

Beweis von Beh 1:

Sei $R > 0$ groß.

$$z \notin \overline{B_R(0)} : |f(z)| = \frac{1}{|P(z)|}$$

(also: $|z| \geq R$)

$$\leq \frac{1}{|a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0|}$$

$$|A+B| \geq |A| - |B|$$

(10)

$$\leq \frac{1}{|a_n| |z|^n - \{ |a_{n-1}| |z|^{n-1} + \dots + |a_0| \}}$$

$$\leq \frac{1}{|a_n|} \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} =: C_1$$

für R groß, $\{ \dots \} \leq \frac{1}{2} |a_n| |z|^n$

$$\max_{z \in \overline{B_R(0)}} |f(z)| =: C_2$$

Stetige Fkt.

$\forall z \in \mathbb{C}$:
Also: $|f(z)| \leq \max\{C_1, C_2\}$ nehmen auf $\mathbb{C}$.
Mengen Max. an.

Cauchy:
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

Folgerungen:

- $f(z_0)$ nur von Randw. abh.

- Formel für Ableitungen

$$f^{(k)}(z_0) = \dots$$

- Liouville f holom. auf $\mathbb{C}$ & beschr. Dann:

①

• Fundamentalsatz: Jedes Polynom $\uparrow$
in $\mathbb{C}$ hat NSt.
Grad ≥ 1

Bew. idee: P Polynom ohne NSt.

Betrachte $f(z) = \frac{1}{P(z)}$

Zeige: f beschr. (Beh 1)

Liouville $\Rightarrow f = \text{const}$

$f \equiv \text{const.}$

Residuensatz

Def: Sei f holomorph auf $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$
stetig auf $\overline{B_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Dann heißt

$$\text{Res}(f; z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} f(z) dz$$

das Residuum von f in z_0 .

2023-11-20 (nat. Parametrisierung, $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$)

Bem: $f(z) = \frac{a}{z - z_0}$

②

$$\text{Res}(f; z_0) = a \quad (\text{Cauchy})$$

$$f \text{ holom. in } B_r(z_0) \Rightarrow \text{Res}(f; z_0) = 0$$

$$f(z) = \frac{b}{(z - z_0)^2} \Rightarrow \text{Res}(f; z_0) = 0$$

Also: Res misst die Stärke des Pols 1. Ordn.

Satz (Residuensatz)

$M \subset \mathbb{C}$ ein beschr. Gebiet

$$N := \{z_1, \dots, z_m\} \subset M$$

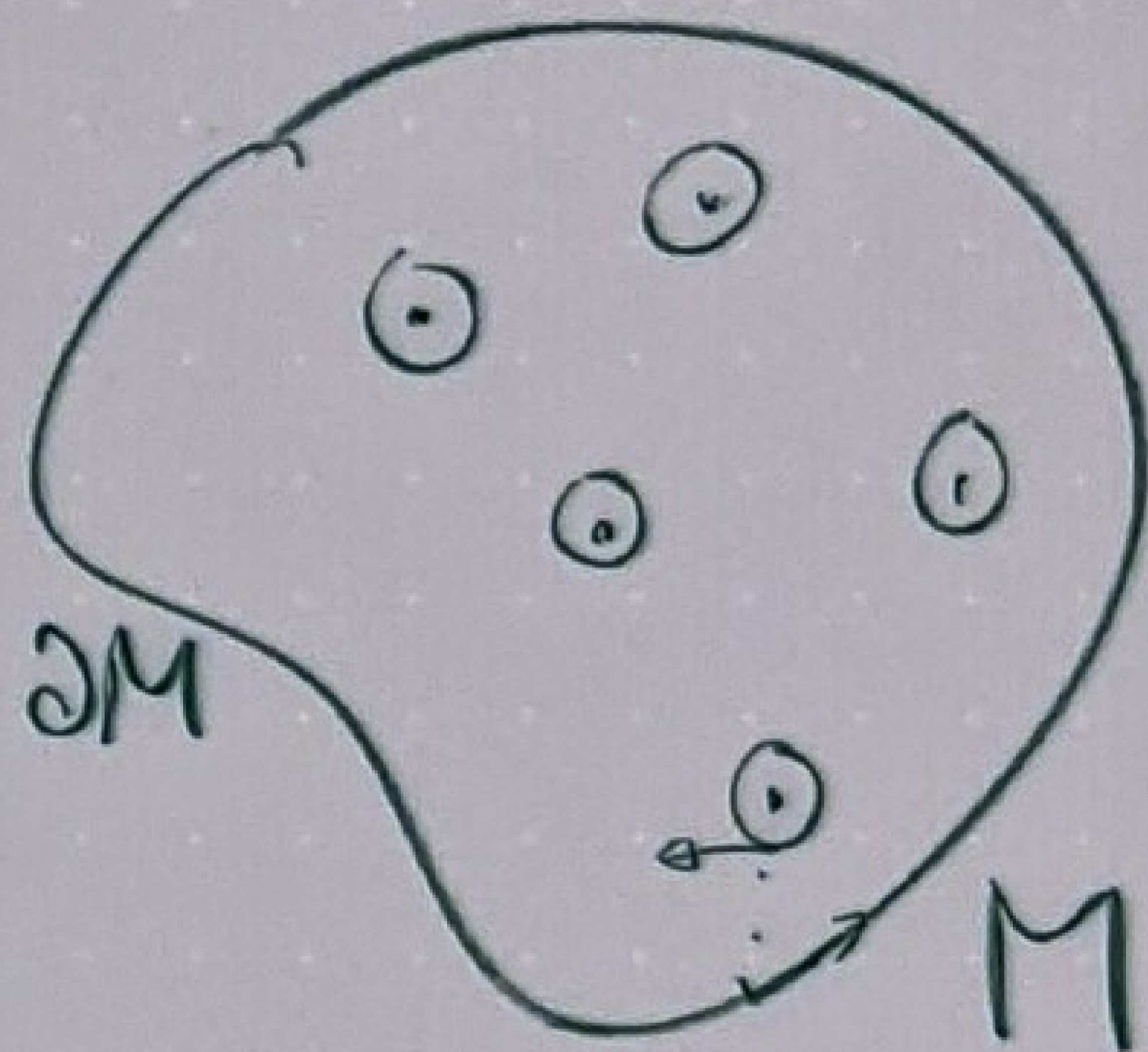
$f: M \setminus N \rightarrow \mathbb{C}$ holom.

stetig auf $\bar{M} \setminus N$

Dann:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial M} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \text{Res}(f; z_j)$$

③



Bew: $r > 0$ klein genug

$$\tilde{M} := M \setminus \bigcup_{j=1}^m \overline{B_r(z_j)}$$

f holom. auf $\tilde{M} \Rightarrow$

$$0 = \int_{\partial \tilde{M}} f(z) dz = \int_{\partial M} f(z) dz - \sum_j \int_{\partial B_r(z_j)} f(z) dz.$$

Merke

Zwei zentrale Zutaten:

$$\bullet f \text{ komplex diffbar} \Rightarrow \int_{\partial D} f(z) dz = 0$$

Stokes

$$\bullet \int_{\partial B_r(0)} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{-it}} \cdot (rie^{it}) dt$$
$$= i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

→ Cauchy-Int. Satz.

