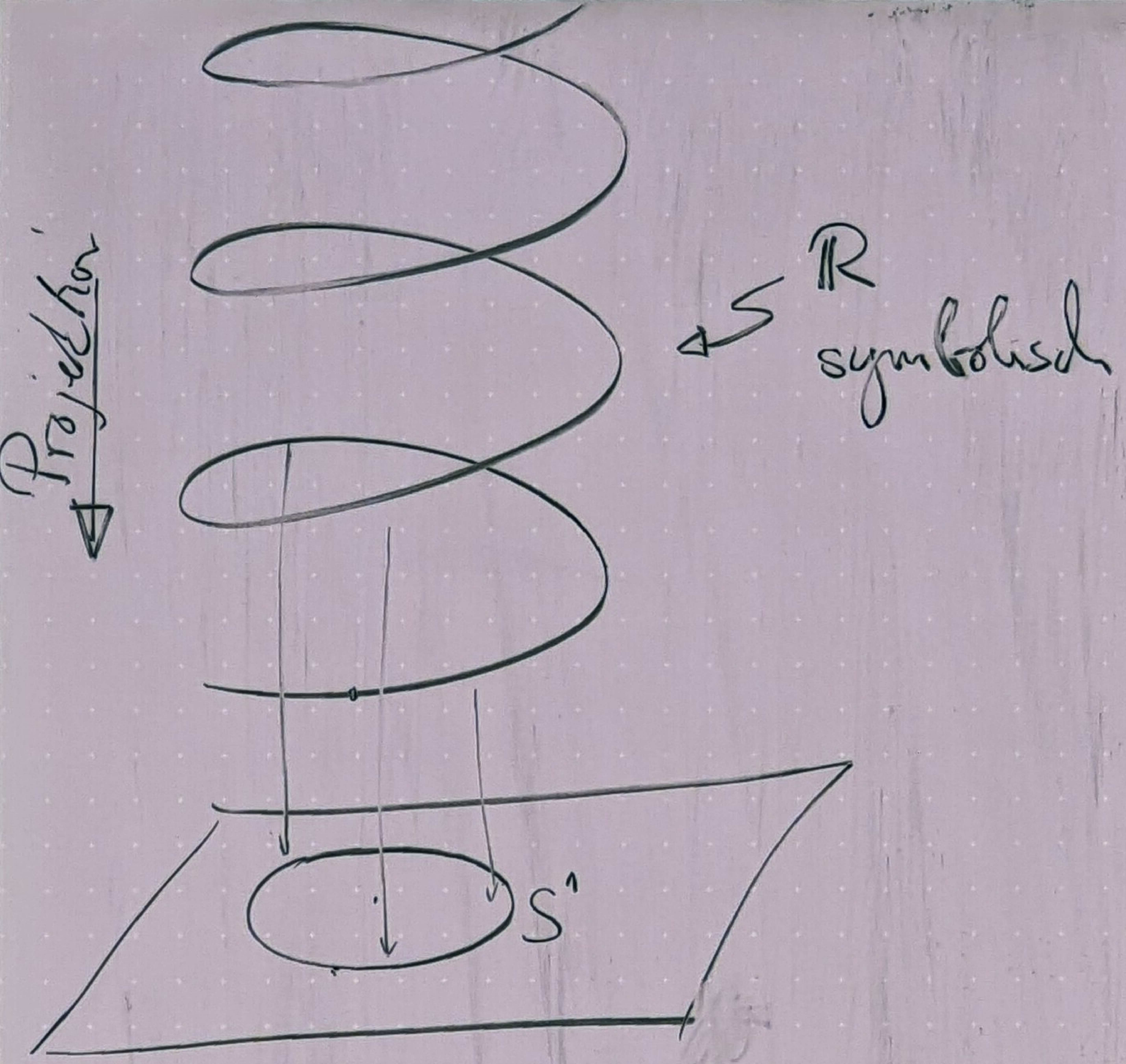


2023-11-08

Ab jetzt wieder konkreter ...

Def. von exp elementar:

$$z = x + iy$$

$$\exp(z) = \exp(x+iy)$$

$$= \exp(x) \cdot \exp(iy)$$

$$= e^x \left(\cos y + i \sin y \right)$$

Erinnere:

$$\log(z) = (\log|z|) + i \arg(z)$$

Periodizität:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z$$

exp ist $2\pi i$-Periodisch

2023-11-08

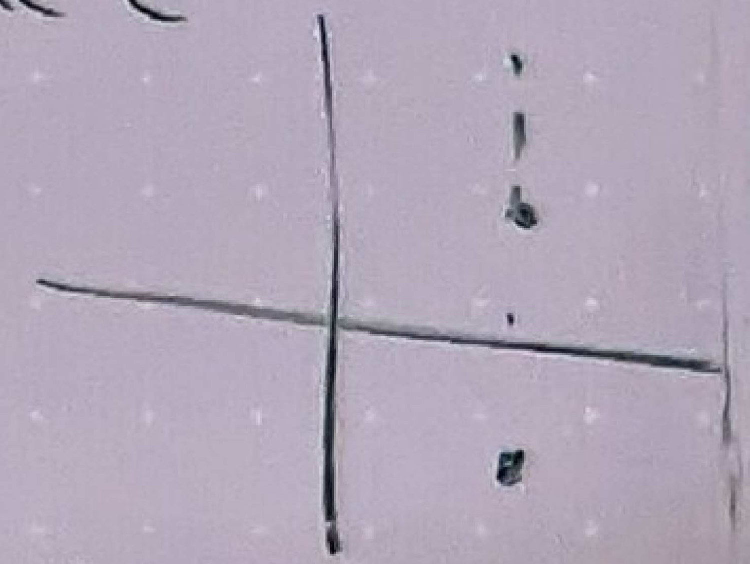
Neue holomorphe Fkt.

4

$$\sin(z) := \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

$x = z \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{ix} + e^{-ix} = 2 \operatorname{Re} e^{ix}$

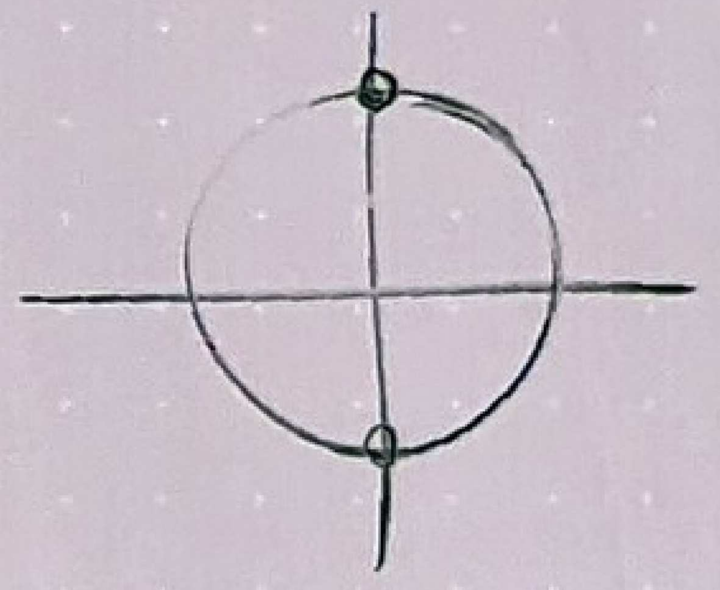


Es folgt:

- sin & cos sind 2π-per.

- $\sin'(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} \cdot i - e^{-iz}(-i)\right)$

  $= \cos(z)$

  und $\cos' = -\sin$

- $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} \cdot \underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} - e^{-iz}\underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i}\right) = \cos(z)$

2023-11-08

Weitere Fkt.:

$$\cosh(z) := \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

Es gilt:

$$\sinh'(z) = \cosh(z)$$

$\vdots$

$$|\sin(z)| = \frac{1}{2}\left|e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}\right|$$

$z = x + iy$

Für $y \longrightarrow +\infty$:

$$e^{y} \longrightarrow \infty, \quad e^{-y} \longrightarrow 0$$

Also $$|\sin z| \sim \frac{1}{2}\left|e^{-ix}e^{y}\right|$$

$$= \frac{1}{2}e^{y}$$

Merke: Für $\operatorname{Im} z \longrightarrow \infty$ gilt $|\sin z| \sim \frac{1}{2}e^{\operatorname{Im} z}$

2023-11-08

sin ist unbeschränkt auf $\mathbb{C}$.

Bemerkung: Nicht-holomorphe Fkt.

1) $z \longmapsto \operatorname{Re} z$, $z \longmapsto \operatorname{Im} z$

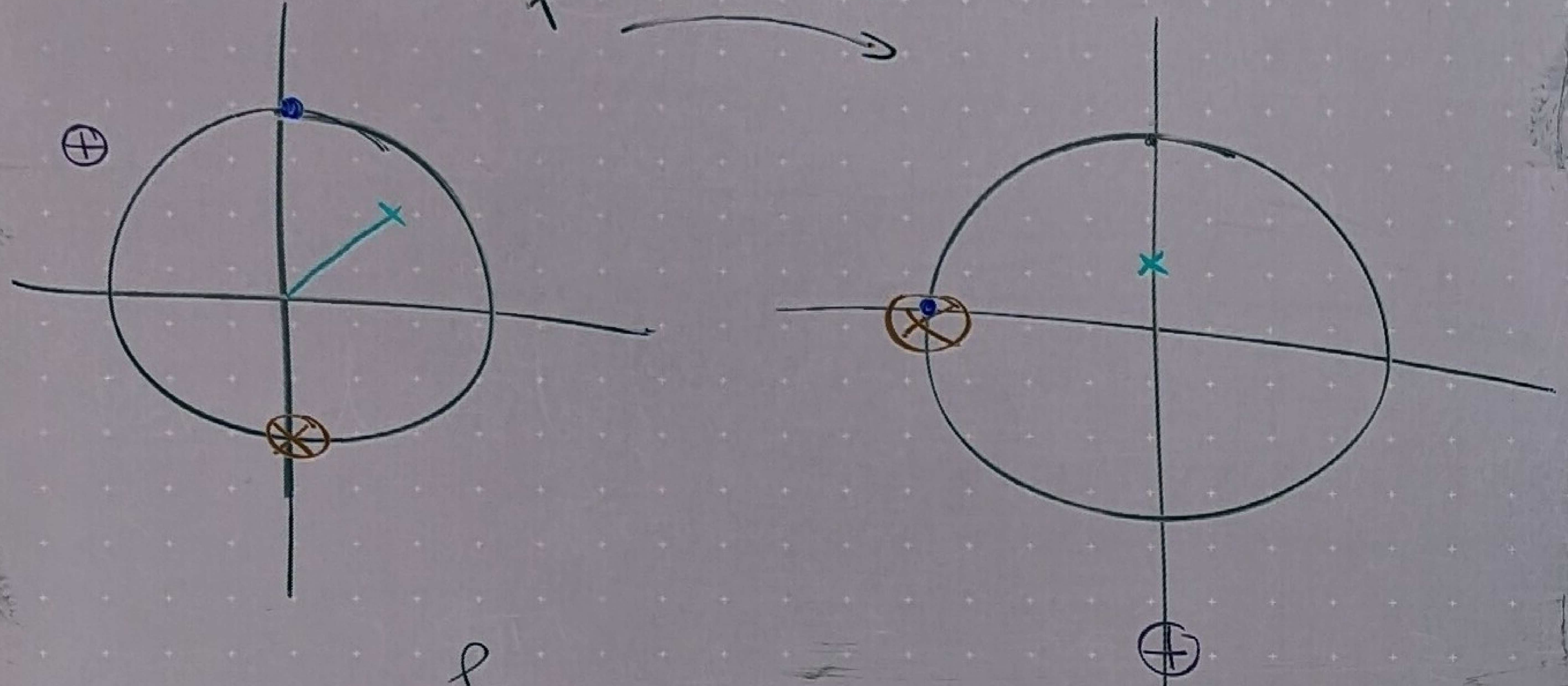
2) $z \longmapsto |z|$, $z \longmapsto |z|^2$

3) $z \longmapsto \bar{z}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nicht schiefs.

