a.e.)}$$

- d) Mit  $L_2([a, b])$  bezeichnen wir den Vektorraum aller quadrat-integrierbaren Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (unter Berücksichtigung der Identifikation "gleicher" Funktionen).

Der “richtige” Skalarproduktraum für die Fourier-Analyse ist der folgende.

**Definition 32.2 (Skalarprodukt quadrat-integrierbarer Funktionen)**

Das Skalarprodukt auf  $L_2([a, b])$  ist

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt,$$

und die zugehörige Norm ist die  $L_2$ -Norm

$$\|f\|_2 := \left( \int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

### Definition 32.3 (Periodische Funktionen und Fortsetzung)

- (a) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist **PERIODISCH** mit der Periode  $T$ , wenn  $f(t) = f(t + T)$  für jedes  $t \in \mathbb{R}$  gilt.
- (b) Induktiv folgt dann  $f(t) = f(t + kT)$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}$ .
- (c) Ist  $f$  über das Intervall  $[0, T]$  integrierbar, so gilt für jedes  $t_0 \in \mathbb{R}$ :

$$\int_0^T f(t) dt = \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt.$$

- (d) Die **PERIODISIERUNG** einer Funktion  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$  ist gegeben durch die Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$\tilde{f}(t) = f(t - kT) \quad \text{für } t \in [(k - \frac{1}{2})T, (k + \frac{1}{2})T) \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

- (e) Die **UNGERADE PERIODISCHE FORTSETZUNG** einer Funktion  $f : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$  erhält man, indem man  $f$  auf das Intervall  $[-T/2, 0)$  durch die Festlegung

$$f(t) = -f(-t), \quad t \in [-T/2, 0)$$

fortsetzt und anschließend wie in (d) periodisiert.

## Fortsetzung von Definition 32.3

- (f) Die GERADE PERIODISCHE FORTSETZUNG einer Funktion  $f : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$  erhält man, indem man  $f$  auf das Intervall  $[-T/2, 0)$  durch die Festlegung

$$f(t) = f(-t), \quad t \in [-T/2, 0),$$

fortsetzt und anschließend wie in (d) periodisiert.

## Bemerkung:

- (a) Bei der ungeraden Fortsetzung muss man ggf.  $f(0) := 0$  setzen.
- (b) Selbst wenn  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig ist, kann die periodische Fortsetzung in (d) an den Stellen  $(k + \frac{1}{2})T$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  unstetig sein. (Ebenso für die Fälle (e) und (f) und die Stellen  $kT$  sowie  $(k + \frac{1}{2})T$ .)

**Definition 32.4** (ONS in  $L_2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ )

Zur Periodenlänge  $T > 0$  definieren wir die Grundfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

(a) Für  $L_2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$  definieren wir das ONS

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= \sqrt{\frac{1}{T}}, & \phi_{2k-1}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(k\omega t) \\ \phi_{2k}(t) &= \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(k\omega t), & k &= 1, 2, 3, \dots\end{aligned}$$

(b) Das in (a) angegebene System  $\phi_0, \phi_1, \dots$  ist ein ONS bzgl. des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \overline{g(t)} dt$$

(c) Schränkt man sich auf reelle Koeffizienten ein, ist das angegebene System ein ONS auf dem entsprechenden Teilraum der reellwertigen Funktionen.

Die allgemeine Aussage zur Orthogonalprojektion in Satz 31.14 liefert die Grundlage der Fourier-Analyse.

Die Konstanten in den Funktionen werden dabei in die Koeffizienten gezogen.

### Definition 32.5 (Fourier-Koeffizienten)

Wir betrachten das ONS aus 32.4(a). Zur Funktion  $f \in L_2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$  und der Grundfrequenz  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  definieren wir die FOURIER-KOEFFIZIENTEN

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{T}} \langle f, \phi_0 \rangle = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt,$$

$$a_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \langle f, \phi_{2k} \rangle = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(k\omega t) dt,$$

$$b_k = \sqrt{\frac{2}{T}} \langle f, \phi_{2k-1} \rangle = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(k\omega t) dt,$$

$$k = 1, 2, 3, \dots$$

### Definition 32.6 (Fourierreihe)

Die Orthogonalprojektion

$$\begin{aligned} S_N[f](t) &= \sum_{k=0}^{2N} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ &= \sum_{k=-N}^N c_k e^{i\omega k t} \end{aligned}$$

heißt die FOURIER-PARTIALSUMME von  $f$ , und die Reihe

$$\begin{aligned} f &\sim \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, \phi_k \rangle \phi_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega k t} \end{aligned}$$

heißt die FOURIERREIHE von  $f$ .

## Definition 32.7 (Komplexe Fourierreihe)

Die komplexen Fourierkoeffizienten von  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  sind für  $k \in \mathbb{Z}$  definiert durch

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-ik\omega t} dt.$$

Die komplexe Fourierreihe von  $f$  lautet

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}.$$

Zu den Koeffizienten  $a_k$  und  $b_k$  in 32.5 bestehen die Beziehungen

$$a_0 = 2c_0, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = i(c_k - c_{-k}), \quad k \in \mathbb{N},$$

und umgekehrt

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Falls  $f$  reellwertig ist, so gilt

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Daraus ergeben sich die reellen Fourierkoeffizienten

$$a_k = 2\operatorname{Re} c_k, \quad b_k = -2\operatorname{Im} c_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Satz 32.8 (Hauptsatz der Fourier-Analyse)**

