

Kap. 26 Funktionen

Theorie

8

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Vektorraum: $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$

Norm: $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| := \sqrt{x^2 + y^2}$ usw

(dodoch auch metr. R.)

Skalarprodukt $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle :=$

$= x_1 x_2 + y_1 y_2$ (Hilbertraum)

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \text{ (VR, normiert)}$$

mit zusätzlich: Multiplikation

$$\begin{aligned} (x_1 + i y_1) \cdot (x_2 + i y_2) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) \\ &\quad + i (y_1 x_2 + x_1 y_2) \end{aligned}$$

Körper!

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f = (f_1, f_2), \quad f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\partial_1 f(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h e_1) - f(p)}{h}$$

$$\partial_1 f_2(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_2(p + h e_1) - f_2(p)}{h}$$

$f \in C^1 \iff$ Alle $\partial_i f_i$ existieren in allen x
und (als Funktionen) stetig

Neue Definition

Für $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

f diffbar in p , falls

(komplex)

$$\lim_{0 \neq z \rightarrow 0} \frac{f(p+z) - f(p)}{z}$$

existiert

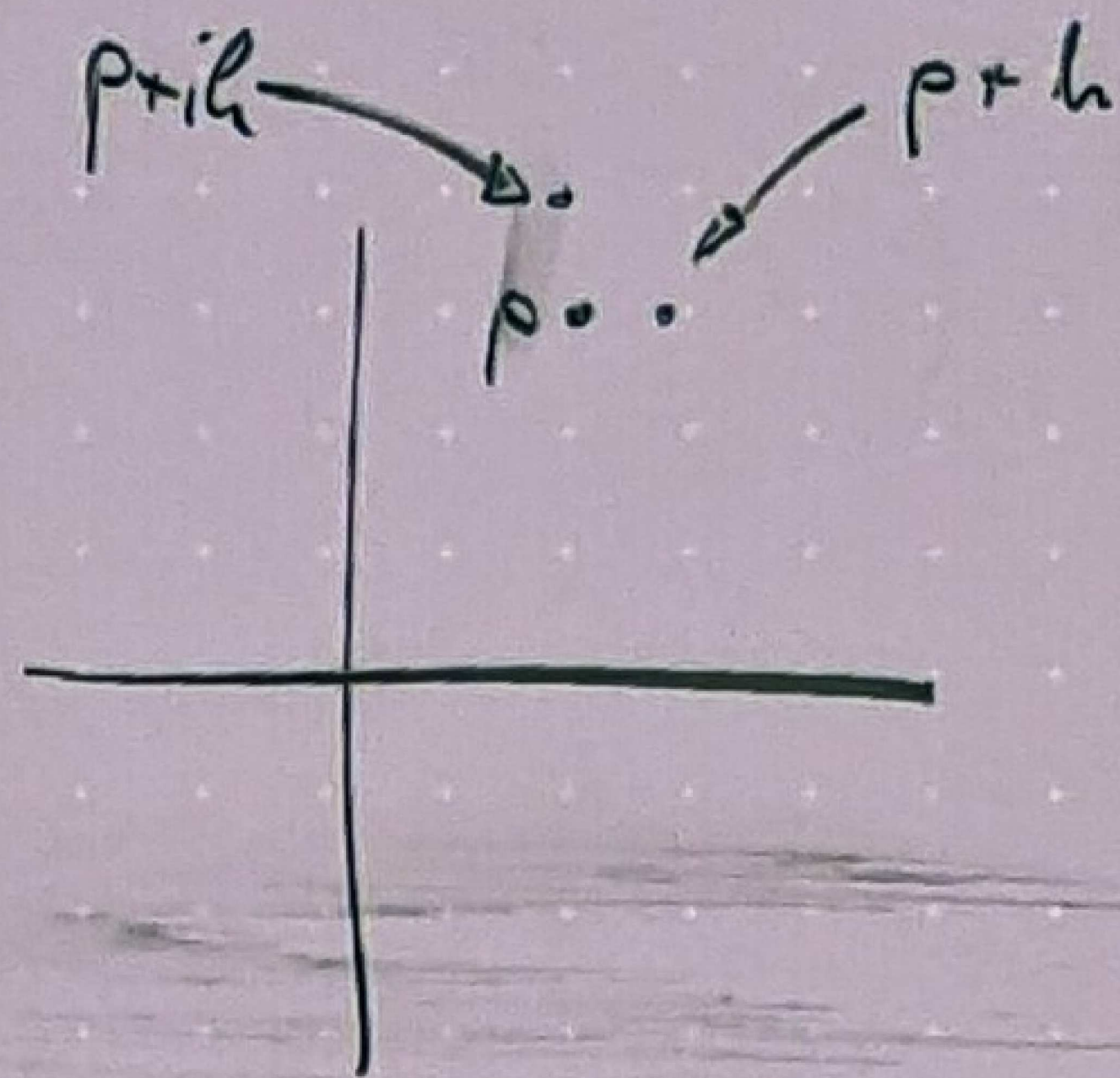
Bem: $\frac{1}{z} \in \mathbb{C}$ wohldef ✓