2023-11-20

(4)

Bem:

$$f(z) = z - z_0$$

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial B_r(z_0)} 1 dz$$

Cauchy //

$$2\pi i f(z_0) = 0$$

$$\int_{\partial B_r(z_0)} 1 dz = \int_0^{2\pi} 1 \cdot ire^{it} dt = 0$$

~

29. Varia

Mittelwertformel

Sei f holom. Dann

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

$f(z_0)$ ist der
Mittelwert seiner
Werte auf Kreislänge

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{\cancel{e^{it}}} \cancel{e^{it}} dt$$

Betrag: $|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt$

2023-11-20

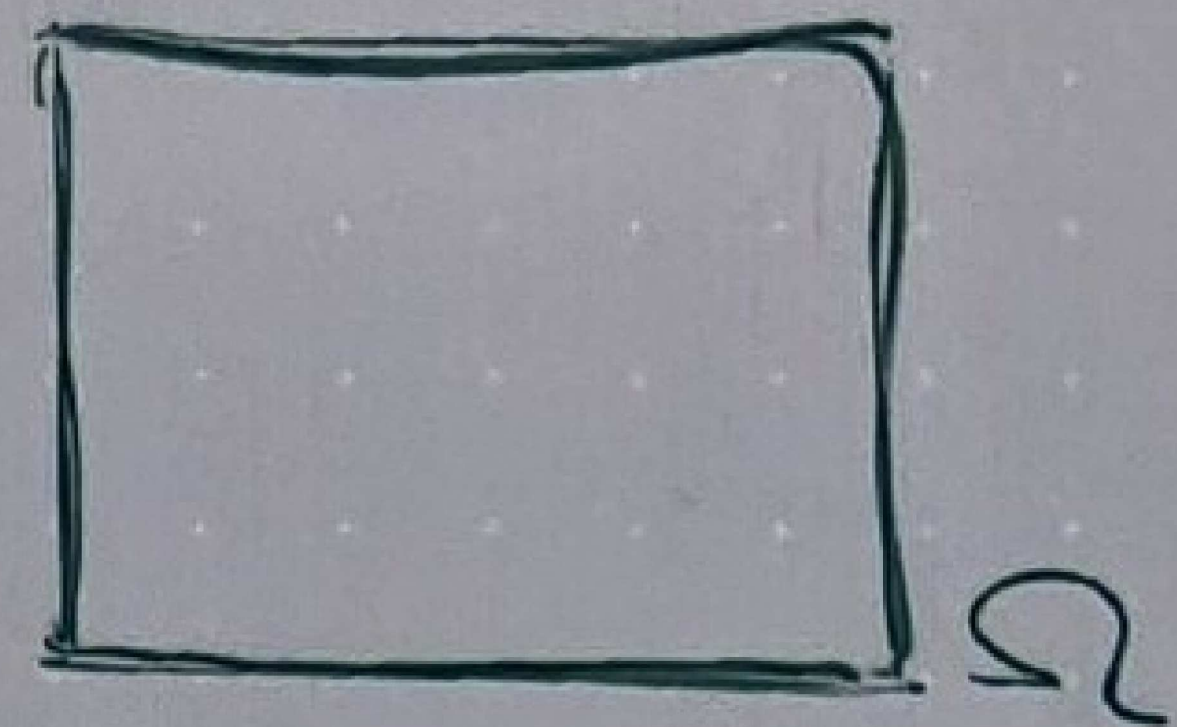
Also: $|f(z_0)| \leq \max_{z \in \partial B_r(z_0)} |f(z)|$ (5)

ein Maximumprinzip

Reelle Varianten: Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\Delta u = 0$
("harmonisch")

Dann: $u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\left(z_0 + r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\right) dt$
Mittelwerteigensch.

$$|u(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(z_0 + r \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix})| dt \leq \max_{z \in \partial B_r(z_0)} |u(z)|$$



$$u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\Delta u = 0$$

Temperaturverteilung

Allg. Potenz

$$z^w = ?$$

$$z = e^{\log z}$$

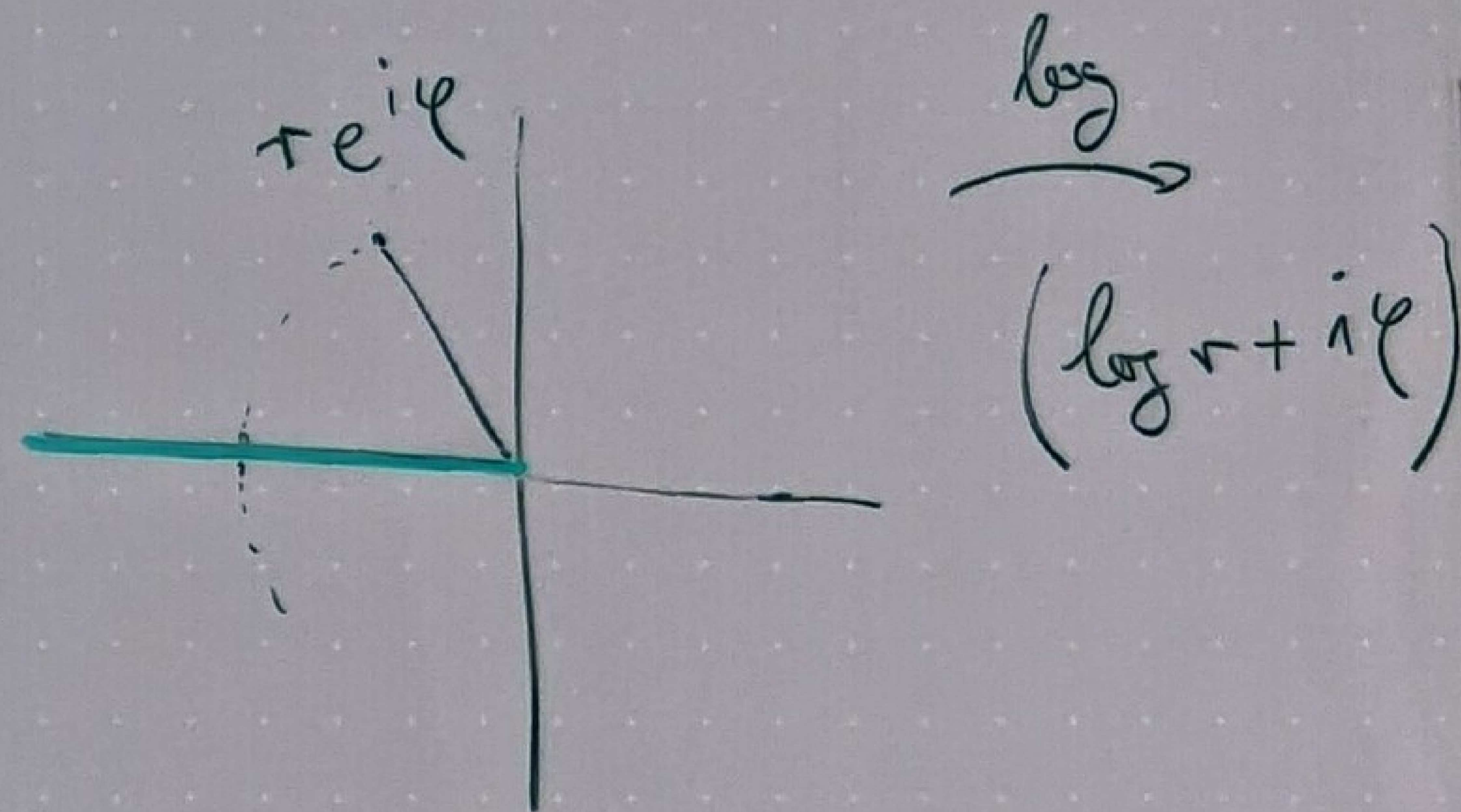
$$z, w \in \mathbb{C}$$

$$z^w := \exp(w \cdot \log z)$$

⑥

Warnung: Hängt von der Wahl von $\log$ ab!

z.B.:



Analytizität

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt
analytisch, falls

$$\forall z_0 \in \mathbb{R}^n \exists (a_k)_{k=0,1,2,\dots}$$

und $r > 0$: $\forall z \in B_r(z_0)$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit Konvergenz der Reihe

Bem: "f ist durch seine
Taylor-Reihe beschreiben"

Satz: Jede holomorphe Fkt.
ist analytisch.