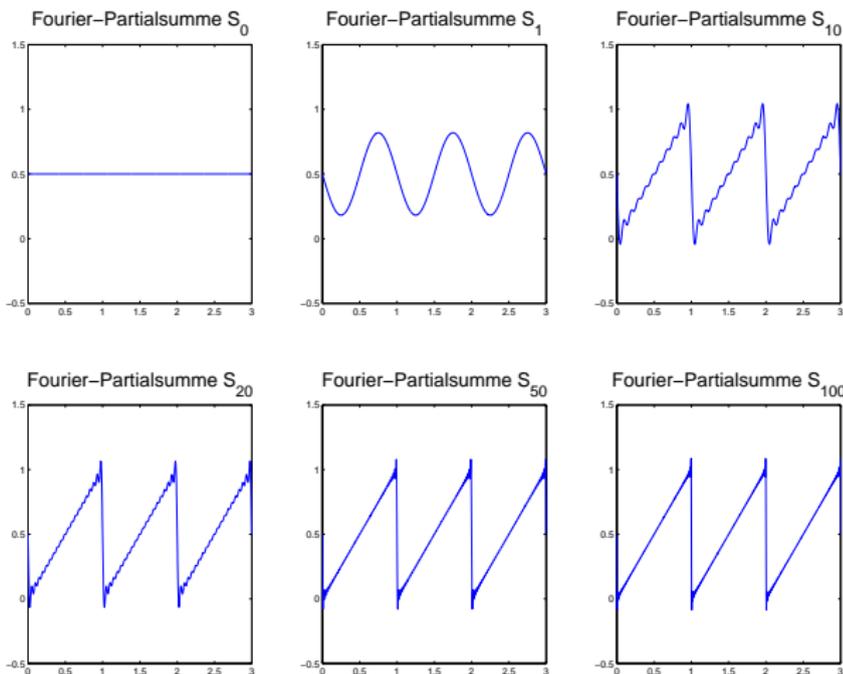
Es sei  $f \in L_2([-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}])$ . Dann gilt die KONVERGENZ IM QUADRATISCHEN MITTEL

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N[f]\|_2^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t) - S_N[f](t)|^2 dt = 0$$

sowie die Parseval-Identität

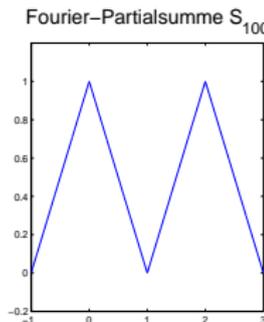
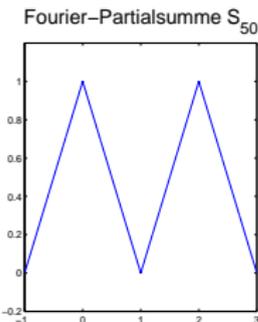
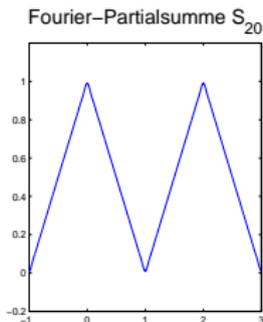
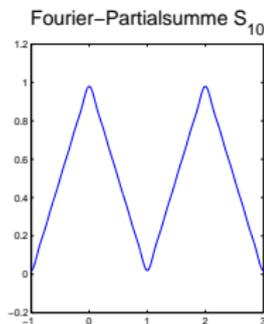
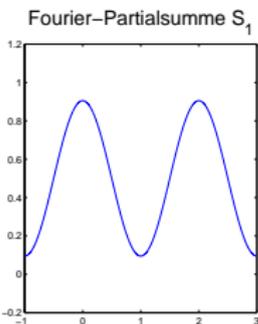
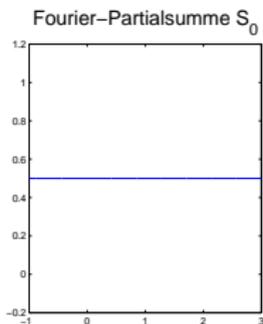
$$\|f\|_2^2 = \frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

BILDER von  $S_0, S_1, S_{10}, S_{20}, S_{50}, S_{100}$  für  $f(t) = t$  auf  $[0, 1]$ , gezeichnet wird die periodische Fortsetzung auf das Intervall  $[0, 3]$ .



Hier liegt tatsächlich die Approximation im quadratischen Mittel vor! Weiter erkennt man das Gibb'sche Phänomen (Überschwingen um 9% der Spunghöhe oben und unten)

BILDER von  $S_0, S_1, S_{10}, S_{20}, S_{50}, S_{100}$  für  $g(t) = 1 - |t|$  auf  $[-1, 1]$ , gezeichnet wird die periodische Fortsetzung auf das Intervall  $[-1, 3]$ .



Hier liegt sogar die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe gegen  $g$  vor.

### 1. Beweisteil des Hauptsatzes 32.8:

Die Funktion  $S_N[f]$  ist die **Orthogonal-Projektion** von  $f$  auf den Teilraum, der von den Funktionen  $\phi_j$  in 32.4(a),  $j = 0, 1, 2, \dots$ , aufgespannt wird. Denn:

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \langle f, \phi_0 \rangle \phi_0, \\ a_k \cos(k\omega t) &= \langle f, \phi_{2k} \rangle \phi_{2k}, \\ b_k \sin(k\omega t) &= \langle f, \phi_{2k-1} \rangle \phi_{2k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Mit der Besselschen Ungleichung aus Satz 31.12 folgt

$$\|f\|_2^2 \geq \|S_N[f]\|_2^2 = \frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2).$$

Die Identität im Satz über Orthogonalprojektionen 31.14(i) ergibt

$$\|f - S_N[f]\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \|S_N[f]\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \left( \frac{T}{4} a_0^2 + \frac{T}{2} \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Dies zeigt, dass die Konvergenz  $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - S_N[f]\|_2^2 = 0$  äquivalent ist zur Parseval-Identität in 32.8.