Wurzelfunktionen

$f: z \mapsto z^2$



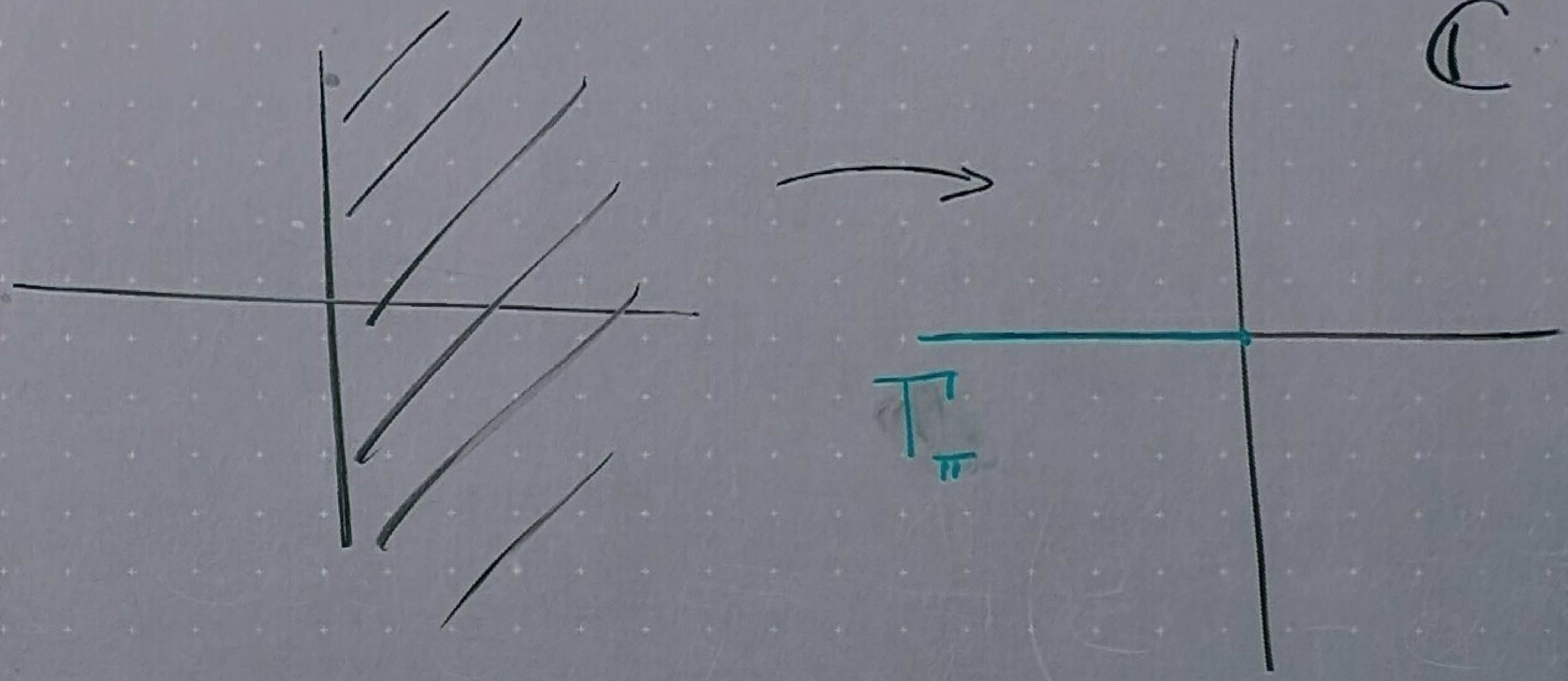
$(x+iy) \overset{f}{\longmapsto} (x^2-y^2) + i(2xy)$

$re^{i\phi} \xrightarrow{f} r^2 e^{2i\phi}$

Betrag quadriert, Argument verdoppelt

2023-11-08

$z \mapsto z^2$ bijektiv als Abb



$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi$

Inverse ist (eine) Wurzelfunktion

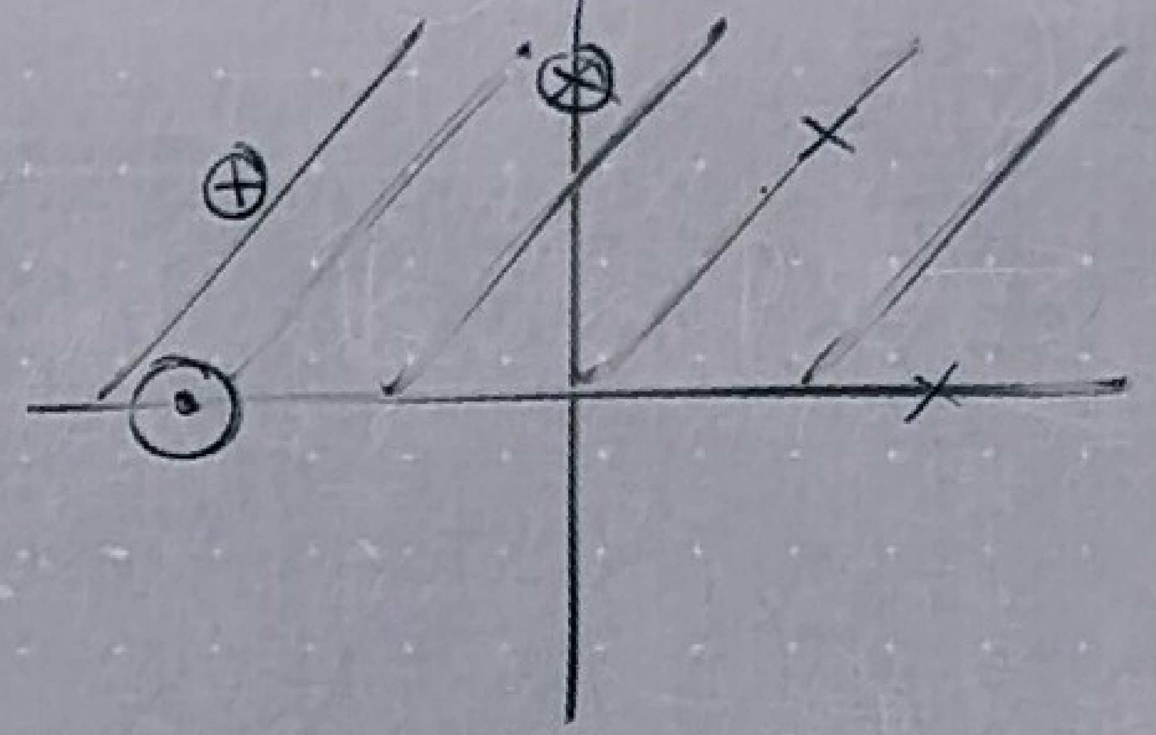
$$\sqrt{} : \mathbb{C} \setminus T_\pi \longrightarrow \{ z \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \}$$

$$z \longmapsto w \text{ mit } w^2 = z$$

Es gibt andere Wurzeln (wie bei: -1 ist Lsg von $x^2 = 1$)

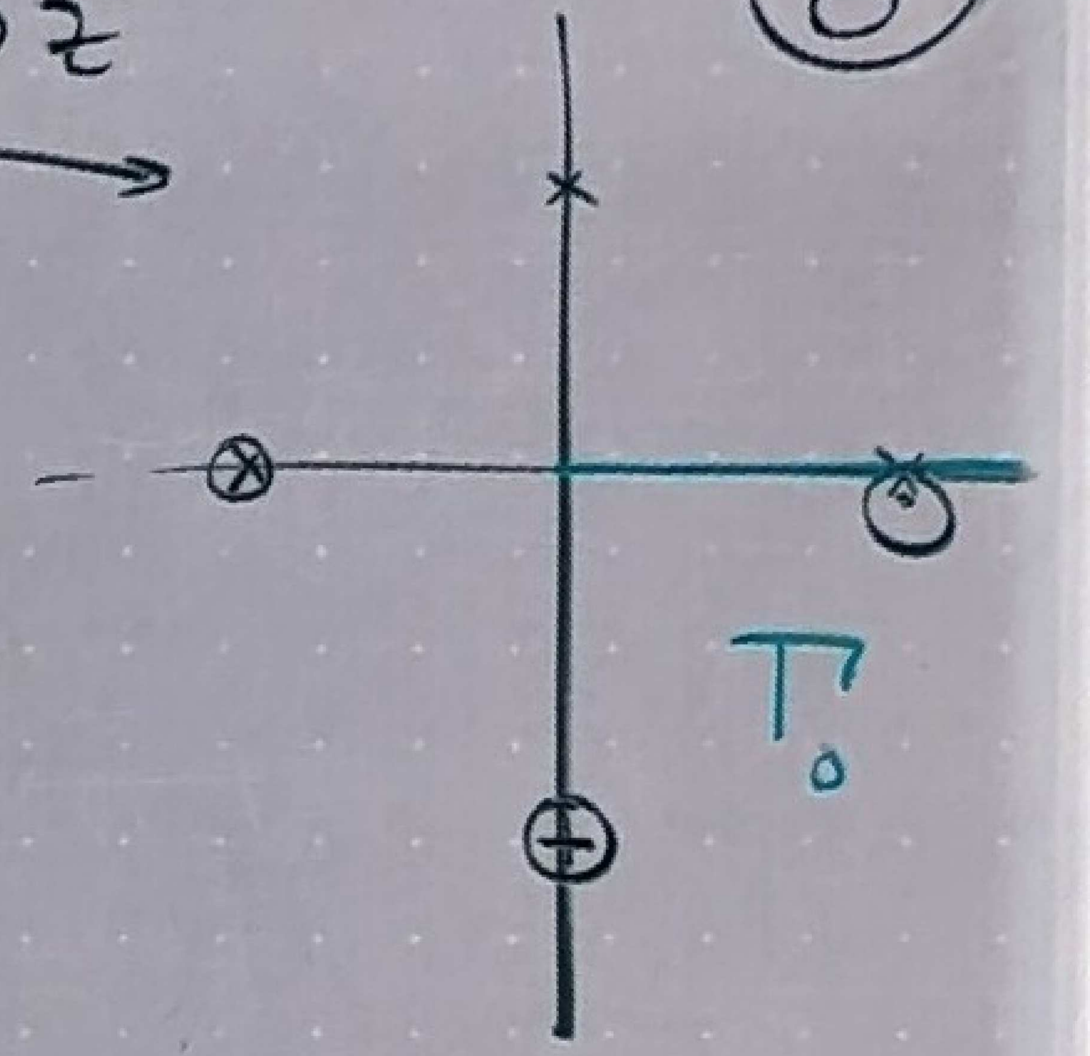
Also: $+1$ ist nicht die einzige Lsg.

In $\mathbb{C}$:



$\{ z \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$

$z \mapsto z^2$



$\sqrt{}$

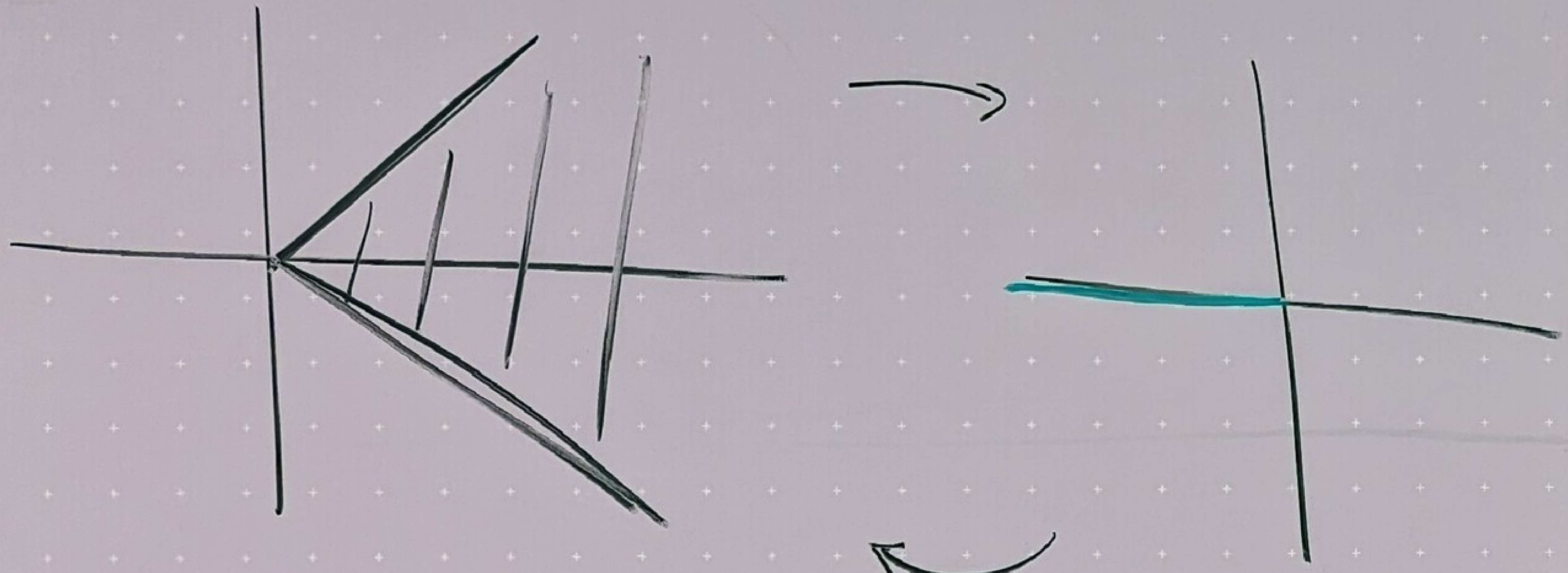
(eine andere Wurzelfkt.)