Bem: Gilt auch umgekehrt.

Bew: Schätze $|f^{(k)}(z_0)|$ mit Cauchy-Formel ab $\square$

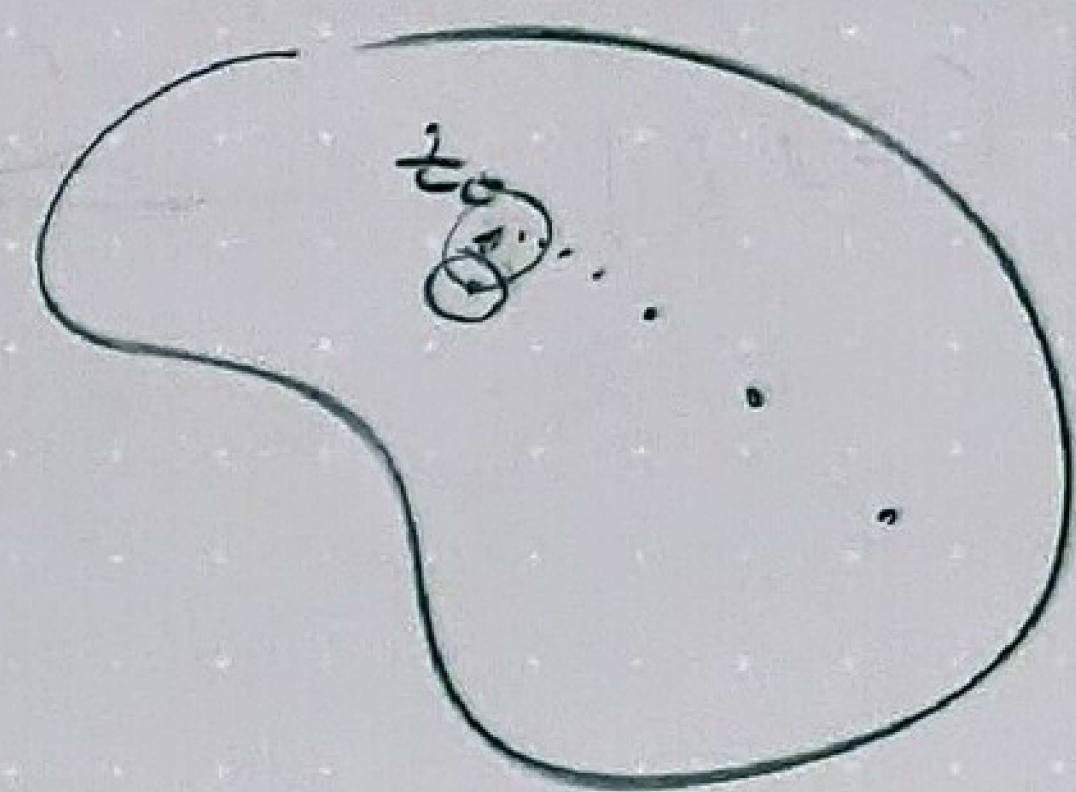
Identitätssatz

$D \subset \mathbb{C}$ offen, $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ holom.

Sei $(z_k)_k$ mit $z_k \in D \forall k$

$$z_k \neq z_l \forall k \neq l$$

$$\exists z_0 \in D: z_k \rightarrow z_0$$



Falls $f(z_k) = g(z_k) \forall k$

dann: $f = g$ auf D .

⑧

Beweisidee: $f(z_0) = g(z_0)$ wegen Stetigkeit

$$f'(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(z_k) - f(z_0)}{z_k - z_0} = g'(z_0)$$

"ebenso": höhere Abl.

$\leadsto$ Taylor-R. von $f =$ Taylor-R von g
 $f \stackrel{!}{=} g$

$\square$

Anwendung:

f, g holom. auf $\mathbb{C}$

$f = g$ auf $\mathbb{R} \Rightarrow f = g$ auf $\mathbb{C}$

$\leadsto \sin z$ ist durch $\sin x$
bestimmt

Laurent-Reihe

f mit Darstellung

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$$

heißt Laurent-Reihe.