## 2. Beweisteil des Hauptsatzes 32.8:

Es bleibt die Frage zu beantworten, ob es eine quadrat-integrierbare Funktion  $f$  gibt, die einen positiven Abstand zu dem Teilraum besitzt, der von den Funktionen  $\phi_j$  in 32.4(a),  $j = 0, 1, 2, \dots$ , aufgespannt wird. Das folgende Resultat verneint diese Frage.

### Satz 32.9 (Vollständigkeit des Orthonormal-Systems)

Die Funktion  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  sei quadrat-integrierbar und es gelte

$$\langle f, \phi_j \rangle = 0$$

für alle trigonometrischen Funktionen  $\phi_j$  in 32.4(a). Dann gilt  $f \equiv 0$ .

**Bemerkung:** Für quadrat-integrierbare Funktionen gilt

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N[f]$$

im Sinne der Konvergenz in der  $L_2$ -Norm ("im quadratischen Mittel"). Man schreibt oft

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2k\pi t}{T} + b_k \sin \frac{2k\pi t}{T} \right),$$

obwohl diese Identität nicht zwingend für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt ist.

## Ergänzung: gerade und ungerade periodische Fortsetzung

Bisher wurde die periodische Fortsetzung einer Funktion  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  betrachtet. In Anwendungen bevorzugt man manchmal die geraden und ungeraden periodischen Fortsetzungen in 32.3. Die Grundfrequenz ist wieder  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

- Die Funktion  $f : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$  sei quadrat-integrierbar. Dann besitzt die ungerade periodische Fortsetzung die Fourierreihe (auch SINUS-REIHE genannt)

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega t)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt.$$

- Die Funktion  $f : [0, T/2] \rightarrow \mathbb{R}$  sei quadrat-integrierbar. Dann besitzt die gerade periodische Fortsetzung die Fourierreihe (auch COSINUS-REIHE genannt)

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt.$$

Wie steht es um punktweise und gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe?

Satz 32.10 (Punktweise Konvergenz der Fourierreihe)

Die Funktion  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  sei *stückweise stetig differenzierbar*, d.h. es gibt eine Unterteilung  $-\frac{T}{2} = t_0 < t_1 < \dots < t_r = \frac{T}{2}$  des Intervalls  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , so dass  $f$  auf jedem Teilintervall  $[t_k, t_{k+1}]$  stetig und stetig differenzierbar ist (mit einseitigen Grenzwerten der Funktion und der Ableitung am Rand).

Dann konvergiert die Fourier-Reihe von  $f$  an jeder Stelle  $t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , der Grenzwert ist der Mittelwert des links- und rechtsseitigen Grenzwerts von  $f$  an dieser Stelle, d.h.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N[f](t) = \frac{1}{2} \left( \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t+h) + \lim_{h \rightarrow 0^+} f(t-h) \right).$$

Bei  $t = \pm \frac{T}{2}$  ist hierbei der Grenzwert der periodischen Fortsetzung von  $f$  zu bilden.

**Wichtiger Spezialfall:** Wenn  $f$  stückweise stetig differenzierbar ist und die periodische Fortsetzung von  $f$  an der Stelle  $t$  stetig ist, dann gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N[f](t) = f(t).$$

Die Stetigkeit von  $f$  reicht nicht aus, damit die Fourierreihe konvergiert: Es gibt stetige Funktionen, deren Fourierreihe an vielen Stellen gar nicht konvergiert.

Die Zusatzvoraussetzung, dass  $f$  stückweise stetig differenzierbar ist, ist wesentlich für die Konvergenz der Fourierreihe.

## Satz 32.11 (Rechenregeln für Fourierreihen)

Fourierreihen können gliedweise differenziert und integriert werden: Sei  $T > 0$  die Periodenlänge und  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  die Grundfrequenz. Dann gilt für  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Fourierreihe

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)) :$$

(a) falls  $a_0 = 0$  gilt, sind durch

$$F(t) = C + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t) - \frac{b_k}{k\omega} \cos(k\omega t) \right)$$

mit  $C \in \mathbb{R}$  alle Stammfunktionen von  $f$  gegeben.

(b) falls die periodische Fortsetzung von  $f$  stetig ist und  $f$  stückweise stetig differenzierbar ist, so besitzt die stückweise gebildete Ableitung  $f'$  die Fourierreihe

$$f' \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-k\omega a_k \sin(k\omega t) + k\omega b_k \cos(k\omega t)).$$

Entsprechendes gilt für die komplexe Form.

Die Geschwindigkeit der Konvergenz der Fourierreihe hängt davon ab, wie schnell der Betrag der Fourier-Koeffizienten abnimmt. Es besteht ein direkter Zusammenhang zu der "Glattheit" der Funktion selbst.

### Satz 32.12 (Abnahme-Geschwindigkeit der Fourier-Koeffizienten)

Es sei  $r \in \mathbb{N}_0$ . Die periodische Fortsetzung von  $f : [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $r$ -mal stetig differenzierbar.

- (a) Falls die  $r$ -te Ableitung noch stückweise stetig differenzierbar ist, erfüllen die Fourier-Koeffizienten von  $f$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k^{r+1} a_k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k^{r+1} b_k = 0.$$

- (b) Falls die  $r$ -te Ableitung sogar zweimal stückweise stetig differenzierbar ist, erfüllen die Fourier-Koeffizienten von  $f$

$$|a_k| \leq \frac{C}{k^{r+2}}, \quad |b_k| \leq \frac{C}{k^{r+2}}$$

**Bemerkung:** Anhand vom Beispiel zu  $f(t) = 1 - |t|$  (mit  $r = 0$ ) erkennt man, dass die Abnahme-Geschwindigkeit in (b) nicht verbessert werden kann.