2023-11-08

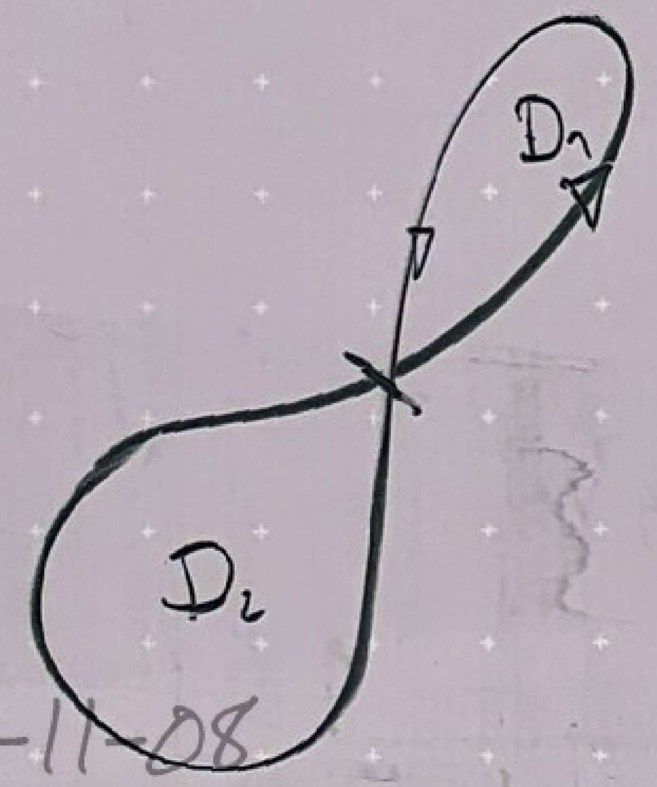
n-te Wurzeln

$$z \longmapsto z^n$$

$n = 4$ $\qquad$ $n \in \mathbb{N}$



$$\sqrt[4]{\ }$$



2023-11-08

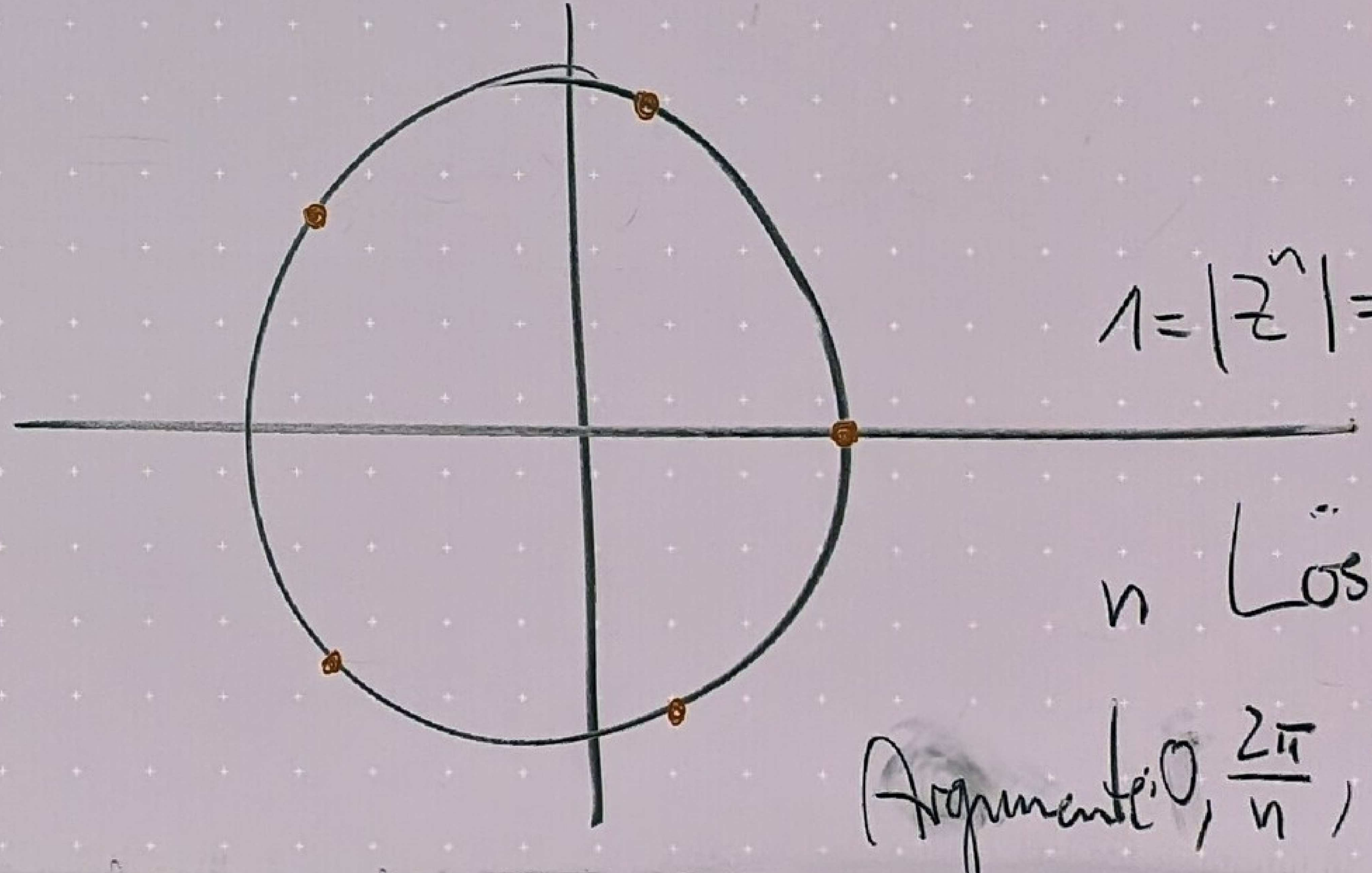
9

Wieder: Es gibt viele Wurzelfkt.

Bsp: Einheitswurzeln

Lösungen von $z^n = 1$

$(n \in \mathbb{N})$



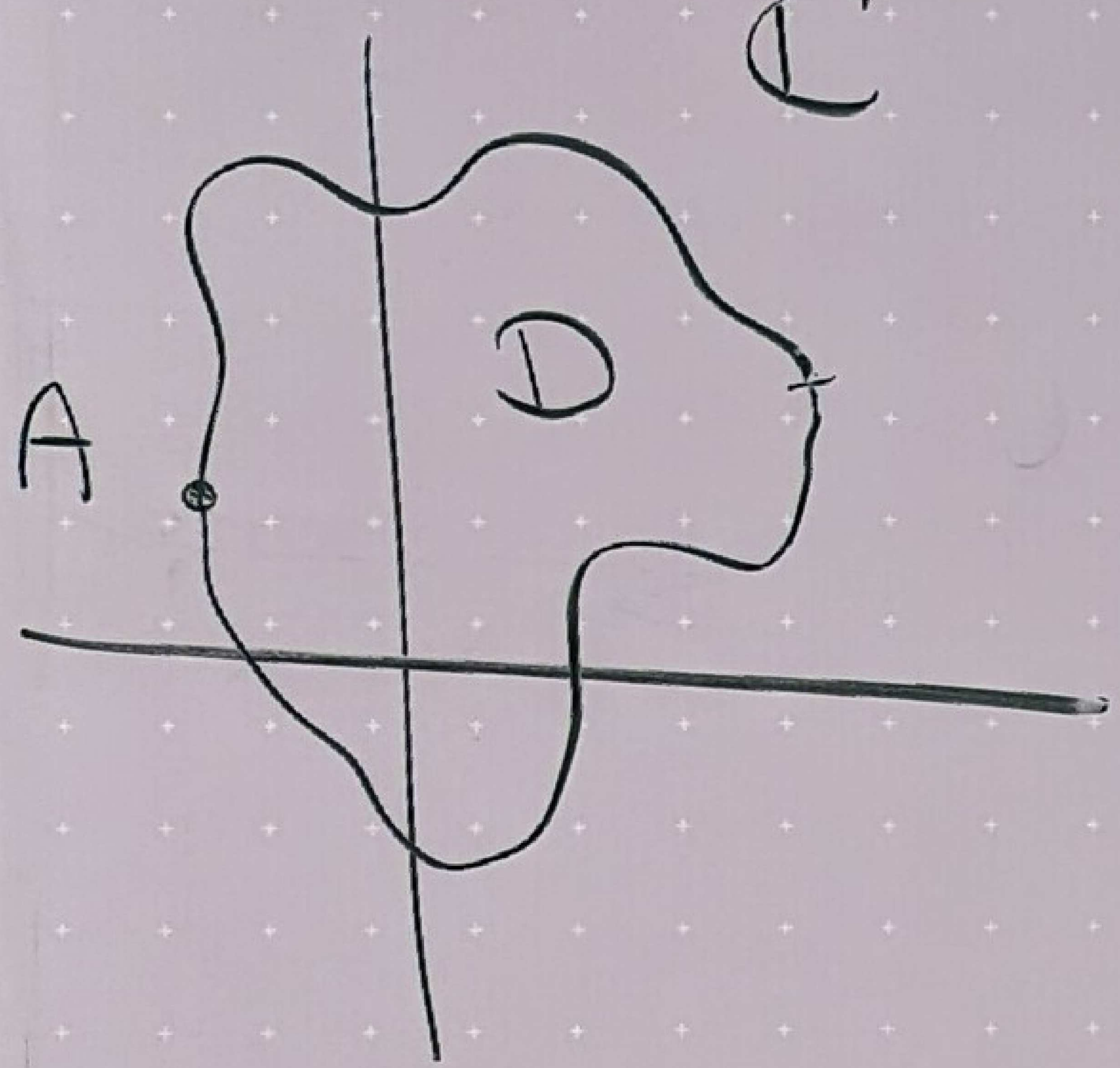
$1 = |z^n| = |z|^n$

n Lösungen

Argumente: $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n} \cdot 2, \dots, \frac{n-1}{n} 2\pi$

Kap 28 Cauchy-Integral-sätze

Wichtige Beobachtung:



$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph.

Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschl. Weg (C^1)

$\gamma(0) = \gamma(1)$

γ umschließe $D \subset \mathbb{C}$

$\partial D = \gamma([0,1])$

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz \overset{\text{(Def)}}{=} \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

$\mathbb{C}$-Mult.