⑨

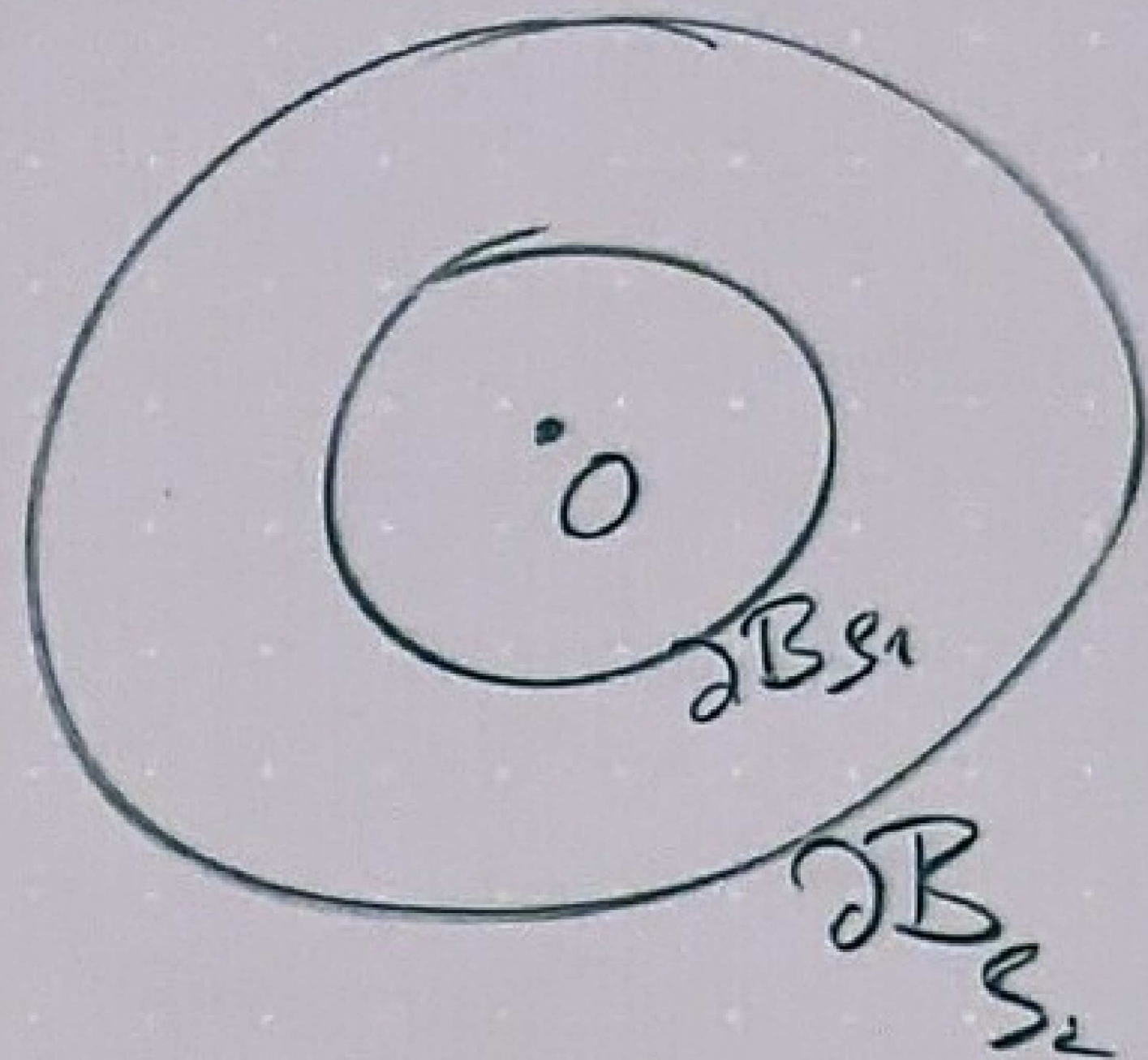
Fordere: Konvergenz auf
Kreisrängen

$$0 \leq s_1 < s_2 \leq \infty$$

$$\sum_{k \geq 0} a_k z^k \quad \text{konv. auf } B_{s_2} \setminus B_{s_1}$$

und $\sum_{k < 0} a_k z^k \quad \text{---||---}$

Bild: s_2 ist Konv. rad. für $(a_k)_{k \geq 0}$
 s_1 ist wie $\frac{1}{\text{Konv. rad.}}$ zu $(a_k)_{k < 0}$



Triv. Bsp:

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z$$

$$\text{Res}(f; 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} f(z) dz = a_{-1}$$

Das a_{-1} in der Laurent-R. ist das Residuum

Laurentreihen

$$f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$$

$$= \dots + a_{-2} z^{-2} + a_{-1} z^{-1} + a_0 +$$

$$a_1 z^1 + a_2 z^2 + \dots$$

Ziel: Finde zu f die $(a_k)_k$

Wichtig: $a_{-1} = \text{Res}(f; 0)$

Identitätssatz

holomorph $\Leftrightarrow$ analytisch

$$z_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} z_0 \in D,$$

alle z_k versch. von z_0

D offen

$$f: D \rightarrow \mathbb{C}$$

holom.

Dann ist f durch die $f(z_k)$ unid. bestimmt

$$f(z_0) = \lim_k f(z_k) \quad (\text{da } f \text{ stetig}) \quad (2)$$

$$f'(z_0) = \lim_k \frac{f(z_k) - f(z_0)}{z_k - z_0} \quad (\text{Def. der Abl.})$$

$$\text{Taylor: } f(z_k) = f(z_0) + f'(z_0)(z_k - z_0)$$

$$\Rightarrow f''(z_0) = 2 \lim_k \frac{f(z_k) - f(z_0) - f'(z_0)(z_k - z_0) + \frac{1}{2} f''(z_0)(z_k - z_0)^2 + o(|z_k - z_0|^2)}{(z_k - z_0)^2}$$

Bem:

$$g(x) = o(|x|^2) : \Leftrightarrow \left| \frac{g(x)}{|x|^2} \right| \rightarrow 0 \text{ für } |x| \rightarrow 0$$

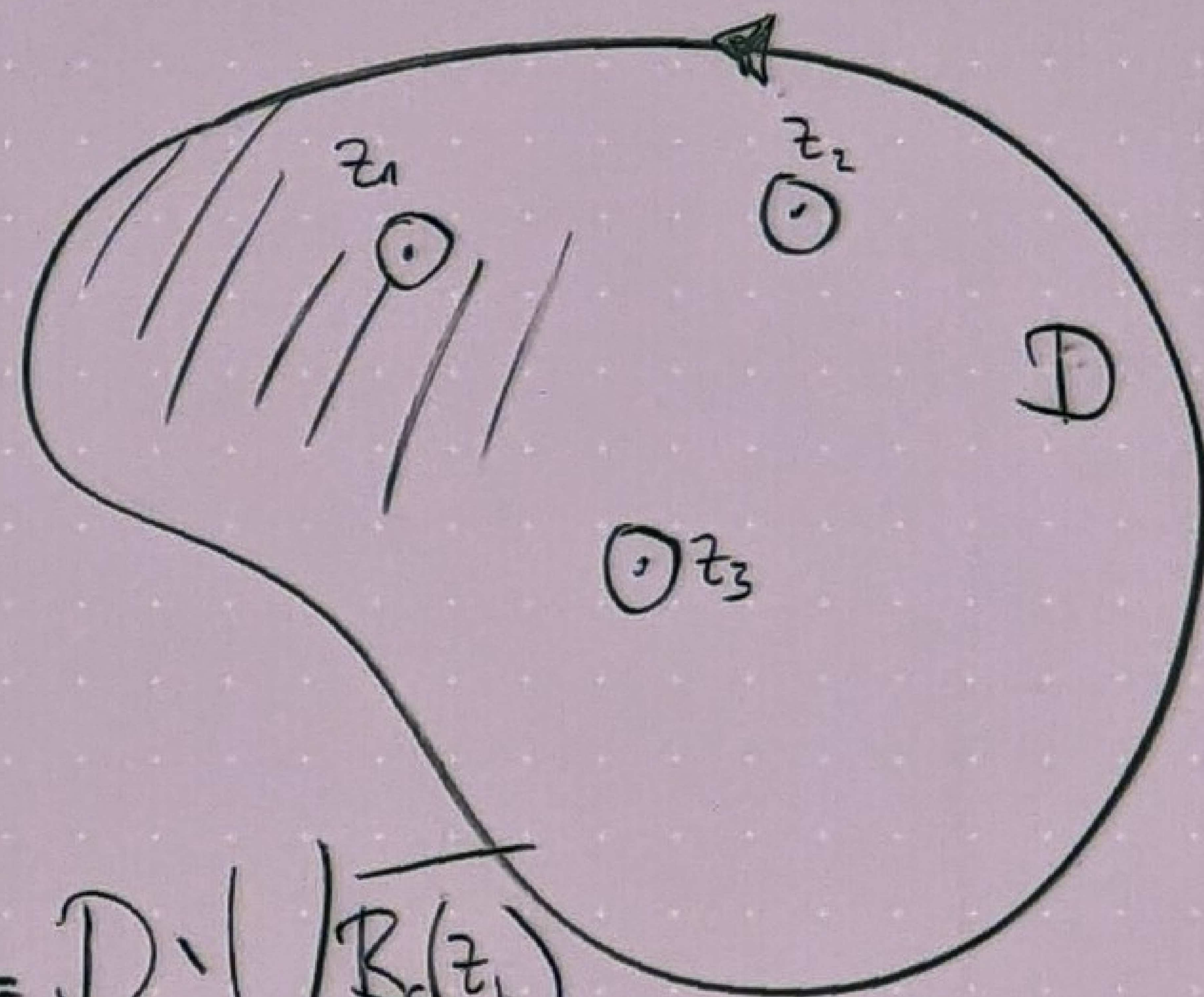
Bonus: $f^{(k)}(z_0)$

3

Ab jetzt Thema: Residuensatz & Anwendungen

Erinnerung: $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f = \sum_{k=1}^K \text{Res}(f; z_k)$

z_k Polstellen
von f



Bew: $\tilde{D} := D \setminus \bigcup_k \overline{B_\varepsilon(z_k)}$

f holom. in $\tilde{D} \Rightarrow \int_{\partial \tilde{D}} f = 0$ (Stokes)