## Fourier-Analyse in den Anwendungen: lineare zeitinvariante Filter

Wir betrachten analoge periodische Signale der festen Periodenlänge  $T > 0$ . Sendet man ein Signal  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch einen Übertragungs-Kanal, so entstehen Transformationen des Signals. Ein einfaches Modell für das empfangene Signal  $h$  wird durch lineare zeitinvariante Filter ausgedrückt:

$$h(t) = (f * g)(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s)g(t - s) ds.$$

Hierbei stellt die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ebenfalls periodisch mit der gleichen Periodenlänge  $T$ ) die Wirkung des Kanals auf ein beliebiges Eingangssignal  $f$  dar ( $g$  ist die “Impuls-Antwort” des Kanals). In der Mathematik spricht man von der “Faltung” der Funktion  $f$  mit der Funktion  $g$ .

Aufschluss über die Wirkung des Kanals ergeben die Fourierkoeffizienten von  $g$ .

## Satz 32.13 (Faltungssatz)

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  seien periodische Funktionen der Periodenlänge  $T$ . Beide seien quadrat-integrierbar über  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ . Dann ist die Faltung

$$h = f * g, \quad h(t) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(s)g(t-s) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

ebenfalls periodisch zur Periodenlänge  $T$ . Die Funktion  $h$  ist stetig, und ihre Fourierkoeffizienten sind

$$c_k(f * g) = T \cdot c_k(f) \cdot c_k(g).$$

Für die reellen Fourierkoeffizienten bedeutet das

$$a_0(h) = \frac{T}{2} a_0(f) a_0(g)$$

$$a_k(h) = \frac{T}{2} (a_k(f) a_k(g) - b_k(f) b_k(g))$$

$$b_k(h) = \frac{T}{2} (a_k(f) b_k(g) + b_k(f) a_k(g)).$$

Weitere Eigenschaften der Faltung sind:

$$(1) f * g = g * f$$

$$(2) f * g \text{ ist in } C^{n+k+1}, \text{ wenn } f \in C^k \text{ und } g \in C^n \text{ ist.}$$

$$(3) (f * g)' = f' * g = f * g'$$

$$(4) \text{ Der DIRICHLET-KERN } D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{\sin \frac{2n+1}{2}t}{\sin \frac{t}{2}}$$

hat die Eigenschaft

$$\frac{1}{2\pi}(D_n * f)(t) = S_n[f](t)$$

# Kapitel 33 – Fourier-Transformaton

## Motivation: Fourier-Transformation

In Kapitel 30 wurde die Laplace-Transformation

$$f(t) \longrightarrow F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

für Funktionen  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  definiert.

Wir behandeln nun Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , die auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert sind. Das verwandte Parameterintegral

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R},$$

definiert die Fouriertransformierte von  $f$ . Hier wird also

- ein "beidseitiges" uneigentliches Integral gebildet und
- der Parameter  $s = i\omega$  mit  $\operatorname{Re} s = 0$  verwendet.

Eine enge Verwandtschaft besteht auch zu den Koeffizienten 32.7 der komplexen Fourierreihe einer periodischen Funktion

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)e^{-\frac{2\pi i k t}{T}} dt, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

## Definition 33.1 (absolut-integrierbare und quadrat-integrierbare Funktionen)

(a) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ABSOLUT-INTEGRIERBAR, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

gilt. Die  $L_1$ -Norm von  $f$  ist dann  $\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ .

(b) Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt QUADRAT-INTEGRIERBAR, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

gilt. Die  $L_2$ -Norm von  $f$  ist dann  $\|f\|_2 := \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ .

**Definition 33.2 (Fourier-Transformierte)**

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei absolut-integrierbar. Dann ist die  
FOURIER-TRANSFORMIERTE

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  definiert.

**Bemerkung:** Alternativ werden in Büchern auch die Definitionen

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\omega t} dt \quad \text{oder} \quad \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

verwendet. Man muss beim Vergleich verschiedener Quellen genau auf die Definition achten. Ebenso ist die Normierung durch Vorfaktoren unterschiedlich.

Für reelles  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erhält man die folgenden Eigenschaften.

### Satz 33.3 (Eigenschaften der Fouriertransformation)

(a) Falls  $f$  reellwertig ist, so gilt  $\overline{f(t)e^{-i\omega t}} = f(t)e^{i\omega t}$  und damit

$$\hat{f}(-\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t} dt = \overline{\hat{f}(\omega)}.$$

(b) Falls  $f$  reellwertig und gerade ist, so gilt

$$\hat{f}(-\omega) = \hat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt.$$

Insbesondere ist dann  $\hat{f}$  reellwertig.

(c) Falls  $f$  reellwertig und ungerade ist, so gilt

$$\hat{f}(-\omega) = -\hat{f}(\omega) = \frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt.$$

Insbesondere ist dann  $\hat{f}$  rein imaginär.

- Wegen  $|e^{-i\omega t}| = 1$  für  $\omega \in \mathbb{R}$  gilt

$$|\hat{f}(\omega)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_1,$$

die Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  einer absolut-integrierbaren Funktion ist also beschränkt.

- Es gilt  $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ .

Es gilt sogar der wichtige Satz:

### Satz 33.4 (Satz von Riemann-Lebesgue)

*Die Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  einer absolut-integrierbaren Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist gleichmäßig stetig auf ganz  $\mathbb{R}$  und es gilt*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

**Bemerkung:** Mit den Rechenregeln für differenzierbares  $f$  erhält man sogar eine Abnahme-Geschwindigkeit von  $\hat{f}(\omega)$ , wie bei den Fourier-Koeffizienten in 32.12.

Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation sind:

Satz 33.5 (Linearität und Rechenregeln)

Wenn  $f$  und  $g$  absolut-integrierbare Funktionen sind, so ist auch  $h = \alpha f + \beta g$  mit  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  absolut-integrierbar, und für alle  $\omega \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g](\omega) = \alpha \hat{f}(\omega) + \beta \hat{g}(\omega). \quad (\text{LINEARITÄT})$$

Weitere Rechenregeln sind:

(a) SKALIERUNG: für reelles  $c > 0$  sei

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) = f(ct).$$

Dann gilt

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{c} \hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right), \quad \omega > 0.$$

## Fortsetzung von Satz 33.5

(b) VERSCHIEBUNG: für  $\tau \in \mathbb{R}$  sei

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) = f(t - \tau).$$

Dann gilt

$$\widehat{h}(\omega) = e^{-i\tau\omega} \widehat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

(c) MODULATION: für  $\eta \in \mathbb{R}$  sei

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad h(t) = e^{i\eta t} f(t).$$

Dann gilt

$$\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega - \eta), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Weitere Rechenregeln betreffen die Ableitungen und die Stammfunktion von  $f$ .

### Satz 33.6 (Transformierte der Ableitung)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei  $r$ -mal differenzierbar und  $f, f', \dots, f^{(r)}$  seien absolut-integrierbar. Dann gilt

$$\mathcal{F}[f^{(r)}](\omega) = (i\omega)^r \hat{f}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

### Satz 33.7 (Transformierte der Stammfunktion)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei absolut-integrierbar und erfülle die "Momentenbedingungen"

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)| dt < \infty.$$

Dann ist die Stammfunktion

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(u) du, \quad t \in \mathbb{R},$$

absolut-integrierbar und es gilt

$$\widehat{F}(\omega) = \frac{\widehat{f}(\omega)}{i\omega} \quad \text{für } \omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Differenzierbarkeit von  $\hat{f}$  folgt ebenfalls aus einer Momentenbedingung:

### Satz 33.8 (Ableitung von $\hat{f}$ )

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei absolut-integrierbar und erfülle die Momentenbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)| dt < \infty.$$

Dann ist die Fourier-Transformierte  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-it)f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Die Ableitung  $\frac{d}{d\omega} \hat{f}$  ist also selbst die Fourier-Transformierte der Funktion  $h(t) = -it f(t)$ .

**Beweis:** Die stetige Differenzierbarkeit und die Form der Ableitung folgt wieder aus allgemeinen Sätzen über Parameterintegrale.

Für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , für die

$$f(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t < 0$$

gilt, ist der Zusammenhang der Fourier-Transformation und der Laplace-Transformation offensichtlich.

### Satz 33.9 (Fourier- und Laplacetransformation)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei absolut-integrierbar und es gelte

$$f(t) = 0 \quad \text{für alle} \quad t < 0.$$

Die Einschränkung  $\tilde{f} = f|_{[0, \infty)}$  sei zulässig mit einem Parameter  $a < 0$  (siehe Definition 30.1). Dann gilt

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{L}[\tilde{f}](i\omega).$$

## Satz 33.10 (Gaußsche Glockenkurve)

Sei  $\sigma > 0$ . Die Funktion

$$G_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}} e^{-t^2/\sigma}$$

hat die Fourier-Transformierte

$$\widehat{G}_\sigma(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\sigma\omega^2/4} = \sqrt{\frac{2}{\sigma}} G_{4/\sigma}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Speziell für  $\sigma = 2$  erhalten wir

$$\mathcal{F}[G_2(t)](\omega) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\right](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\omega^2/2} = G_2(\omega).$$

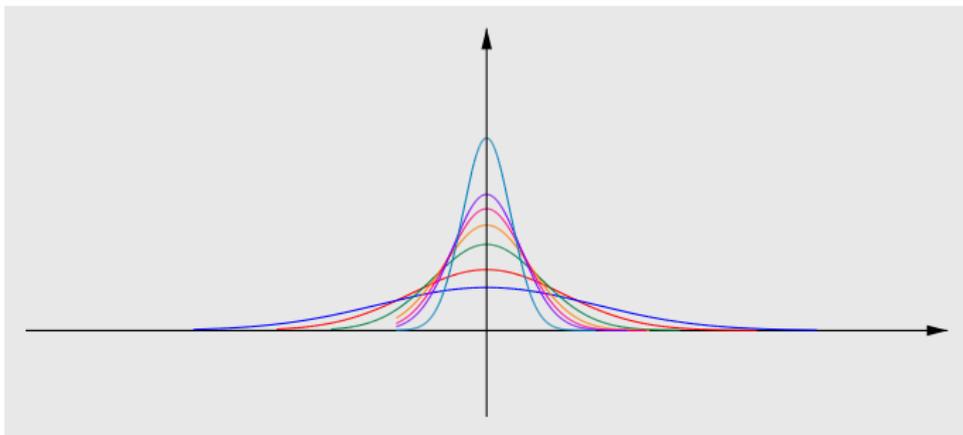
Für jedes  $\sigma > 0$  gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G_\sigma(t) dt = 1.$$

**Bemerkung:** Die Fourier-Transformierte einer Gaußschen Glockenkurve ist also wieder eine Gaußsche Glockenkurve.

$G_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$  ist eine EIGENFUNKTION der Fouriertransformation zum Eigenwert 1.

Bilder von Glockenkurven  $y(t) = G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-t^2/\sigma}$ .



Je kleiner  $\sigma$  ist, desto höher und schmaler wird der Graph der Funktion.  
Für große Werte von  $\sigma$  wird der Graph breit und flach.

Für zwei Funktionen  $f, g$  mit dem Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  wird die Faltung wie folgt definiert (vgl. 30.10).