$$= \int_0^1 (u \circ \gamma)\gamma_1' - (v \circ \gamma)\gamma_2'$$

$$+ i(v \circ \gamma)\gamma_1' + i(u \circ \gamma)\gamma_2'$$

$f = u + iv$

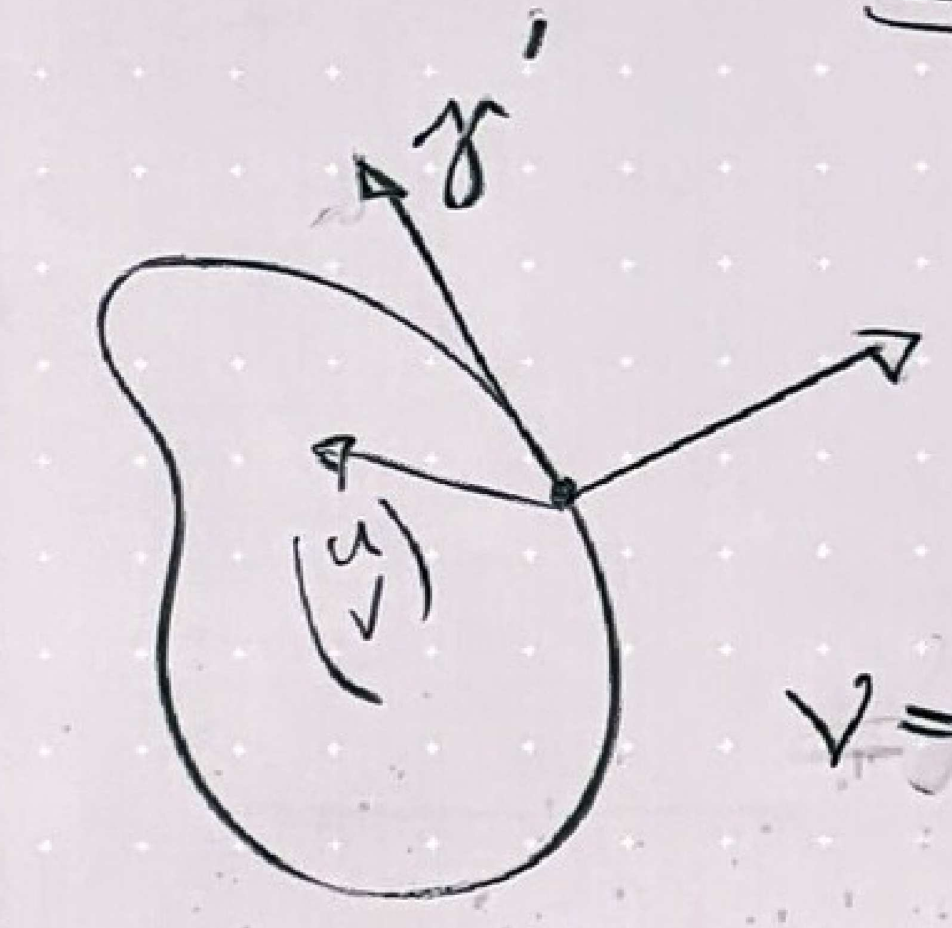
$\gamma' = \gamma_1' + i\gamma_2'$

2023-11-08

$$\mathrm{Re}\int \ldots = \int_0^1 (u\circ\gamma)\,\gamma_1' - (v\circ\gamma)\,\gamma_2'$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}\circ\gamma \cdot \gamma'$$

$$= -\int_0^1 \underbrace{\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}\circ\gamma \cdot \nu}_{\text{reelle Fkt.}} \, |\gamma'|$$



$$\nu = -\left(\frac{\gamma'}{\|\;\|}\right)^{\perp}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}\cdot\gamma' = -\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}^{\perp}\cdot\gamma'$$

$$= \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}\cdot(\gamma')^{\perp}$$

$$= -\nu\cdot\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}|\gamma'|$$

$$= -\int_{\partial D} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}\cdot\nu \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_D \mathrm{div}\begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

$$= -\int_D \underbrace{\left(\partial_x v + \partial_y u\right)}_{=0} = 0$$

C.-R.

Im genauso.

Ergebnis:

$$\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$$

2023-11-08

28. Cauchy-Integralsatz

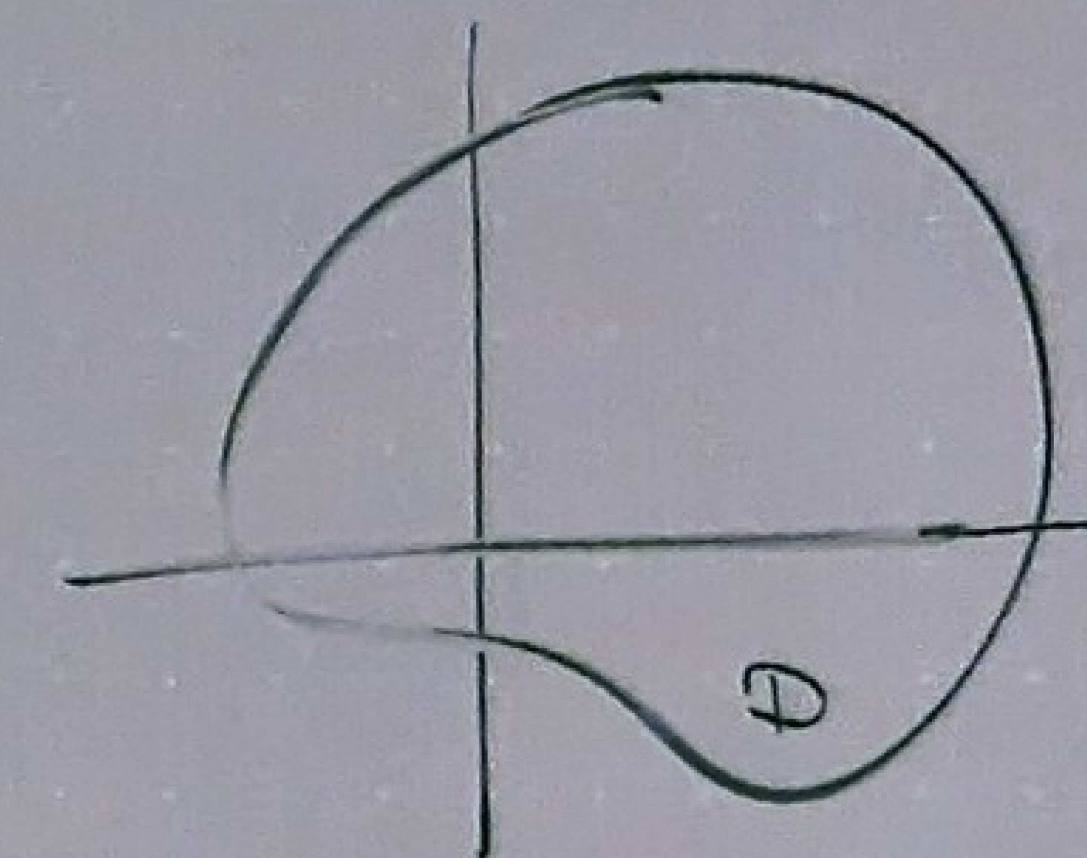
Immer: $D \subset \mathbb{C}$

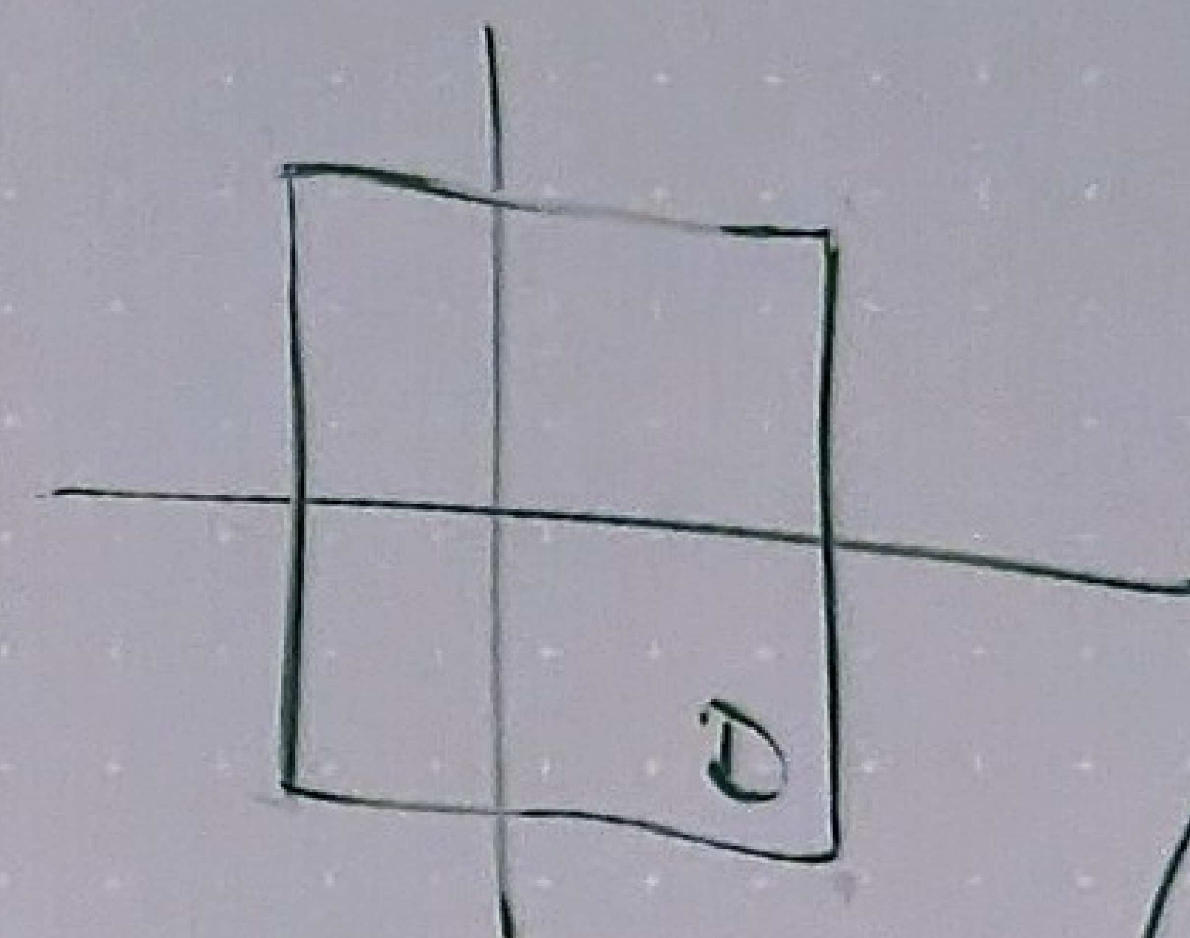
offen, beschränkt, zushgd.

nicht notwendigerweise einfach zushg.

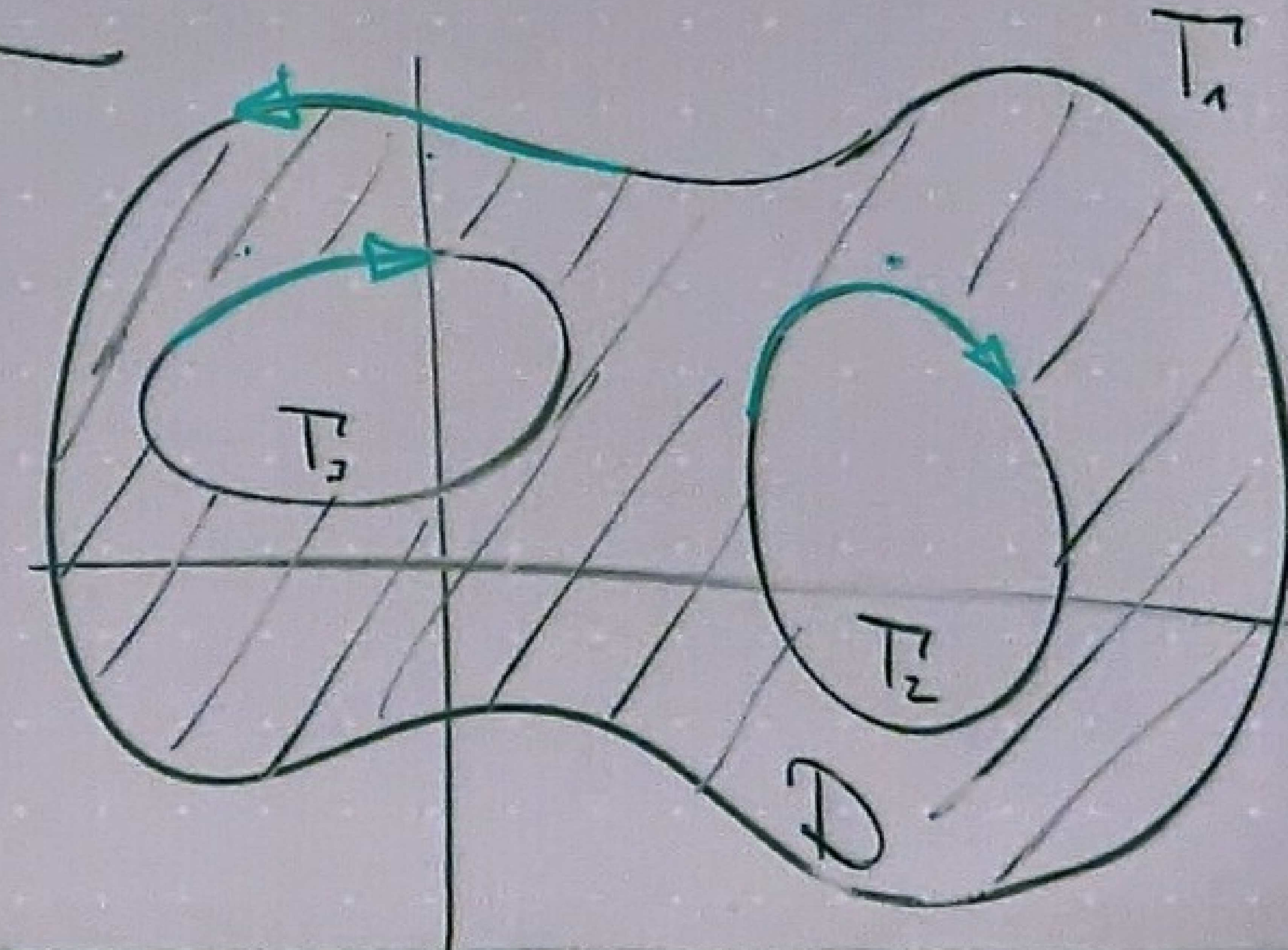
∂D endl. Vereinigung von stückweise C^1-Wegen