Frage: Wie berechnet man
Residuen??

$$1.) \quad f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}, \quad g \text{ hol.}$$

$$\text{Res}(f; z_0) = g(z_0)$$

Cauchy-Int.satz

$$2.) \quad f(z) = \frac{5}{z^2} + \frac{7}{z} + g$$

$$\text{Res}(f; 0) = 7$$

$$3.) \quad f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k z^k$$

$$\Rightarrow \text{Res}(f; 0) = a_{-1}$$

4.) Warning:

$$\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} = \frac{z+3}{z^2}$$

Zähler $\neq 0$ in $z=0$

Nenner ist z^2 (Pol 2. Ordnung) $\left. \begin{array}{l} \text{Zähler} \neq 0 \text{ in } z=0 \\ \text{Nenner ist } z^2 \text{ (Pol 2. Ordnung)} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Res} = 0$

(4)

Hier: $\text{Res}\left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2}; 0\right) = 1$

Satz (Rechenmethode Residuen)

Sei f mit Pol der Ord. $m > 0$ in z_0

Dann
$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{m-1} ((z-z_0)^m f(z))$$

Bew: $g(z) := (z-z_0)^m f(z)$ holomorph
(nach geeigneter Fortsetzung von g)

Dann: $g(z) = g(z_0) + g'(z_0)(z-z_0) + \frac{1}{2}g''(z_0)(z-z_0)^2 + \dots + \frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(z_0)(z-z_0)^{m-1} + \dots$ ⑤

$$\Rightarrow f(z) = \frac{g(z_0)}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{\frac{1}{(m-1)!}g^{(m-1)}(z_0)}{z-z_0} + \dots$$

Zähler = Res



Def (Singularitäten):

Sei $f: D \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$
holom.

z_0 heißt

(a) hebbare Singularität, falls

$\exists \tilde{f}: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph

$$\tilde{f}|_{D \setminus \{z_0\}} = f.$$

Bsp: $f(z) = \frac{z - z_0}{z - z_0}$

(b) Pol der Ordnung $m > 0$

falls $f(z)(z - z_0)^m$ hat

(m minimal)

hebbare Sing. in z_0

(c) wesentliche Singularität

sonst

Bsp: $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k}$

⑥

Bem: In $\mathbb{R}$ ist diese
Klassifikation nicht sinnvoll

Bsp: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} & x > 0 \\ \frac{1}{x^4} & x < 0 \end{cases}$

Welche Ordnung hat der Pol?

In $\mathbb{C}$:

Falls $|z - z_0|^m |f(z)|$

beschr.

$\Rightarrow f$ hat höchstens
Pol der Ordn. m .

(ohne Gewähr)

Berechnung ^{reellen} von Integralen

Beispiel 1: $* := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$

Bem: $\frac{1}{1+x^2} = \arctan'$

$$\Rightarrow * = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

1. Schritt:

$*$ ist auch C-Liniintegral

$$T := \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$$* = \int_T \frac{1}{1+z^2} dz$$

$\uparrow$
 $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto t$
Parametris. von T

2. Schritt: Modifiziere T

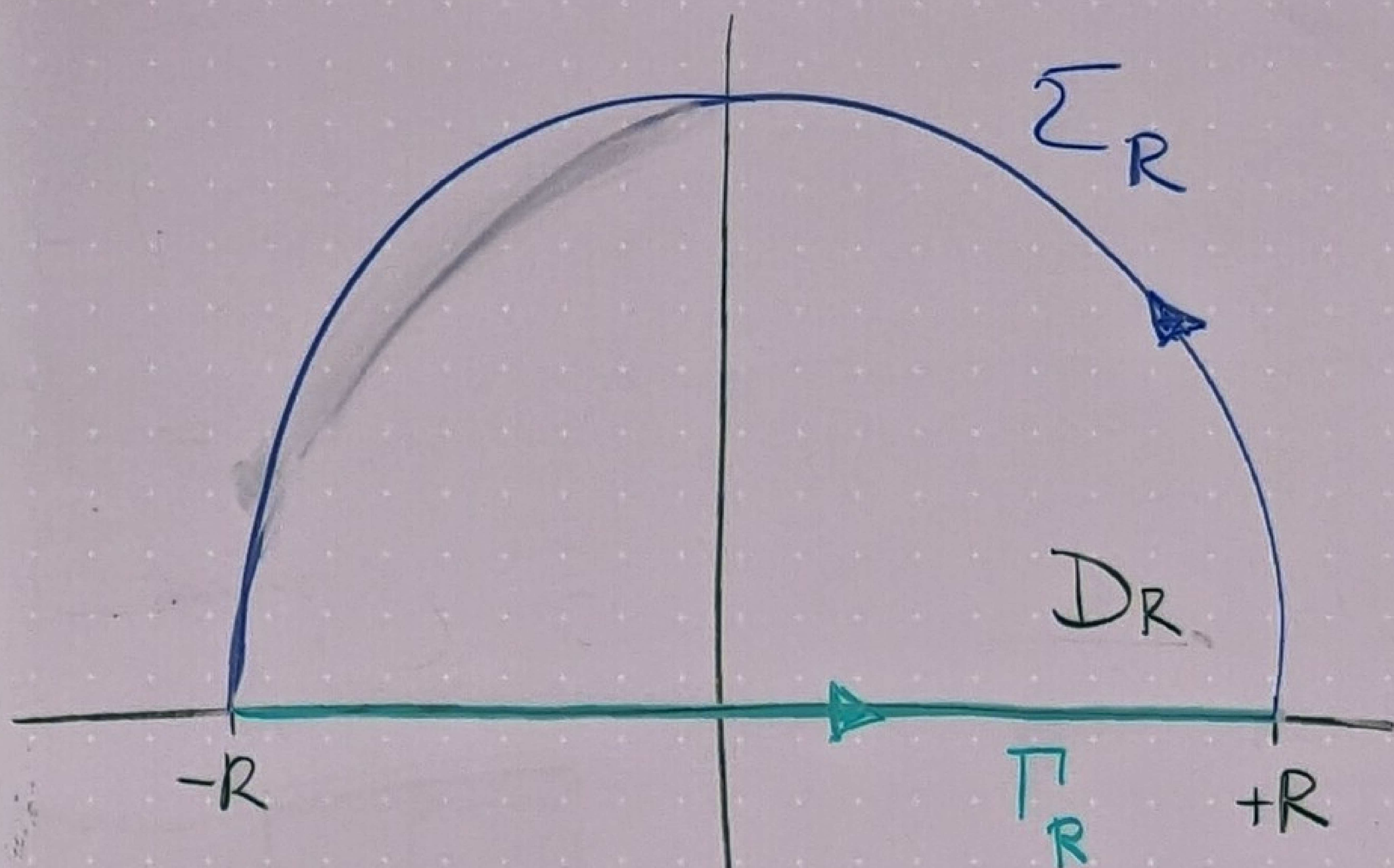
$$* = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz$$

$$\Gamma_R = (-R, R)$$

$$\text{da } \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{|z|^2}$$

$$\text{und } \int_R^\infty \frac{1}{x^2} dx \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