### Definition 33.11 (Faltung (II))

Die Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  seien absolut-integrierbar. Dann heißt die Funktion  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t - u) du, \quad t \in \mathbb{R},$$

die FALTUNG von  $f$  und  $g$ . Diese Funktion ist für "fast alle"  $t \in \mathbb{R}$  definiert (also bis auf eine Nullmenge) und sie ist selbst wieder absolut-integrierbar.

**Satz 33.12 (Eigenschaften der Faltung)**

Die Faltung absolut-integrierbarer Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erfüllt die Rechenregeln einer 'Multiplikation', also die Kommutativität, Assoziativität, und Distributivität:

$$\begin{aligned}f * g &= g * f \\f * (g * h) &= (f * g) * h \\f * (g + h) &= (f * g) + (f * h).\end{aligned}$$

**Satz 33.13 (Faltungssatz)**

Die Fourier-Transformierte eines "Faltungsprodukts" absolut-integrierbarer Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ist das Produkt der Fourier-Transformierten:

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega), \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Wichtig für die Umkehrung der Fouriertransformation ist dieser Satz:

Satz 33.14 (Konvergenz der Faltungskerne)

Mit  $\sigma > 0$  und  $G_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{\sigma\pi}} e^{-t^2/\sigma}$  gilt für jede stetige und absolut-integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} (f * G_\sigma)(t) = f(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wie schon bei der Laplace-Transformation stellt sich auch hier die

**Frage:** Ist die Funktion  $f$  durch ihre Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  eindeutig bestimmt?

Wir werden hierzu wieder eine "Umkehrformel" beweisen:

### Satz 33.15 (Inverse Fourier-Transformation)

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei stetig und absolut-integrierbar. Wenn auch  $\hat{f}$  absolut-integrierbar ist, so gilt für jedes  $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t).$$

Damit ist

$$f(t) = \hat{\hat{f}}(-t).$$

Schreibweise:  $g = \hat{f} \iff f = \check{g}$ .

## Tabelle einiger Rechenregeln

| Eigenschaft | Funktion<br>$f(t)$ | Transformierte<br>$\hat{f}(\omega)$     | Eigenschaft               | Funktion<br>$f(t)$                              | Transformierte<br>$\hat{f}(\omega)$                 |
|-------------|--------------------|---|---------------------------|---|---|
| Translation | $f(t - \tau)$      | $e^{-i\tau\omega} \hat{f}(\omega)$      | Konjugierte               | $\overline{f(t)}$                               | $\overline{\hat{f}(-\omega)}$                       |
| Modulation  | $e^{i\eta t} f(t)$ | $\hat{f}(\omega - \eta)$ $f$ reell      | $f = \operatorname{Re} f$ | $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$ |   |
| Skalierung  | $f(ct)$            | $\frac{1}{ c } \hat{f}(\omega/c)$       | Faltung                   | $(f * g)(t)$                                    | $\sqrt{2\pi} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega)$       |
| Ableitung   | $f^{(k)}(t)$       | $(i\omega)^k \hat{f}(\omega)$           | Produkt                   | $f(t)g(t)$                                      | $\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \hat{f} * \hat{g}(\omega)$ |
| Ableitung   | $(-it)^k f(t)$     | $\frac{d^k}{d\omega^k} \hat{f}(\omega)$ | Inverse                   | $\hat{f}(t)$                                    | $f(-\omega)$  |

Nicht für jede Funktion  $f \in L_2(\mathbb{R})$  existiert das uneigentliche Integral

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-it\omega} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

Zur Definition der Fourier-Transformierten verwenden wir den Trick aus dem Beweis der Inversionsformel.

### Satz 33.16

Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sei quadrat-integrierbar. Dann ist die  
FOURIER-TRANSFORMIERTE

$$\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} e^{-(\alpha t)^2} dt$$

für fast alle  $\omega \in \mathbb{R}$  definiert.

Falls  $f$  absolut-integrierbar ist, so stimmt der hier definierte Wert mit  $\hat{f}(\omega)$  in Definition der Fouriertransformation überein.

Die Linearität 33.5, der Satz von Riemann-Lebesgue 33.4 und die Umkehrformel 33.15 beschreiben wesentliche Eigenschaften der Fourier-Transformation

$$\mathcal{F} : L_1(\mathbb{R}) \rightarrow C(\mathbb{R}).$$

Eine noch viel stärkere Eigenschaft für quadrat-integrierbare Funktionen besagt, dass die  $L_2$ -Norm von  $f$  erhalten bleibt.

### Satz 33.17 (Parseval-Identität)

*Für jede quadrat-integrierbare Funktion  $f$  ist auch die Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  quadrat-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt.$$

*Mit anderen Worten: Die lineare Abbildung*

$$\mathcal{F} : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}), \quad \mathcal{F}[f] = \hat{f}$$

*ist eine ISOMETRIE.*

Die Parseval-Identität 33.17 ist äquivalent zur Formel von Plancherel:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle.$$

Für  $f = g$  ist dies die Parseval-Identität.

Zwei wichtige Anwendungen der Fourier-Transformation auf  $L_2(\mathbb{R})$  sollen dieses Kapitel beschließen:

- das Abtasttheorem nach Shannon, Whittaker,
- die Unschärferelation von Heisenberg.

## Abstasttheorem

## Definition 33.18 (bandbeschränkte Funktionen)

Eine quadrat-integrierbare Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt

*bandbeschränkt* mit der Bandbreite  $B > 0$ ,

wenn

$$\hat{f}(\omega) = 0 \quad \text{für } |\omega| > 2\pi B \quad \text{gilt.}$$

**Wichtiges Beispiel:** Die wichtigste bandbeschränkte Funktion mit der Bandbreite  $B$  ist

$$S_B(t) = \begin{cases} \frac{e^{2\pi i B t} - e^{-2\pi i B t}}{2\pi i t} = \frac{\sin(2\pi B t)}{\pi t}, & t \neq 0, \\ 2B, & t = 0. \end{cases}$$

Ihre Fourier-Transformierte ist die Indikatorfunktion

$$\hat{S}_B(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{1}_{(-2\pi B, 2\pi B)}(\omega).$$

Nachweis mit der Umkehrformel 33.15 und der Rechnung in Beispiel mit der Indikatorfunktion.