Mögliche D





(stw. C^1)

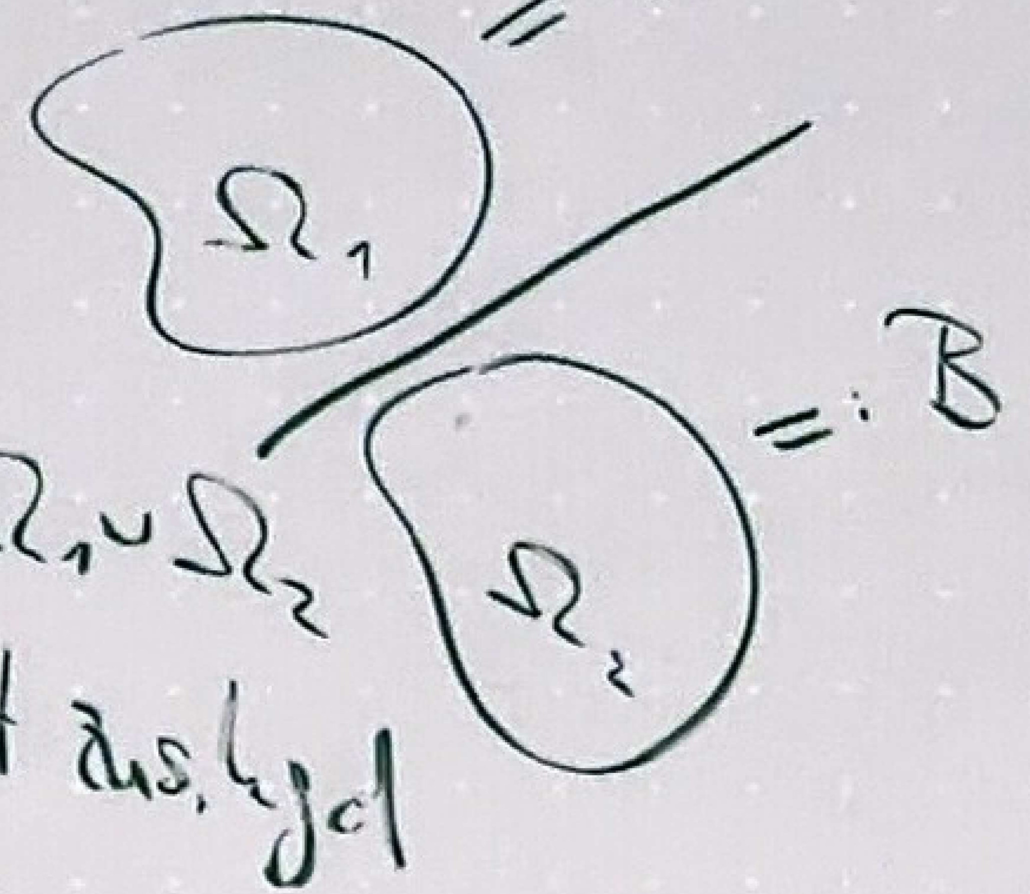


2023-11-13

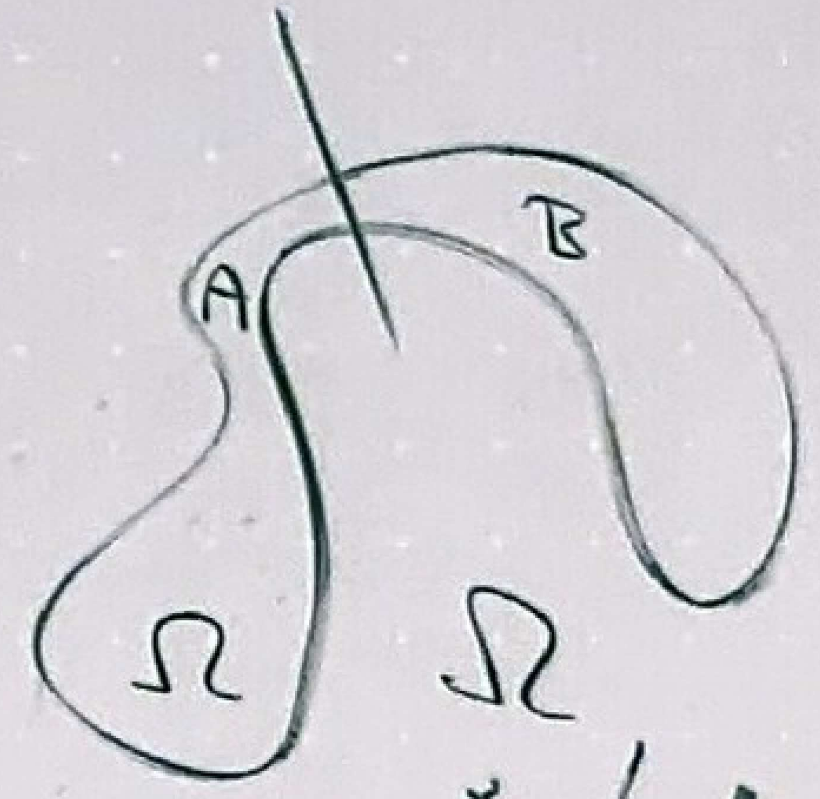
∂D ist endl. Verein. von Wegen

$\partial D = T_1' \cup T_2' \cup T_3'$

Ω zushgd. $:\Longleftrightarrow \nexists A, B \subset \Omega$, A und B offen in Ω, $\Omega = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$



$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ nicht zushgd



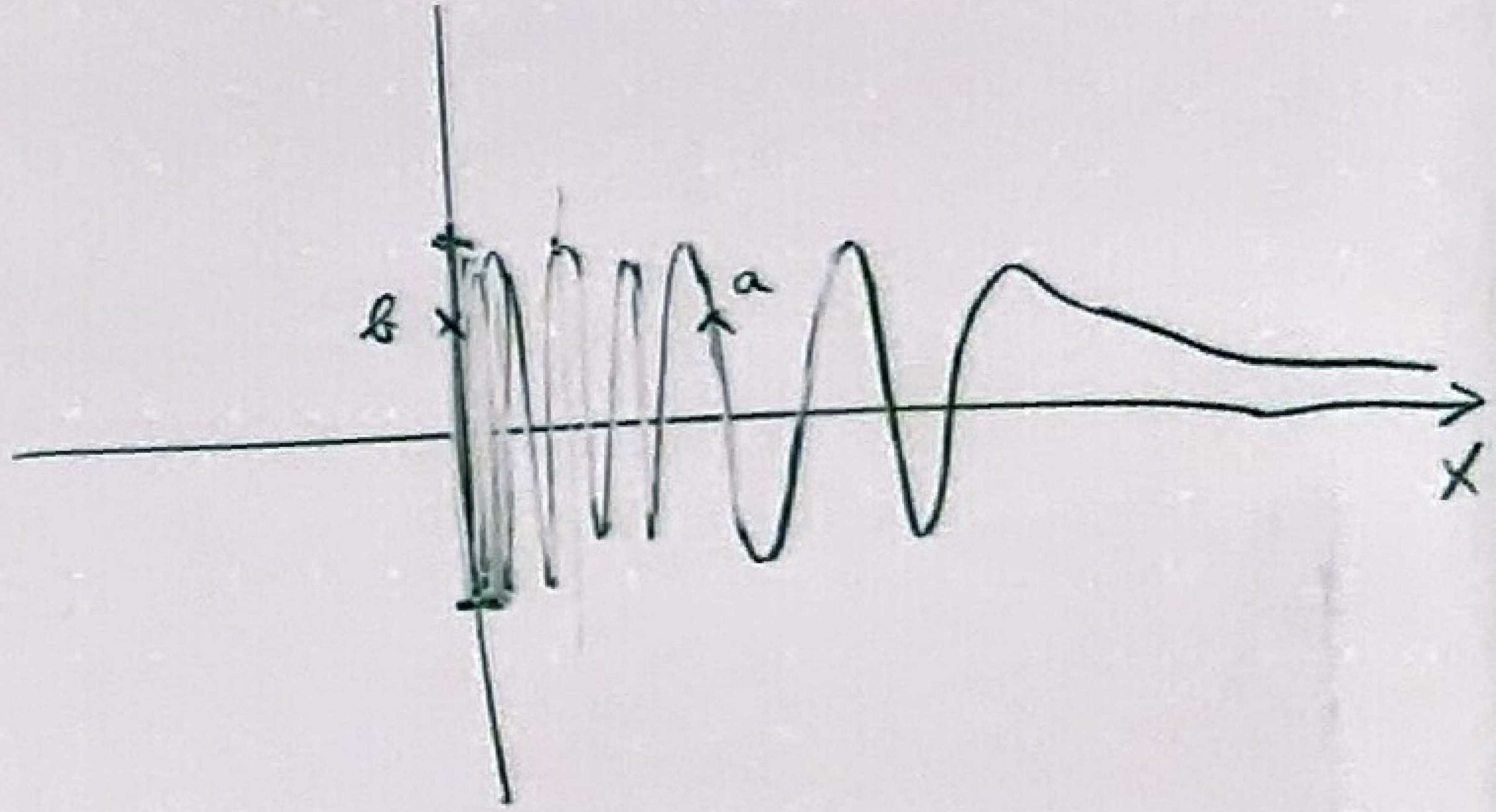
zushgd

2023-11-13

②

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ und } y \in [-1,1]\}$$
$$\cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, \ y = \sin \tfrac{1}{x}\}$$

Ω ist zushgd.



Warnung: Ω ist nicht wegzushgd.

$\forall a, b \in \Omega \ \exists$ Weg, stetig in Ω von a nach b

Für uns: Denke bei "zushgd." (weil D offen) an "Weg zusammenhgd"

28.1 Wegunabhängigkeit

D wie oben, $\Gamma := \partial D$ sei so parametrisiert, dass immer "D links vom Weg liegt"

Im Bsp:

$$\int_\Gamma f = \int_{\Gamma_1} f + \dots + \int_{\Gamma_3} f$$

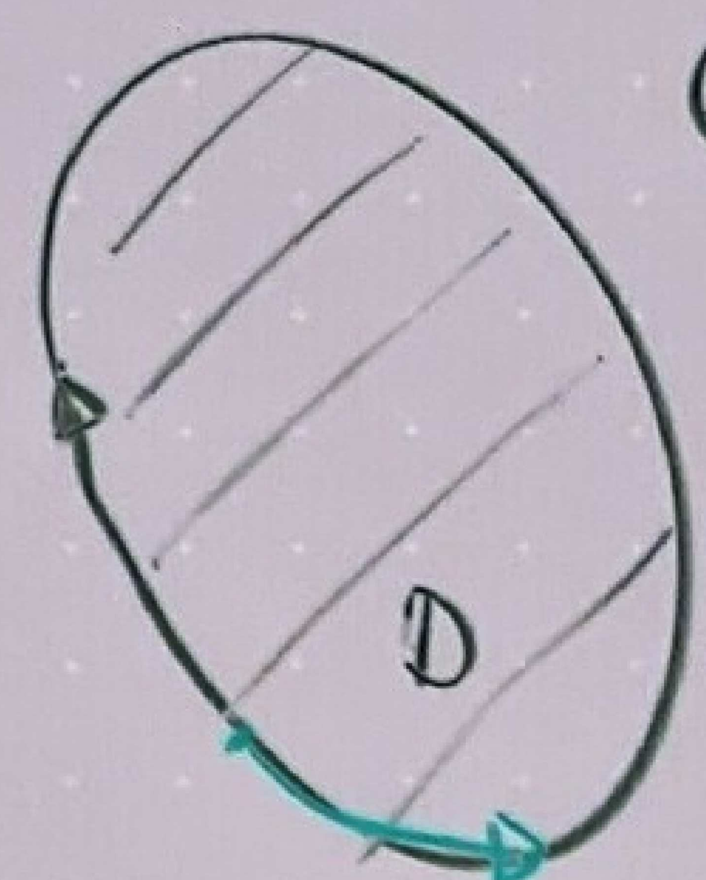
<u>Satz</u> Sei f holomorph in D, stetig auf $\bar{D}$. Dann gilt

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Bem: Folgerung: Γ geschl. Weg

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

Bew: D ist das von Γ umschlossene Gebiet



Evtl: Wähle umgekehrte Parametrisier. von Γ

(injektiv)

Beweis des Satzes

Γ hat K Wegstücke (zum 3. mal)

$$\operatorname{Im} \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{K} \operatorname{Im} \int_{\Gamma_k} f(z)\,dz$$

$$= \sum_{k=1}^{K} \operatorname{Im} \int_0^1 f(\gamma_k(t)) \cdot \gamma_k'(t)\,dt$$

$\uparrow$ $\mathbb{C}$-Mult.