3. Schritt: SchlieÙe den Weg



$$\Sigma_R := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| = R\}$$

Parametr.: $\gamma(t) = Re^{it}, t \in (0, \pi)$

$$D_R := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > 0, |z| < R\}$$

$$\partial D_R = \overline{\Gamma}_R \cup \Sigma_R$$

Frage: $\int_{\Gamma_R} \approx \int_{\partial D_R} \quad ??$

oder äquivalent:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Sigma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 0 \quad ?$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_0^\pi \frac{1}{1+(Re^{it})^2} \cdot$$

$$| \leq \int_0^\pi \underbrace{\left| \frac{1}{1+R^2 e^{2it}} \right|}_{\leq \frac{1}{R^2-1}} \underbrace{|iRe^{it}|}_{=R} dt$$

$$\leq \pi \frac{1}{2R}$$

$$\begin{aligned} & R \text{ groß} \\ \Rightarrow R^2 - 1 & \geq \frac{1}{2} R^2 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$iRe^{it} dt$$

$$g: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$|\int g| \leq \int |g|$$

Also:

$$* = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial D_R} \frac{1}{1+z^2} dz$$

4. Schritt Berechne $\int_{\partial D}$ mit
Residuensatz

$$1+z^2 = 0 \iff z = \pm i$$

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

Pole in D_R : $+i$

$$\frac{1}{1+z^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{z+i}\right) \text{ hol. in } D_R}{z-i}$$

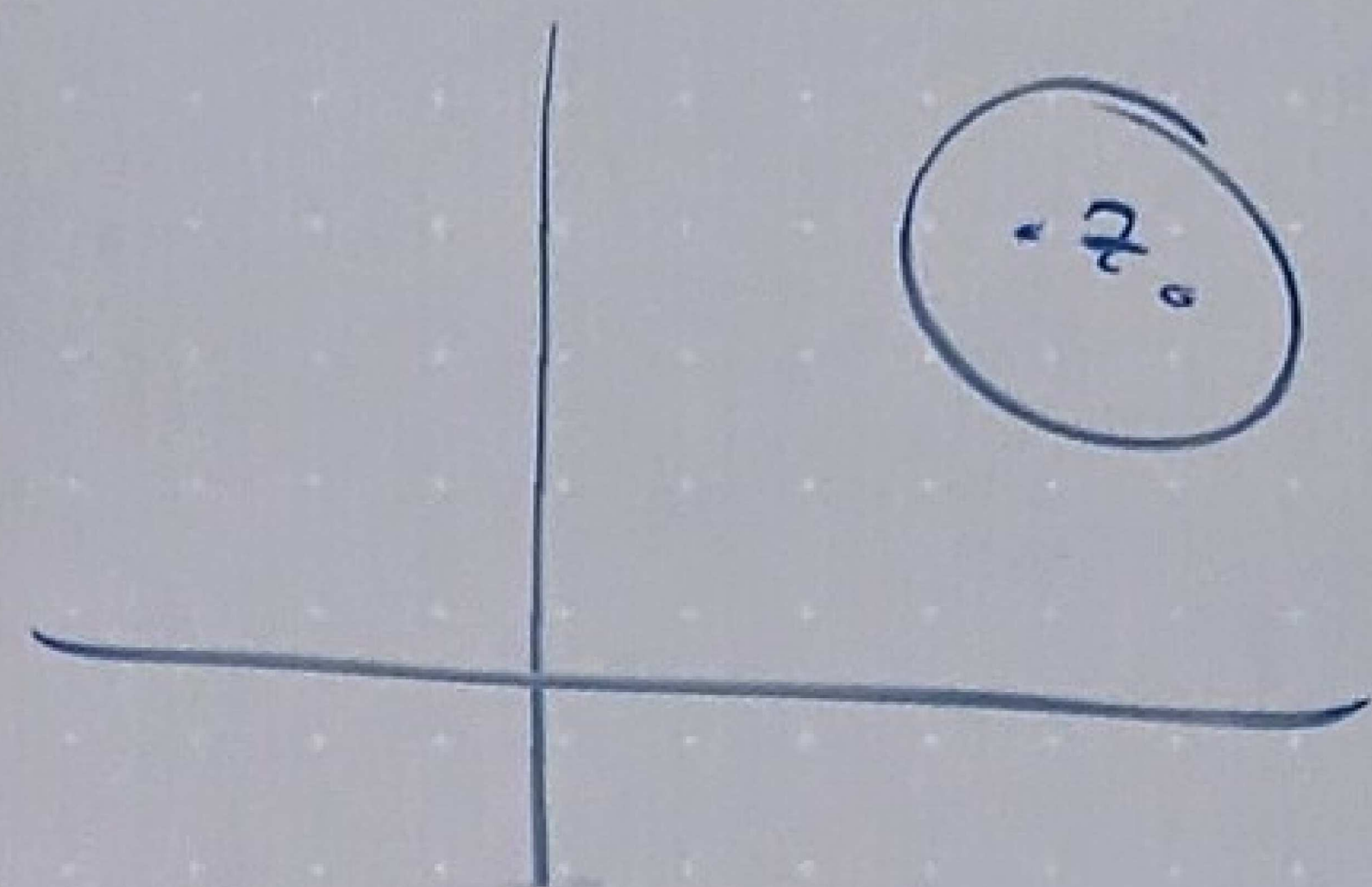
Cauchy-Int. set: $\text{Res}\left(\frac{1}{1+z^2}; +i\right) = \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} = \frac{1}{2i}$

$$\int_{\partial D_R} \dots = 2\pi i \text{Res}(\dots; +i) = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi$$



Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$



Res. Satz:

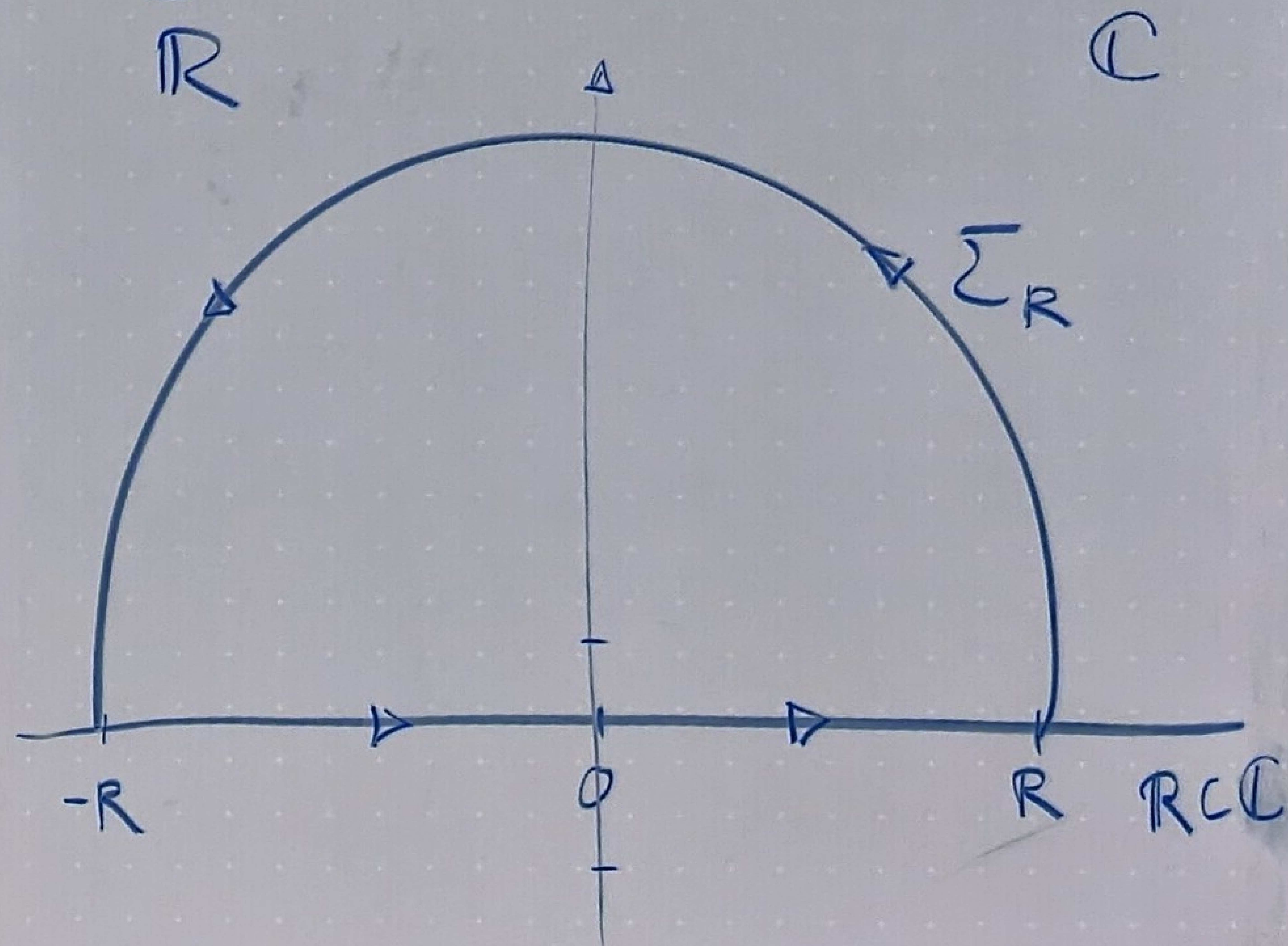
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} f = \sum_{j=1}^n \text{Res}(f; z_j)$$