### Satz 33.19 (Abtasttheorem)

Jede bandbeschränkte Funktion  $f \in L_2(\mathbb{R})$  lässt sich zu einer ganzen Funktion (also einer holomorphen Funktion  $\tilde{f} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ) in den Definitionsbereich  $\mathbb{C}$  fortsetzen.

Besitzt  $f$  die Bandbreite  $B > 0$ , so gilt die Darstellung

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{2B}\right) \frac{\sin \pi(2Bt - k)}{\pi(2Bt - k)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

wobei die Reihe im Sinne der  $L_2$ -Norm konvergiert.

**Bemerkung:** Die Funktion  $\frac{\sin \pi(2Bt - k)}{\pi(2Bt - k)} = \frac{S_B(t - k/2B)}{2B}$  hat den Grenzwert 1 an der Stelle  $t = k/2B$  und den Wert 0 an allen Stellen  $t = \ell/2B$  mit  $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}$ .

Setzen wir also  $t = k/2B$  ein, so tritt nur der eine Summand

$$f\left(\frac{k}{2B}\right) \frac{S_B(0)}{2B} = f\left(\frac{k}{2B}\right)$$

der Reihe auf. Die Reihe gibt also an, wie eine Funktion  $f$  zwischen ihren Funktionswerten  $f(k/2B)$  mit  $k \in \mathbb{Z}$  "interpoliert" werden muss, damit  $f$  bandbeschränkt ist.

Der Wert  $2B$  wird als **Abtastrate** zur Bandbreite  $B$  bezeichnet.

Von ganz anderer Art ist die Aussage zur **Unschärferelation**. Wir betrachten nun Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\|f\|_2 = 1$ .

Die "Streuung" (engl. dispersion) von  $f$  um einen Punkt  $t_0$  wird gemessen als

$$\Delta(f; t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt.$$

Dieser Ausdruck wird minimal, wenn  $t_0$  das sog. 1. Moment ist:

$$t_0 = \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt.$$

**Beweis:** Ableitung nach  $t_0$  ergibt als Bedingung für ein Minimum

$$\int_{-\infty}^{\infty} -2(t - t_0) |f(t)|^2 dt = 0, \text{ also } t_0 \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t |f(t)|^2 dt.$$

Wegen  $\|f\|_2 = 1$  folgt daraus die Behauptung.

Genau so definiert man für  $\hat{f}$  und  $\omega_0$  die Streuung

$$\Delta(\hat{f}; \omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} (\omega - \omega_0)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega, \text{ die für } \omega_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \text{ minimal wird.}$$

Man beachte dabei, dass  $\|\hat{f}\|_2 = 1$  wegen der Parseval-Identität gilt.

## Satz 33.20 (Unschärferelation)

Für jedes  $f \in L_2(\mathbb{R})$  mit  $\|f\|_2 = 1$  und alle  $t_0, \omega_0$  gilt

$$\Delta(f; t_0) \Delta(\hat{f}; \omega_0) \geq \frac{1}{4}.$$

D.h. das Produkt aus der Streuung von  $f$  im Zeitbereich und im Frequenzbereich kann den Wert  $1/4$  nicht unterschreiten.

**Beispiel:** Die Gaußsche Glockenkurve  $f(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-t^2/2}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , hat die  $L_2$ -Norm 1 und die Streuung (um  $t_0 = 0$ )

$$\Delta(f; 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot 2te^{-t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

Die Fouriertransformierte lautet nach 33.10  $\hat{f}(\omega) = f(\omega)$ .  
Damit ergibt sich auch

$$\Delta(\hat{f}; 0) = \frac{1}{2}.$$

In diesem Beispiel wird also die untere Schranke angenommen!

## Bemerkung

Die untere Schranke  $\frac{1}{4}$  wird mit  $t_0, \omega_0 \in \mathbb{R}$  **genau dann** angenommen, wenn  $f$  eine modulierte, verschobene und skalierte Gaußsche Glockenfunktion ist:

$$f(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} e^{-\beta(t-t_0)^2}$$

mit  $\beta > 0$ . Dabei ist  $C_1 \in \mathbb{C}$  eine Konstante, die zu  $\|f\|_2 = 1$  passt.

# Kapitel 34 – Rand- und Eigenwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen

## Rand- und Eigenwertprobleme gewöhnlicher Differentialgleichungen

### Definition 34.1 (Lineares Randwertproblem 2. Ordnung)

Ein LINEARES RANDWERTPROBLEM (RWP) 2. ORDNUNG besteht aus einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad x \in [a, b],$$

mit stetigen Funktionen  $p, q, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sowie den RANDBEDINGUNGEN

$$R_a(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) = A, \quad R_b(y) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = B,$$

mit reellen Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und vorgegebenen reellen Randwerten  $A, B$ . (Hierbei ist  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  und  $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$  vorausgesetzt.)

Das RWP heißt HOMOGEN, wenn sowohl die Dgl. als auch die Randbedingungen homogen sind, d.h. wenn  $g \equiv 0$  und  $A = B = 0$  gilt.

**Bemerkung:** Typische Form einfacher Randbedingungen:

- nur Funktionswerte am Rand:  $y(a) = A$ ,  $y(b) = B$ , oder
- nur Ableitungswerte am Rand:  $y'(a) = A$ ,  $y'(b) = B$

Die Definition enthält eine allgemeinere Form, in der Funktions- und Ableitungswerte gemischt auftreten.