2023-11-13

$$= \sum_{k=1}^{K} \int_0^1 \mathrm{Re}(f(\gamma_k(t))) \underbrace{\mathrm{Im}(\gamma_k'(t))}_{\tau_2 \, \|\gamma_k'(t)\|}$$

$$+ \mathrm{Im}(f(\gamma_k(t))) \underbrace{\mathrm{Re}(\gamma_k'(t))}_{\tau_1 \, \|\gamma_k'(t)\|} dt$$

Neues Vektorfeld:

$$F := F(z) := \begin{pmatrix} \mathrm{Im} f(z) \\ \mathrm{Re} f(z) \end{pmatrix}$$

τ Tangentialv.

$$\tau = \frac{\gamma_k'(t)}{\|\gamma_k'(t)\|}$$

Dann:

$$\mathrm{Im} \int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{K} \int_{\Gamma_k} F \cdot \tau \xrightarrow[\text{Stokes in 2D}]{\text{Satz von Green}}$$

2023-11-13

(5)

$$= \pm \int_D \underbrace{(\partial_2 F_1 - \partial_1 F_2)}_{\partial_y v - \partial_x u = 0} = 0.$$

Übung

$f = u + iv$

28.2 Stammfunktion

Sei D wie oben und einfach zushd.

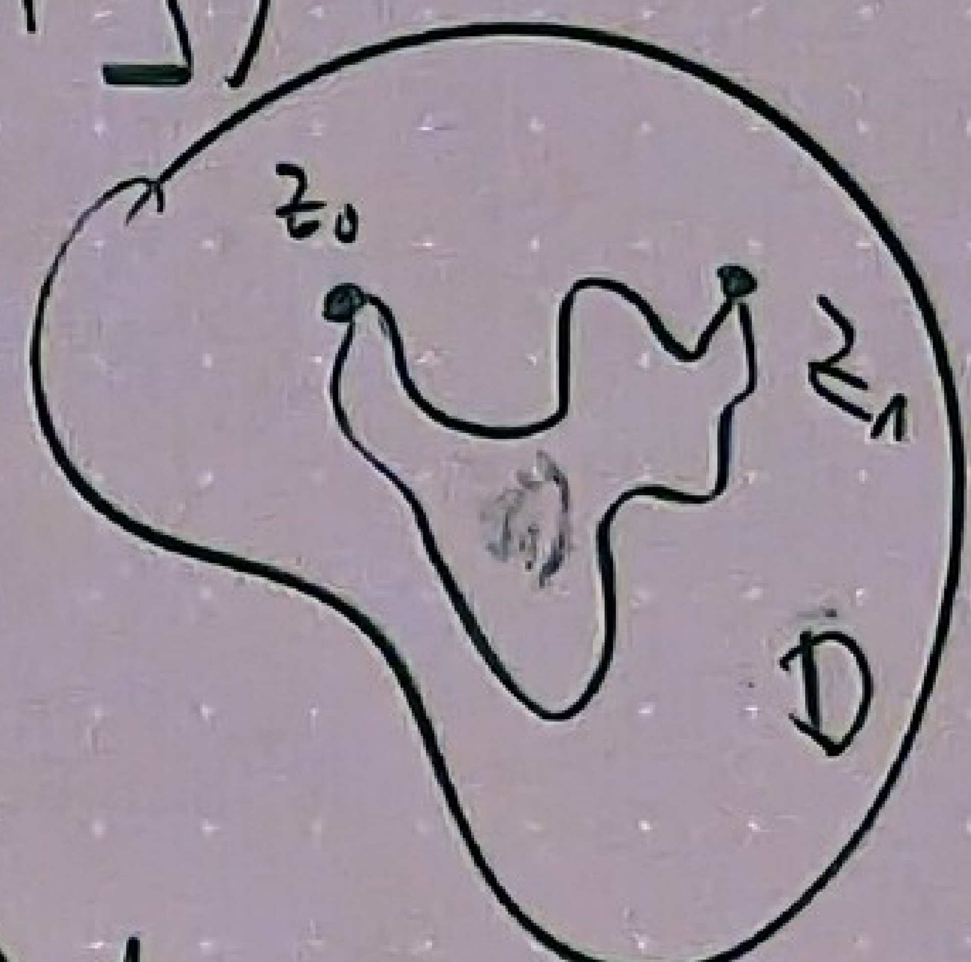
f holomorph auf D.

Dann kann man eine Stammfkt. definieren:

Sei $z_0 \in D$ bel.

Für $z_1 \in D$ wähle Weg von z_0 nach z_1

$\rightsquigarrow \Gamma = \gamma([0,1])$



Definiere

$$F(z_1) := \int_\Gamma f(z)\,dz$$

2023-11-13

F heißt Stammfkt.

Bem: F ist wohldef.

1) $\forall z_1 \in D \ \exists$ Weg nach z_1

2) Def. von F ist unabh. vom Weg.

Denn:

- $\tilde{\gamma}$ anderer Weg

  $\Rightarrow$ neuer Weg: erst γ dann $\tilde{\gamma}$ zurück

- Integral darüber $= 0$ $\rightsquigarrow$ geschlossen

7

Integral über geschl. Weg ist 0, weil: Auf dem umschlossenen Gebiet ist f holom.

(D einfach zushgd.!

2023-11-13

Name ist gut gewählt:

<u>Satz</u>: D einf. zus., F obige Stammfkt. zu f.

Dann: $F' = f$

<u>Bew</u>: $z \in D$ beliebig,

$w \in D$ "nah an z"

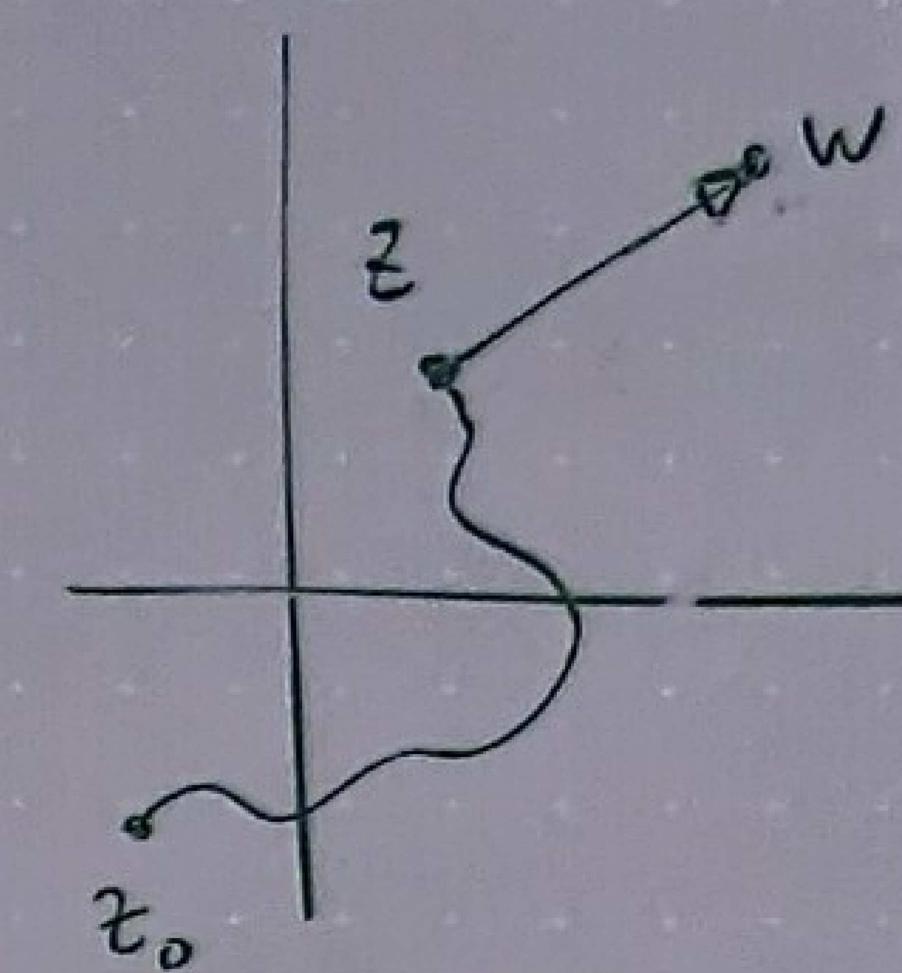
$$\frac{F(w)-F(z)}{w-z} = ??$$

2023-11-13

8

γ sei der Weg von z nach w,

$$\gamma(t) := z + t(w-z)$$



$$F(w) - F(z)$$

$$= \int_\gamma f(z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \underbrace{(w-z)}_{=\gamma'(t)\ \forall t} \, dt$$

$\uparrow$ $\mathbb{C}$-Mult.

$$\Rightarrow \frac{F(w)-F(z)}{w-z} = \int_0^1 \underbrace{f(\gamma(t))}_{\approx f(z)} \, dt \longrightarrow f(z)$$

falls $|w-z|$ klein

(f stetig)

für $w \to z$

$\square$

Merke: Jede holom. Fkt hat Stammfkt, falls D einf. zushgd

2023-11-13

28.3 Beispiele

(a) $f : \mathbb{C} \ni z \mapsto z^k \in \mathbb{C}$

(holom.)

$$\Rightarrow \quad F(z) = \frac{1}{k+1} z^{k+1}$$

ist eine Stammfkt.

($F(z) + 17 - 4i$ ist eine andere Stammfkt.)

(b) $f : z \mapsto e^z$

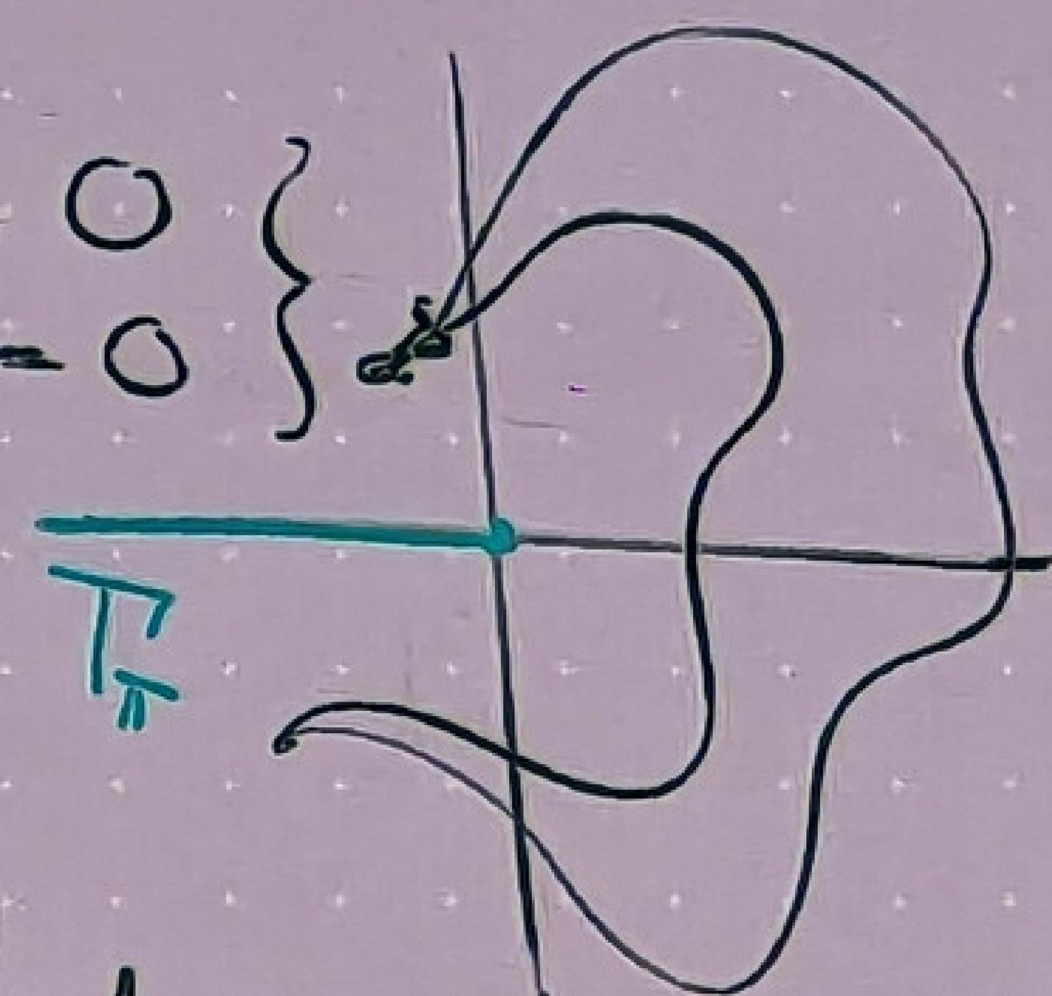
$F(z) = e^z$

(c) $f: z \mapsto \cos(z)$

$$F(z) = \sin(z)$$

(d) $f: \mathbb{C} \setminus T_\pi \ni z \longmapsto \frac{1}{z} \in \mathbb{C}$

$$T_\pi := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{Re} z \leq 0 \\ \operatorname{Im} z = 0 \end{array} \right\}$$



$\mathbb{C} \setminus T_\pi$ ist einfach zushgd.