$$[-] \cdot \frac{1}{z} = \frac{1}{z} [-] \quad \text{kommutativ} \checkmark$$

Neu ist hier: z kann von
rechts an die 0, aber
auch von oben!

$$h \in \mathbb{R}, \quad z := h := h + i0 \in \mathbb{C}$$

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h} \longrightarrow \partial_1 f(p)$$



$$\frac{f(p+ih) - f(p)}{ih} \longrightarrow \frac{1}{i} \partial_2 f(p)$$

$$\text{Wenn } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(p+z) - f(p)}{z} = f'(p)$$

existiert, so gilt

$$\partial_1 f(p) = -i \partial_2 f(p)$$

Schreibe $f(z) = u(z) + i v(z)$

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad u, v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u = f_1, \quad v = f_2$$

Falls f komplex diffbar in $p \in \mathbb{C}$
mit Ableitung $f'(p)$, so gilt

$$f'(p) = \partial_1 f(p) = -i \partial_2 f(p)$$

$$\partial_1 u(p) + i \partial_1 v(p) = -i (\partial_2 u(p) + i \partial_2 v(p)) = \partial_2 v(p) - i \partial_2 u(p)$$

Es gelten also die
Cauchy-Riemann'schen
Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{l} \partial_1 u = \partial_2 v \\ \partial_1 v = -\partial_2 u \end{array}$$

Erste Konsequenz:

$$\Delta u = \partial_1^2 u + \partial_2^2 u = \partial_1(\partial_2 v) + \partial_2(-\partial_1 v) = 0$$

also: u harmonisch

Ebenso: v —||—

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

Komplex diffbar in $z_0 \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{C}, \quad f'(z_0) := w:$$

$$\lim_{\substack{0 \neq z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C}}} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z}$$

Hatten bereits:

Cauchy-Riemann

$$\partial_x f = \partial_x \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lim_{\substack{0 \neq h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

(alles in z_0)

$$= f'(z_0) \left(f = u + iv \text{ mit } u, v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \right)$$

$$= \lim_{\substack{0 \neq h \rightarrow 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih}$$

$$= \frac{1}{i} \partial_y f = \frac{1}{i} (\partial_y u + i \partial_y v) = \partial_y v - i \partial_y u$$

Also: C-R:

$$\begin{aligned} \partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_x v &= -\partial_y u \end{aligned}$$

f komplex diffbar $\Rightarrow$ C-R

Andere Def.:

(2)

f in z_0 komplex diffbar $\iff$ Für $z \in \mathbb{C}$ klein

$$f(z_0 + z) = f(z_0) + f'(z_0) \cdot z$$

$$+ o(|z|)$$

(" $\cdot$ " ist komplexe Multipl.)

Lemma: Sei $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
linear

Darstellende Matrix sei
$$M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

$$F: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix}$$

F sei, als Abb. $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

gegeben als $F: (x+iy) \mapsto (\lambda + i\mu) \cdot (x+iy)$

Dann gilt

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Beweis: $\forall x, y:$

$$\begin{aligned} (ax+cy) &= F(x+iy) = (\lambda x - \mu y) \\ + i(bx+dy) &+ i(\mu x + \lambda y) \end{aligned}$$

Also: $a = \lambda, c = -\mu$

$$b = \mu = -c \\ d = \lambda = a$$

Can formulate:

$$z = (\lambda + i\mu)$$

entspricht Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & -\mu \\ \mu & \lambda \end{pmatrix}$

Konsequenz: f kompl. diffbar
in z_0

$\Rightarrow$ Lin. Approx. von f in z_0 :

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= (a+ib) \\ Df(z_0) &= \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Haben gelernt: $(a+ib)$

$$\stackrel{\wedge}{=} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Also

$$\partial_x u = a, \quad \partial_y u = -b$$

$$\partial_x v = b = -\partial_y u$$

$$\partial_y v = a = \partial_x u$$

$\leadsto$ C-R

Merke: f reell isotropiert, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

f kompl. diffbar $\Rightarrow Df(z_0)$ als
kompl. Zahl
($a+ib$) darstellbar

Impliziert: $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $Df(z_0) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

Eigenschaft von $M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$: ⑤

Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sind orthogonal.