## Satz 34.2 (Eindeutigkeit der Lösung)

Das inhomogene RWP 34.1 ist genau dann eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene RWP nur die Lösung  $y \equiv 0$  besitzt.

Dieser Fall liegt genau dann vor, wenn für ein Fundamentalsystem  $\varphi_1, \varphi_2$  der homogenen Dgl.

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad x \in [a, b],$$

gilt

$$D := \det \begin{pmatrix} R_a(\varphi_1) & R_a(\varphi_2) \\ R_b(\varphi_1) & R_b(\varphi_2) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Die Lösung wird in drei Schritten bestimmt:

1. Bestimme ein Fundamentalsystem  $\varphi_1, \varphi_2$  der homogenen Dgl. (Kap. über gew. Dgl.).
2. Bestimme eine spezielle (=partikuläre) Lösung  $y_S$  der inhomogenen Dgl.
3. Bestimme die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  in

$$y(x) = y_S(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x)$$

durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$R_a(y) = A, \quad R_b(y) = B.$$

Hierbei tritt genau die obige Matrix auf.

Wir betrachten nun **homogene RWP**'e.

### Satz 34.3 (Lösungsstruktur von RWP)

*Die Menge aller Lösungen des homogenen linearen RWP zweiter Ordnung ist ein Untervektorraum von  $C^2([a, b])$ . Es können die folgenden beiden Fälle auftreten:*

- (a)  $y \equiv 0$  ist die einzige Lösung; dies ist der in 34.2 dargestellte Fall.*
- (b) Die Menge der Lösungen hat die Dimension 1, d.h. die Lösungen haben die Form  $y(x) = c\varphi(x)$  mit  $c \in \mathbb{R}$  und einer von Null verschiedenen Lösung  $\varphi$  des homogenen RWP.*

Homogene RWP'e mit eindimensionalen Lösungsmengen sind von besonderer Bedeutung.

#### Definition 34.4 (Rand-Eigenwertproblem)

Ein homogenes Randwertproblem zur Dgl. 2. Ordnung

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = \mu y, \quad x \in [a, b], \quad (\text{mit } \mu \in \mathbb{C})$$

mit homogenen Randbedingungen

$$R_a(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad R_b(y) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$$

heißt RAND-EIGENWERTPROBLEM zum Differentialoperator

$$L(y) = y'' + p(x)y' + q(x)y.$$

Wenn für die Zahl  $\mu$  eine Lösung  $\varphi \neq 0$  des homogenen RWP existiert, so heißt  $\mu$  EIGENWERT und  $\varphi$  EIGENFUNKTION dieses Rand-Eigenwertproblems.

**Bemerkung:** Satz 34.3 besagt, dass alle Eigenwerte **einfach** sind.

## 34.5 (Wichtige Beispiele)

Wir betrachten das Randeigenwertproblem

$$c^2 y'' - \mu y = 0, \quad x \in [0, L], \quad (\text{mit } \mu \in \mathbb{C})$$

- mit den Randbedingungen  $y(0) = 0$  und  $y(L) = 0$  sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\mu_k = - \left( \frac{k\pi c}{L} \right)^2 \quad \text{und} \quad \varphi_k(x) = \sin \left( \frac{k\pi}{L} x \right), \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

- mit den Randbedingungen  $y'(0) = 0$  und  $y'(L) = 0$  sind die Eigenwerte und Eigenfunktionen

$$\mu_k = - \left( \frac{k\pi c}{L} \right)^2 \quad \text{und} \quad \varphi_k(x) = \cos \left( \frac{k\pi}{L} x \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Satz 34.6 (Eigenschaften der Eigenwerte und -funktionen)**

Wir betrachten das Rand-Eigenwertproblem

$$c^2 y'' = \mu y, \quad x \in [a, b], \quad (\text{mit } \mu \in \mathbb{C})$$

mit den homogenen Randbedingungen

$$R_a(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad R_b(y) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0,$$

und  $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$  sowie  $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$ . Dann gilt:

- (a) Es gibt abzählbar viele Eigenwerte. Alle Eigenwerte sind reell.
- (b) Die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal: Sind  $y_1$  und  $y_2$  Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten  $\mu_1 \neq \mu_2$ , so gilt

$$\int_a^b y_1(x) y_2(x) dx = 0.$$

- (c) Die Eigenfunktionen bilden ein **vollständiges** Orthogonalsystem im Raum  $L_2([a, b])$ .

Als Verallgemeinerung von  $c^2 y'' - \mu y = 0$  tritt in Anwendungen das reguläre Sturm-Liouville Rand-Eigenwertproblem auf.

### Definition 34.7 (Sturm-Liouville Rand-Eigenwertproblem)

Auf dem Intervall  $[a, b]$  seien eine stetig differenzierbare Funktion  $p$  und stetige Funktionen  $q, \sigma$  gegeben. Weiterhin gelte  $p(x) > 0$  und  $\sigma(x) > 0$  für alle  $x \in [a, b]$ . Das Rand-Eigenwertproblem

$$-(p(x)y')' + q(x)y - \mu\sigma(x)y = 0 \quad (\text{mit } \mu \in \mathbb{C})$$

und homogenen Randbedingungen

$$R_a(y) = \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \quad R_b(y) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$$

heißt REGULÄRES STURM-LIOUVILLE RAND-EIGENWERTPROBLEM.

**Satz 34.8 (Eigenschaften von Sturm-Liouville Rand-Eigenwertproblemen)**

Das reguläre Sturm-Liouville Rand-Eigenwertproblem besitzt unendlich viele reelle Eigenwerte

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \cdots, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty,$$

mit reellen Eigenfunktionen  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , die paarweise orthogonal sind bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) \sigma(x) dx.$$