$\Rightarrow f$ hat Stammfkt.

2023-11-13

(10)

Eine Stammfkt ist:

$$F(z) = \log(z)$$

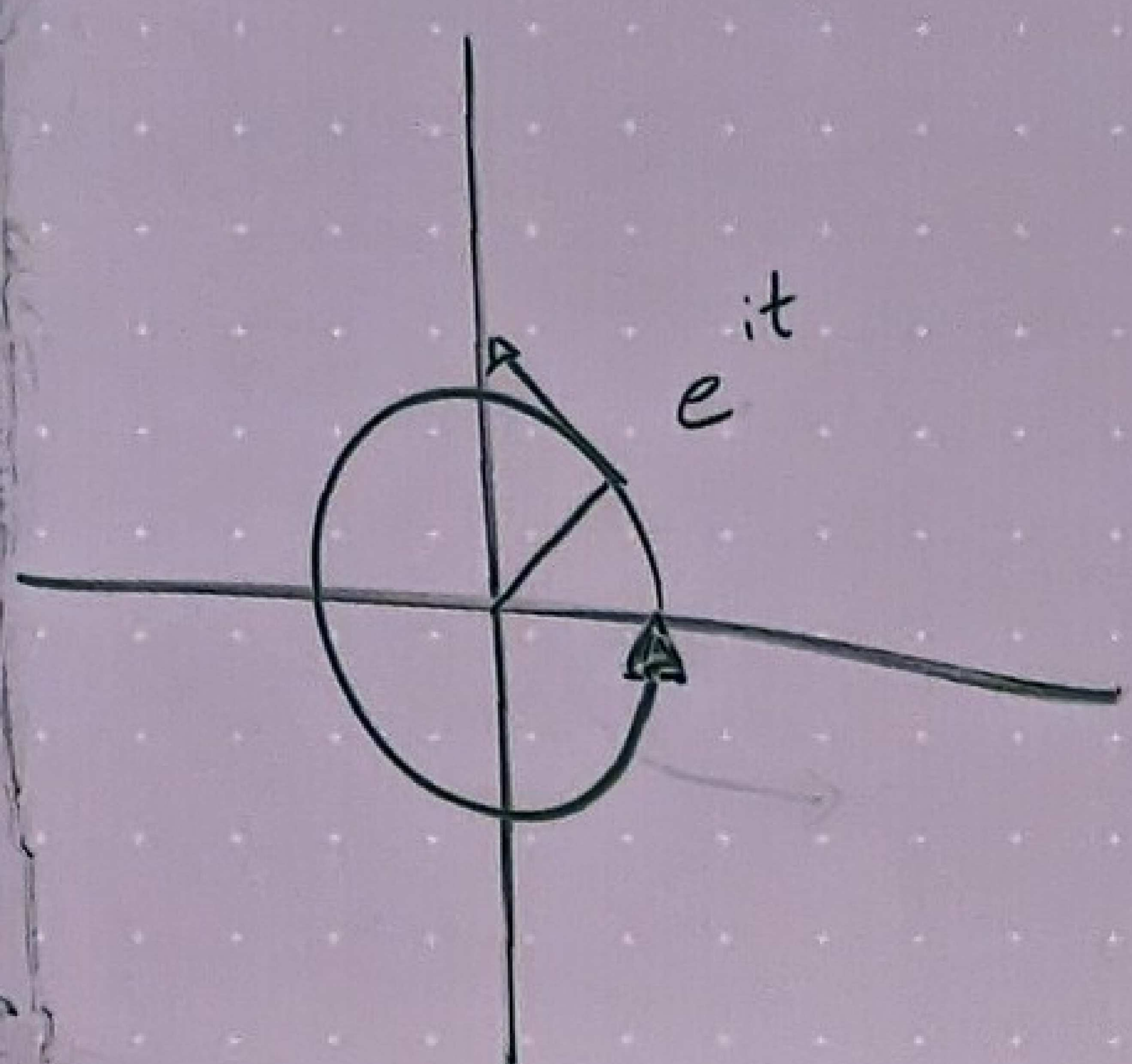
$$F: \mathbb{C} \setminus T_\pi \longrightarrow \mathbb{C}$$

Ein wichtiges Kurvenintegral

$$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{z}$$

$$\Gamma = \partial B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$$

$(r > 0)$



$$\gamma: [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$t \mapsto re^{it}$$

2023-11-13

11

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \cdot \underbrace{ire^{it}}_{=\gamma'(t)}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \cancel{\frac{1}{r}}\,\cancel{e^{-it}} \cdot i\cancel{r}\,\cancel{e^{it}}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i$$

"$2\pi i$ ist der Sprung des Logarithmus auf T_π"

28.4 Cauchy-Integralsatz

Satz (Cauchy): Sei $D \subset \mathbb{C}$ wie oben, einf. zushgd.

$f : D \to \mathbb{C}$ holom., $z_0 \in D$

f stetig auf $\bar{D}$

Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0).$$

2023-11-13

28.4 Der Cauchy-Integralsatz

Satz (Cauchy):

$D \subset \mathbb{C}$ offen, beschr., zshgd.

<u>und</u> einfach zshgd.

$f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ st., holomorph in D

$z_0 \in D$. Dann

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = f(z_0)}$$

<u>Bem</u>: $D \ni z \longmapsto \dfrac{f(z)}{z - z_0} \in \mathbb{C}$

nicht holomorph auf D

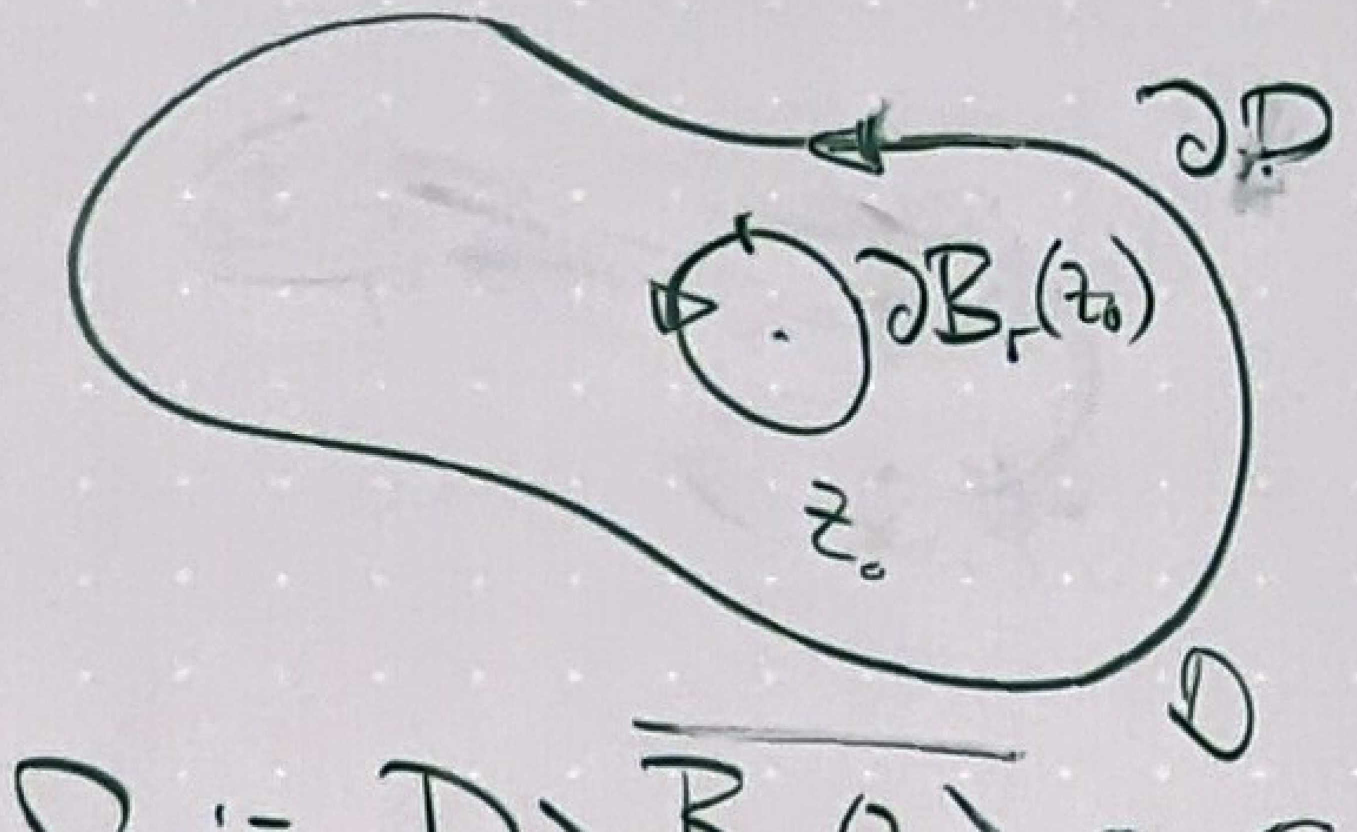
(nur wohldef. auf $D \setminus \{z_0\}$)

$D \setminus \{z_0\}$ ist <u>nicht</u> einfach zshgd

Bew: Wegunabhängigkeit $\Rightarrow$

$$(*) \quad \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

Bild



(für: $r>0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subset D$, natürl. Parametrisierung)

Für $\Omega := D \setminus \overline{B_r(z_0)} \subset \mathbb{C}$

gilt $\int_{\partial\Omega} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \overset{\text{flacher Stokes}}{=} 0$ weil $\frac{f(z)}{z-z_0}$ holomorph in Ω

also $(*)$

2023-11-15

Rechne:

$$\int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \underset{z=\gamma(t)=z_0+re^{it}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{\cancel{re^{it}}} \underset{\mathbb{C}\text{-Mult.}}{\cdot} i\cancel{re^{it}}\,dt$$

$$z-z_0 = re^{it}$$

$$\gamma'(t) = ire^{it}$$

$$= i\underbrace{\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt}_{f \text{ stetig} \Rightarrow \to f(z_0)} \xrightarrow{r\to 0} i\, f(z_0)\cdot 2\pi$$

r war bel.