Konsequenz: $\xi, \zeta \in \mathbb{R}^2$ mit $\xi \perp \zeta$

Dann: (d.h.: $\xi \cdot \zeta = 0$)

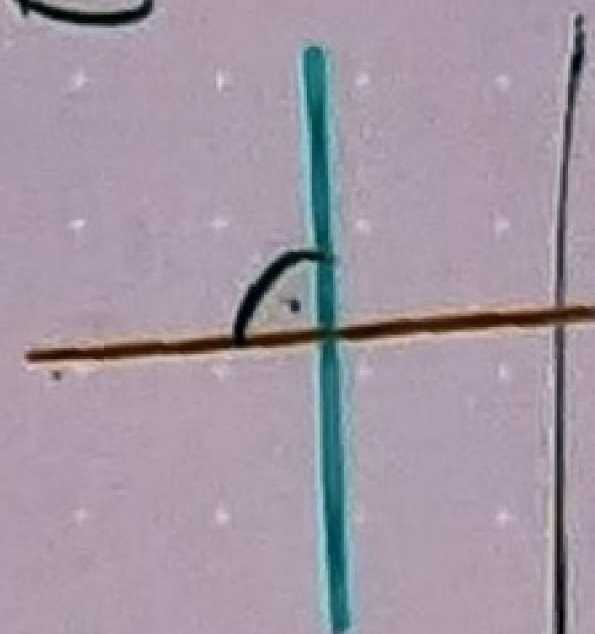
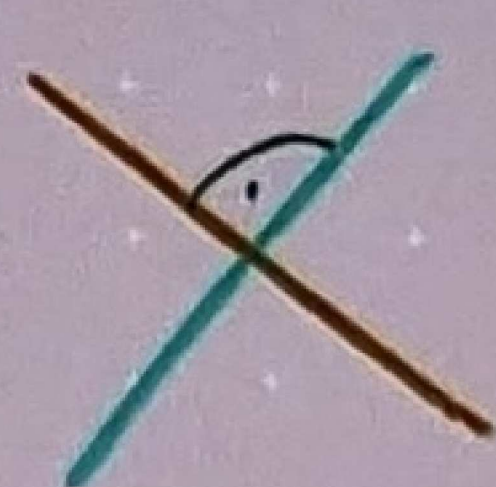
$$(M\xi) \cdot (M\zeta) = \langle M\xi, M\zeta \rangle$$

$$= \langle M^T M \xi, \zeta \rangle = (a^2 + b^2) \langle \xi, \zeta \rangle = 0$$