z_j Singular.

Bsp 1

①

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = ?$$



$$\left| \int_{\Sigma_R} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\underbrace{o(1)}_{\Sigma_R - \text{Int.}} + 2\pi i \underbrace{\left[\text{Res} \right]}_{\substack{\text{Einzigster Pol} \\ \text{in } D: \\ z_0 = i}} \right]$$

$$\Rightarrow \int = \pi$$

2023-11-27

②

Beispiel 2

$$* = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\sin^2 x} dx$$

Zunächst nur formal:

$$z = e^{ix}$$

$$z \in \{|z|=1\}$$

$$\frac{dz}{dx} = e^{ix} \cdot i \quad \leadsto \quad dz = iz dx$$

$$\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

$$= \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

Beh:

$$\oint_{\{|z|=1\}} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right)^2} \frac{dz}{iz}$$

(Standard-Param.)

Bew: Betrachte r.S., parametrisiere mit

$$[0, 2\pi) \ni x \xrightarrow{\gamma} e^{ix} \in \{|z|=1\} \quad \square$$

③

Berechne Integral mit
Res.-Satz

$$\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{1}{zi} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{z}$$

$$= \frac{z}{z^2 \left[1 - \frac{1}{4} \left(z^2 - 2 + \frac{1}{z^2}\right)\right]}$$

(4)

$$= \frac{4z}{4z^2 - z^4 + 2z^2 - 1}$$

$$= \frac{-4z}{z^4 - 6z^2 + 1}$$

p-q-Formel für z^2

$$\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{z} (6 \pm \sqrt{36 - 4})$$

$$= 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Pole in $\pm \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ (nicht im Einheitskreis)
 $\pm \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ (im Einheitskreis)
 $\nwarrow z_1, z_2$

$$* \quad \underline{\text{Res. Satz}} \quad \frac{1}{i} \cdot 2\pi i \sum_{z \in \{z_1, z_2\}} \text{Res}(\quad; z)$$

$$= 2\pi \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \pi$$

2023-11-27

Beispiel 3

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega x}}{x} dx = ??$$

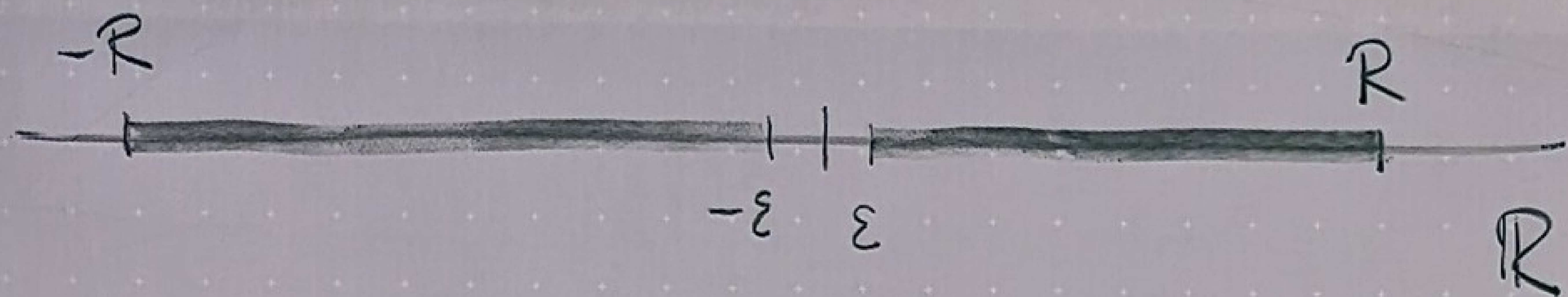
Existiert im klassischen Sinn nicht.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$