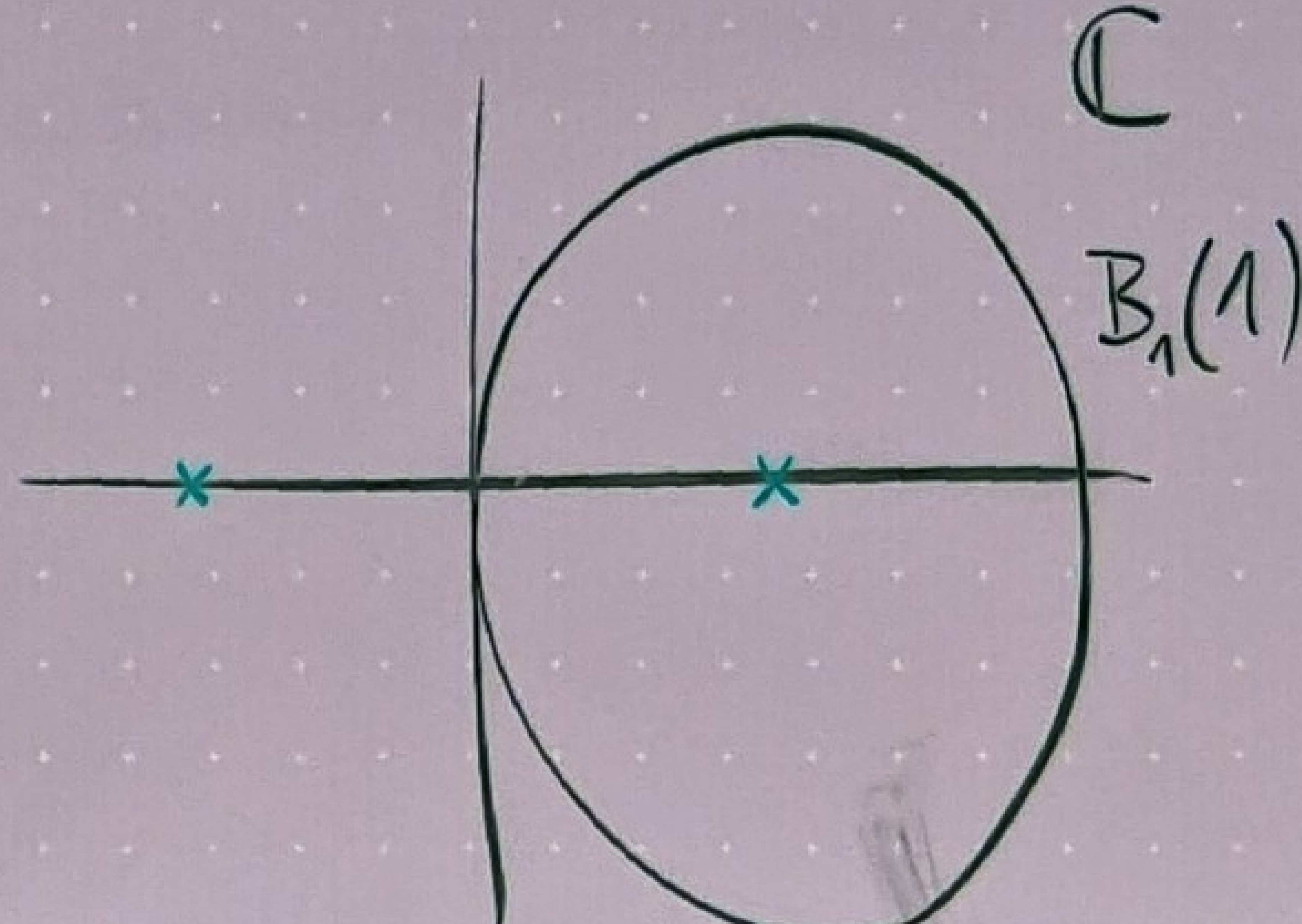
$\Rightarrow$ Beh. $\square$

Ein Standardbeispiel

$$g : z \longmapsto \frac{1}{z^2 - 1}$$

Frage: $$A := \int_{\partial B_1(1)} g(z)\,dz = \;?$$

Bild:



2023-11-15

g holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ 3

$$A = \int_{\partial B_1(1)} \underbrace{\frac{1}{z-1}} \; \underbrace{\frac{1}{z+1}}_{f(z)} \, dz$$

Singuläre Fkt.
Pol in $+1$
$z_0 = 1$

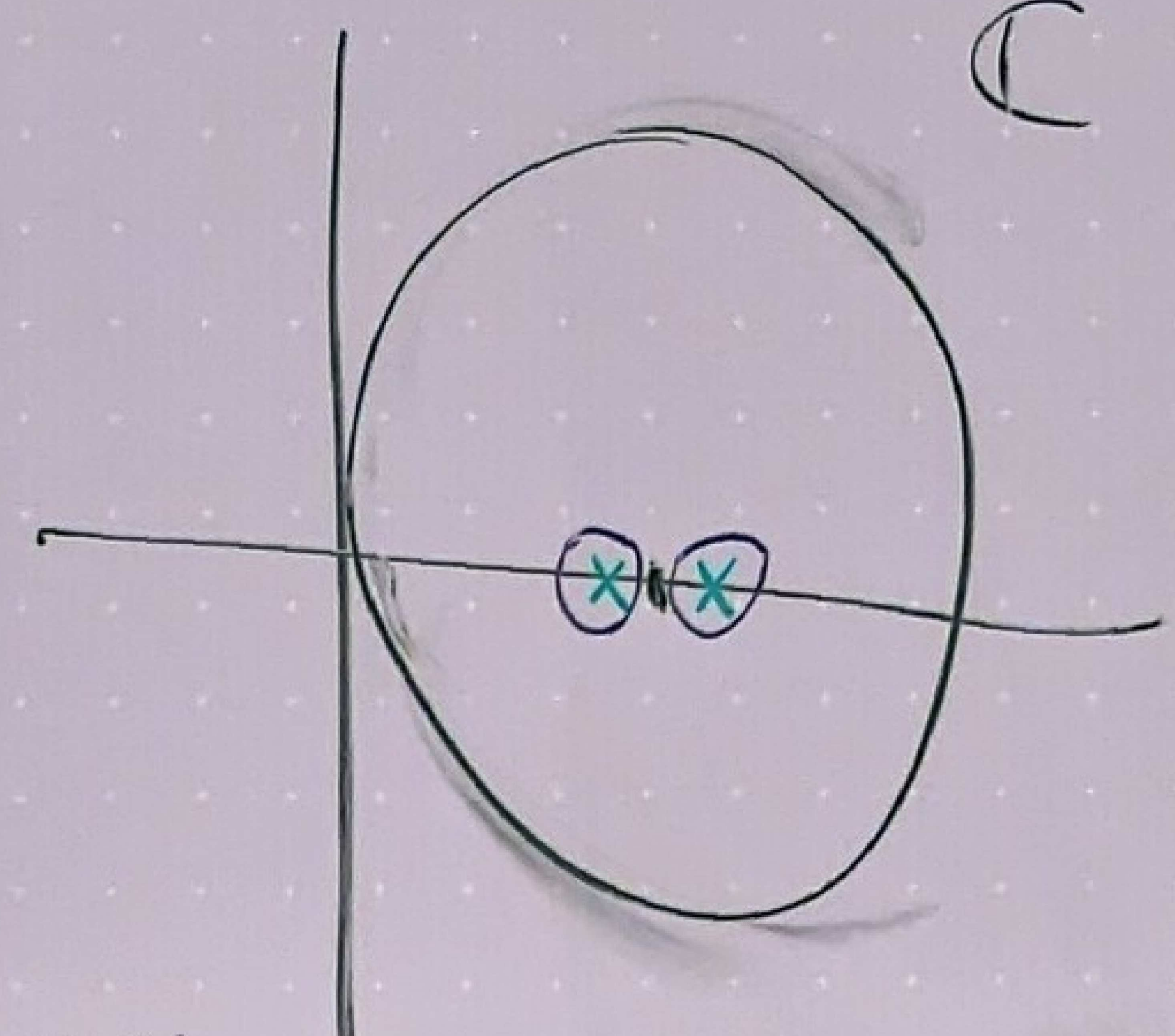
holom. in
$D := B_1(1)$

Cauchy $$2\pi i\, f(1) = \pi i.$$

Doppelte Polstelle

$$g(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\int_{\partial B_1(1)} g(z)\,dz \overset{①}{=} \int_{\partial B_1(1)} \frac{1}{z-(1+\varepsilon)}\cdot\frac{1}{z-(1-\varepsilon)}\,dz$$



① ohne Beweis, richtig und leicht zu glauben

$$\overset{②}{=} \int_{\partial B_{\varepsilon/2}(1+\varepsilon)} \frac{1}{z-(1+\varepsilon)} \underbrace{\frac{1}{z-(1-\varepsilon)}}_{\text{nicht sing.}} dz + \int_{\partial B_{\varepsilon/2}(1-\varepsilon)} \dots$$

② $\int_{\partial\Omega} f = 0$ für f holom.

$$\Omega = B_1(1) \setminus \{B_{\varepsilon/2}(1+\varepsilon) \cup B_{\varepsilon/2}(1-\varepsilon)\}$$

$$\overset{\text{Cauchy}}{=} 2\pi i\left(\frac{1}{(1+\varepsilon)-(1-\varepsilon)} + \frac{1}{1-\varepsilon-(1+\varepsilon)}\right) = 0$$

2023-11-15

Bem: Langweiliger kurzer Beweis

$$\int_{\partial B_1(0)} \frac{1}{z^2}\,dz \underset{\gamma(t)=e^{it}}{=} \int_0^{2\pi} e^{-2it} \cdot ie^{it}\,dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} e^{-it}\,dt = 0$$

28.5 Folgerungen aus dem Cauchy-Integralsatz

$\boxed{1}$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz \qquad (*)$$

Also: $\forall z_0 \in D$: $f(z_0)$ ist durch die Randwerte bestimmt

zB: $f|_{\partial D} \equiv 0 \Rightarrow f \equiv 0$ auf D.

2023-11-15

$\boxed{2}$ $\frac{d}{dz_0}(*)$ liefert

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} f(z)\,\frac{d}{dz_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz$$

$$\frac{d}{dz_0}\left(\frac{1}{z-z_0}\right) = +\frac{1}{(z-z_0)^2}$$

Ergebnis: Cauchy-Formel liefert Formeln für alle Ableitungen von f in z_0.

Bem: $f(z) := 1 \;\forall z$

$f'(z_0) = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\partial D} \frac{1}{(z-z_0)^2}\,dz = 0$

2023-11-15

$\boxed{3}$ Satz von Liouville

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holom.

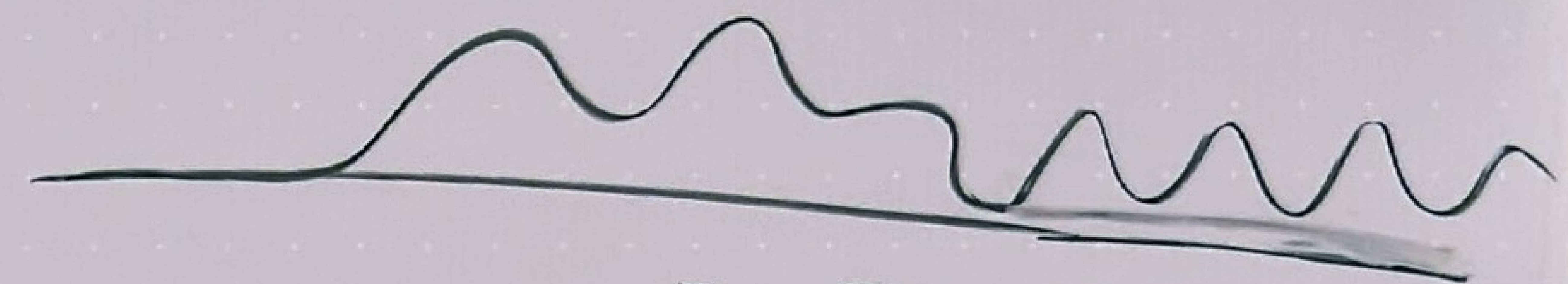
(ganz $\mathbb{C}$!)

und beschränkt: $\exists C_0 > 0 : |f(z)| \leq C_0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Dann ist f eine konstante Fkt.

2023-11-15

Bem in $\mathbb{R}$



In $\mathbb{R}$ falsch

Beweis: Sei $R > 0$ groß.

$D := B_R(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ bel.

$$\boxed{2} \Longrightarrow f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} \, dz$$

$$\Rightarrow |f'(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{|f(z)|}{|(z-z_0)^2|} \, dS$$

reelles Int.

$$\leq \frac{C_0}{2\pi} \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{1}{R^2} \, dS$$

$|(z-z_0)^2| = R^2$

$$\leq \frac{C_0}{R^2} \cdot R$$

$z - z_0 = Re^{it}$

$|\partial B_R(z_0)| = 2\pi R$

$(z-z_0)^2 = R^2 e^{2it}$

Also, da $R > 0$ bel.: $|f'(z_0)| = 0$

2023-11-15

Da z_0 bel. folgt $f' \equiv 0$.

$f' \equiv 0 \Rightarrow f$ ist konst. $\square$

$\boxed{4}$ Fundamentalsatz der Algebra

Jedes Polynom hat in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle

<u>Bem</u>: In $\mathbb{R}$ hat x^2+1 keine Nullst.

$\rightsquigarrow$ Satz in $\mathbb{R}$ falsch

Beweis des Fundamentalsatzes

Sei P ein Polynom, wir betrachten P als

$$P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$z \longmapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

$(a_n \neq 0)$

a_j in $\mathbb{C}$ oder in $\mathbb{R}$

P holom. auf $\mathbb{C}$.

2023-11-15

Annahme: P hat keine NSt. (9)

Betrachte $f(z) := \dfrac{1}{P(z)}$

f holomorph auf $\mathbb{C}$ (!)

Beh 1: f beschr. auf $\mathbb{C}$

Aus Beh 1 folgt mit Liouville:

$f \equiv$ konst. ↯