$$M^T M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = (a^2 + b^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$


~~~~~  $\triangleright$  Winkel treue

$$\mathbb{C} \xrightarrow{(a+ib) \cdot} \mathbb{C}$$



Hatten schon:  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow \Delta u = \Delta v = 0$

$$f = u + iv$$

Frage: Sei  $u$  mit  $\Delta u = 0$  ⑥  
 $u: \mathbb{R}^2 \hat{=} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$

Gibt es  $f = u + iv$ , kompl. diffbar

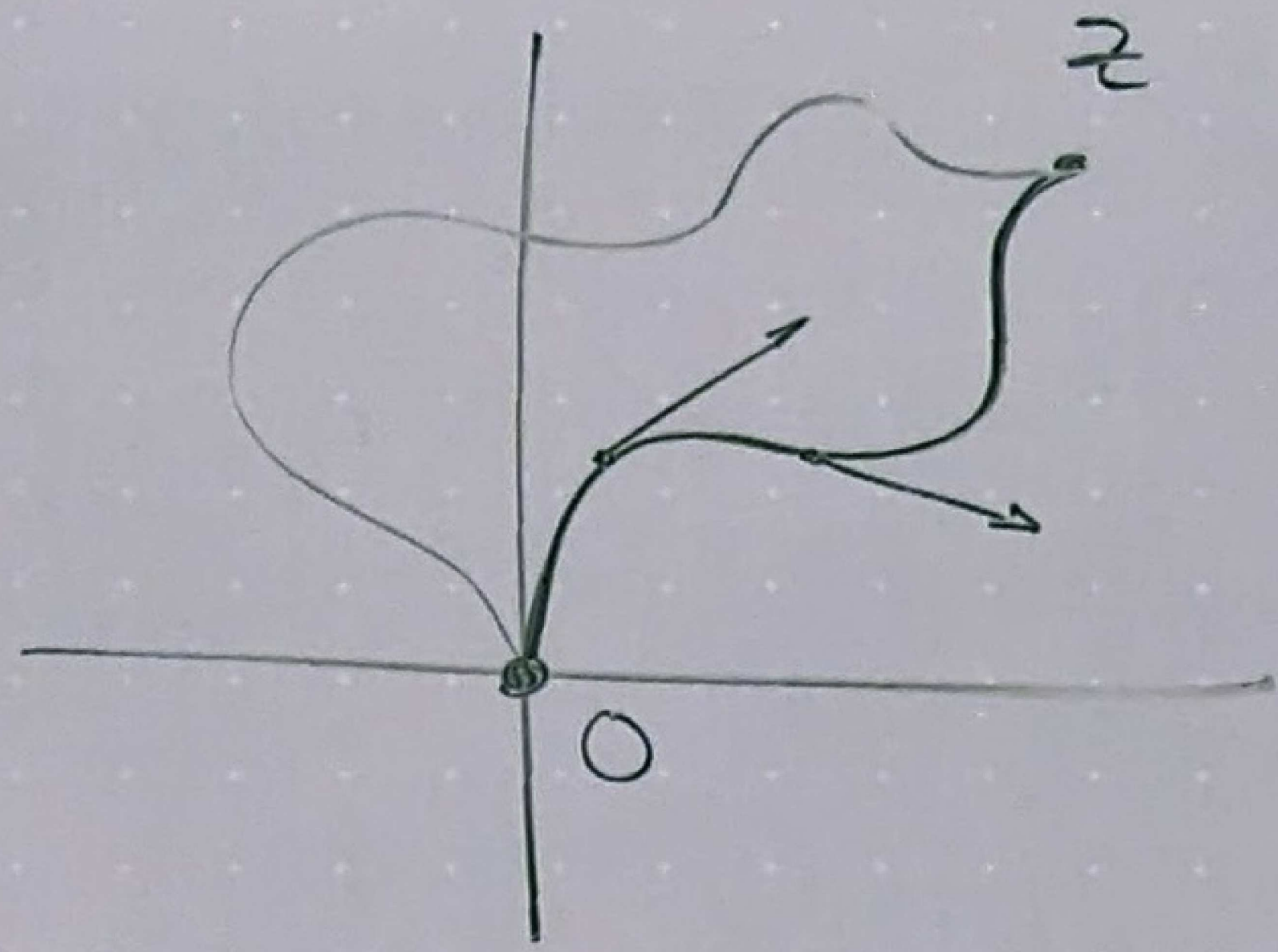
Ziel: Finde  $v: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ , ( $\Delta v = 0$ )

mit  $\partial_x u = \partial_y v$ ,  $\partial_x v = -\partial_y u$

Antwort: Ja!



Definiere  $v$  als Wegintegral



$$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$$

diffbar

$$\gamma(0) = 0$$

$$\gamma(1) = z$$

$$\Gamma := \gamma([0,1])$$

$$v(z) := \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix} \cdot \vec{\tau} =$$

$$\vec{\tau} := \frac{\gamma'}{\|\gamma'\|}$$



2023-10-30

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \quad (7)$$

Tatsächlich:

1)  $v$  wohldef., Integral ist unabh. von Weg.

$$\text{Gilt, weil } \nabla^\perp \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix} = -\partial_y(-\partial_y u) + \partial_x \partial_x u$$

$$= \Delta u = 0$$

$$2) \nabla v(z) = \begin{pmatrix} -\partial_y u \\ \partial_x u \end{pmatrix} \text{ wie gewünscht}$$



# Drei Wegintegrale

$\gamma: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{\tau}$  Tang.vekt.

$$T = \gamma([0,1])$$

(i)  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\int_T f = \int_0^1 f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \in \mathbb{R}^m$$

(ii) Vektoriell,  $f: T \rightarrow \mathbb{R}^2$  (!)

$$\int_T f \cdot \vec{\tau} = \int_T f \cdot d\vec{x} = \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \underset{\text{Skalarprod.}}{\gamma'(t)} dt$$

Neu:

(iii) Komplexes Wegintegral

$$f: T \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\int_T f dz = \int_T f \cdot dz :=$$

kompl. Mult.

$$= \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$



Beobachtung: Sei  $f = u + iv$

Schreibe  $f(z)$  als  $\begin{pmatrix} u(z) & -v(z) \\ v(z) & u(z) \end{pmatrix}$

Berechne Wegint. (ii) mit dieser Matrix

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} \cdot \vec{z} = \int_0^1 \underbrace{\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}(\gamma(t))}_{\text{R-Prod.}} \cdot \gamma'(t) dt$$

$$= \int_0^1 \begin{pmatrix} u \gamma_1' - v \gamma_2' \\ v \gamma_1' + u \gamma_2' \end{pmatrix} dt \stackrel{!}{=} \int_0^1 \underbrace{(u+iv)}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{(\gamma_1' + i \gamma_2')}_{\in \mathbb{C}} dt = \int_{\Gamma} f d\vec{z}$$