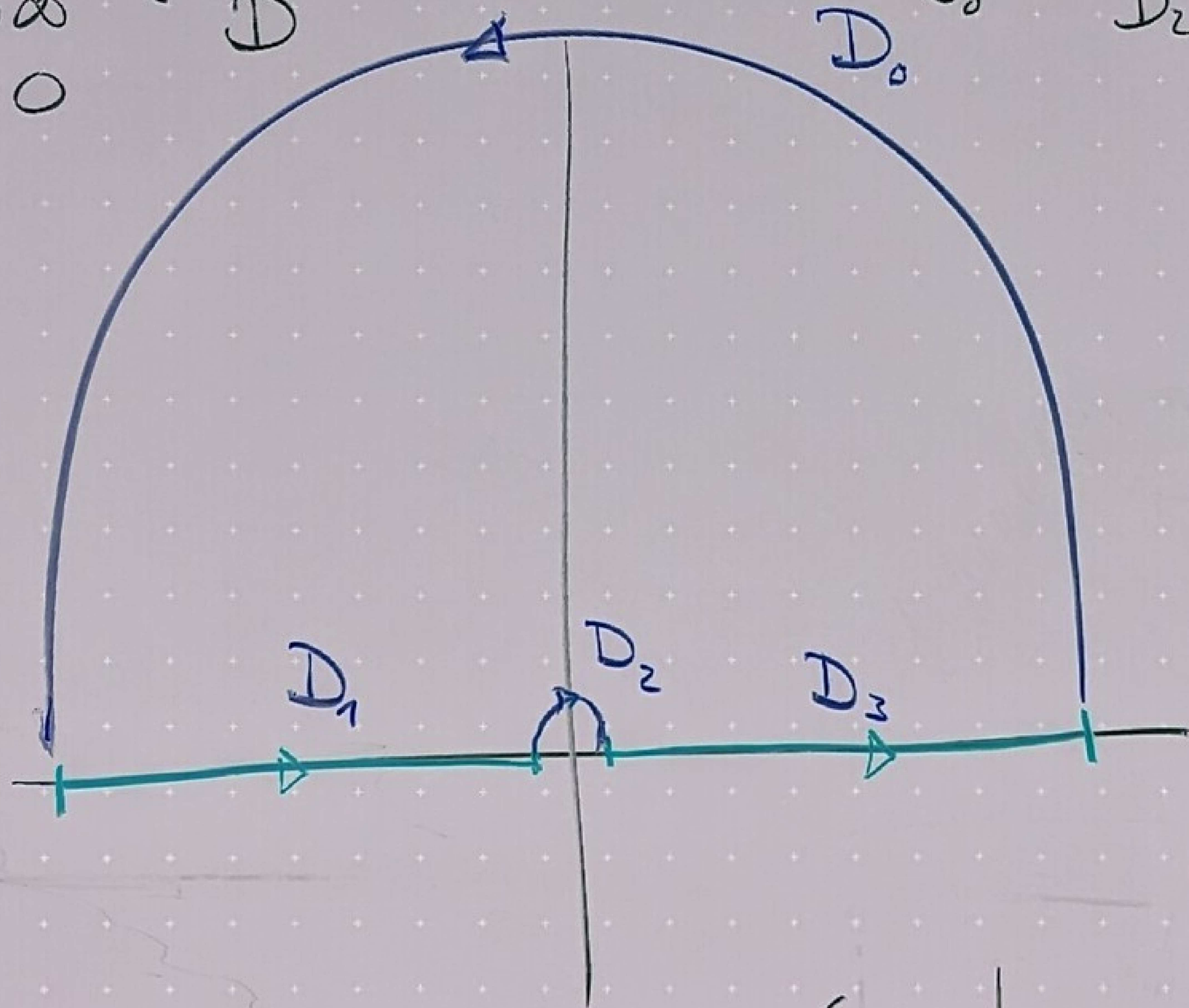
Stattdessen: Cauchy-Hauptwert

$$\text{CH} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega x}}{x} dx := \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \underbrace{\int_{-R}^{\varepsilon} \frac{e^{i\omega x}}{x} dx}_{\sim D_1} + \underbrace{\int_{\varepsilon}^R \frac{e^{i\omega x}}{x} dx}_{\sim D_2} \right\}$$

(5)



$$= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_D \frac{e^{i\omega z}}{z} dz - \int_{D_0} \dots - \int_{D_2} \dots \right\}$$



D Gesamtweg

Also $\text{CH} = i\pi$ (für $\omega > 0$)

2023-11-27

⑥

$$D\text{-Integral} = 0$$

$$D_0\text{-Integral} \xrightarrow{R, \varepsilon} 0$$

D_2 -Integral:

$$\int_{D_2} \frac{e^{i\omega z}}{z} dz = - \int_0^\pi \frac{\exp(i\omega \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \cdot i\varepsilon e^{it} dt$$

$$z = \varepsilon e^{it} \quad t \in [0, \pi]$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -i \int_0^\pi 1 dt = -i\pi$$

Reelle Version: $\text{Im}(\dots)$

$$\text{CH} \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin \omega x}{x} dx = \begin{cases} \pi & \omega > 0 \\ -\pi & \omega < 0 \end{cases}$$

$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}, \quad \int \text{sinc} = 1$$

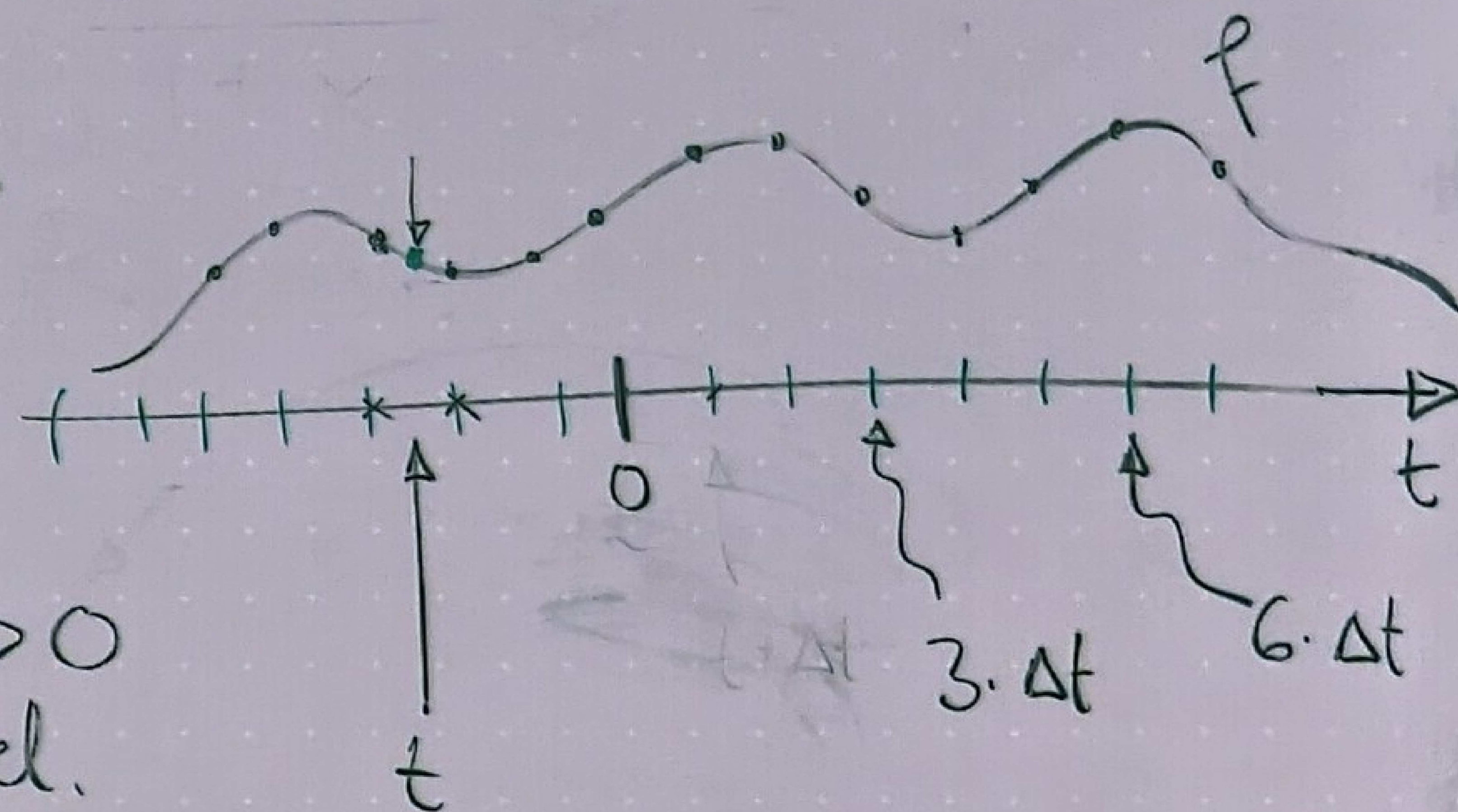
Später: Falls $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ geeignet
(beschr. Bandbreite)

Dann: $\forall t: f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k \Delta t) \text{sinc}\left(\frac{t - k \Delta t}{\Delta t}\right)$

(7)

$\omega > 0$

$\omega < 0$



$\Delta t > 0$
bel.

→ Digital-Analog-Wandler