2023-10-30

## Kapitel 27: Viele komplex diffbare Fkt.

(9)

Bsp1:  $f(z) := z$

$\Rightarrow f$   $\mathbb{C}$ -diffbar,  $f'(z_0) = 1$

Tatsächlich:  $f(z_0+z) \stackrel{(!)}{=} f(z_0) + \boxed{1} \cdot z$

$\underbrace{\quad}_{z_0+z} \qquad \qquad \underbrace{\quad}_{z_0+z}$

$\boxed{\quad} = f'(z_0)$



Andere Rechnung:

$$f(z) = f(x+iy) = x+iy$$

$$f = u+iv \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} u(x,y) &= x \\ v(x,y) &= y \end{aligned}$$

$$D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (z_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{''}{f'(z_0)} \Rightarrow f'(z_0) = 1+i0 = 1$$

Überprüfe C-R:

$$\partial_x u = 1 = \partial_y v, \quad \partial_y u = 0 = -\partial_x v \quad \checkmark$$

$$D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} (z_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} (z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bsp 2:  $f(z) := z^2$

Rechnung in  $\mathbb{R}$ :

$$f(x+iy) = (x+iy)^2 = (x^2-y^2) + 2ixy$$

$$D \begin{pmatrix} x^2-y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} (x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 & -2y_0 \\ 2y_0 & 2x_0 \end{pmatrix}$$

$$f'(z_0) = 2(x_0+iy_0) = 2z_0, \quad \text{C-R} \checkmark$$



Tatsächlich:

In  $\mathbb{C}$  lassen sich

Produktregel, Quotientenregel,

Kettenregel, Abl. der Inversen

genauso wie in  $\mathbb{R}$  beweisen.

z.B.:  $f(z) \cdot g(z) =: h(z)$

$$\Rightarrow h'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0)$$

Daher, in Bsp 2:

$$f(z) = z \cdot z$$

$$\Rightarrow f'(z_0) = \underbrace{[z]'\big|_{z_0}}_{=1} \cdot \underbrace{z\big|_{z_0}}_{=z_0} + \underbrace{z\big|_{z_0}}_{=z_0} \cdot \underbrace{[z]'\big|_{z_0}}_{=1}$$

$$= 2z_0$$



- 26 Funktionentheorie
- 27 Viele komplex diffb. Fkt.
- 28 Cauchy-Int. sätze
- 29 Varia

Def:  $f$   $\mathbb{C}$ -diffbar in ①

Gebiet  $D \Leftrightarrow$ :

$f$  holomorph  
(in  $D$ )

26  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \text{ diffbar in } z_0 \Leftrightarrow \lim_{0 \neq z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + z) - f(z_0)}{z} =: f'(z_0) \text{ existiert}$$



Wichtige Beobachtung:

$f'(z)$  existiert  $\iff$   $Df(z)$  existiert  
und:  $Df(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$(f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C})$

$(f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2)$

$$f = u + iv$$

Cor:  $f$  holomorph  $\Rightarrow \begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$

Beob.:

$f$  holomorph

$\Rightarrow u, v$  harmonisch,

dh.:  $\Delta u = \Delta v = 0$

für  $a, b \in \mathbb{R}$

Sogar:

Zu  $u$  mit  $\Delta u = 0$

gibt es  $v$  mit  $\Delta v = 0$

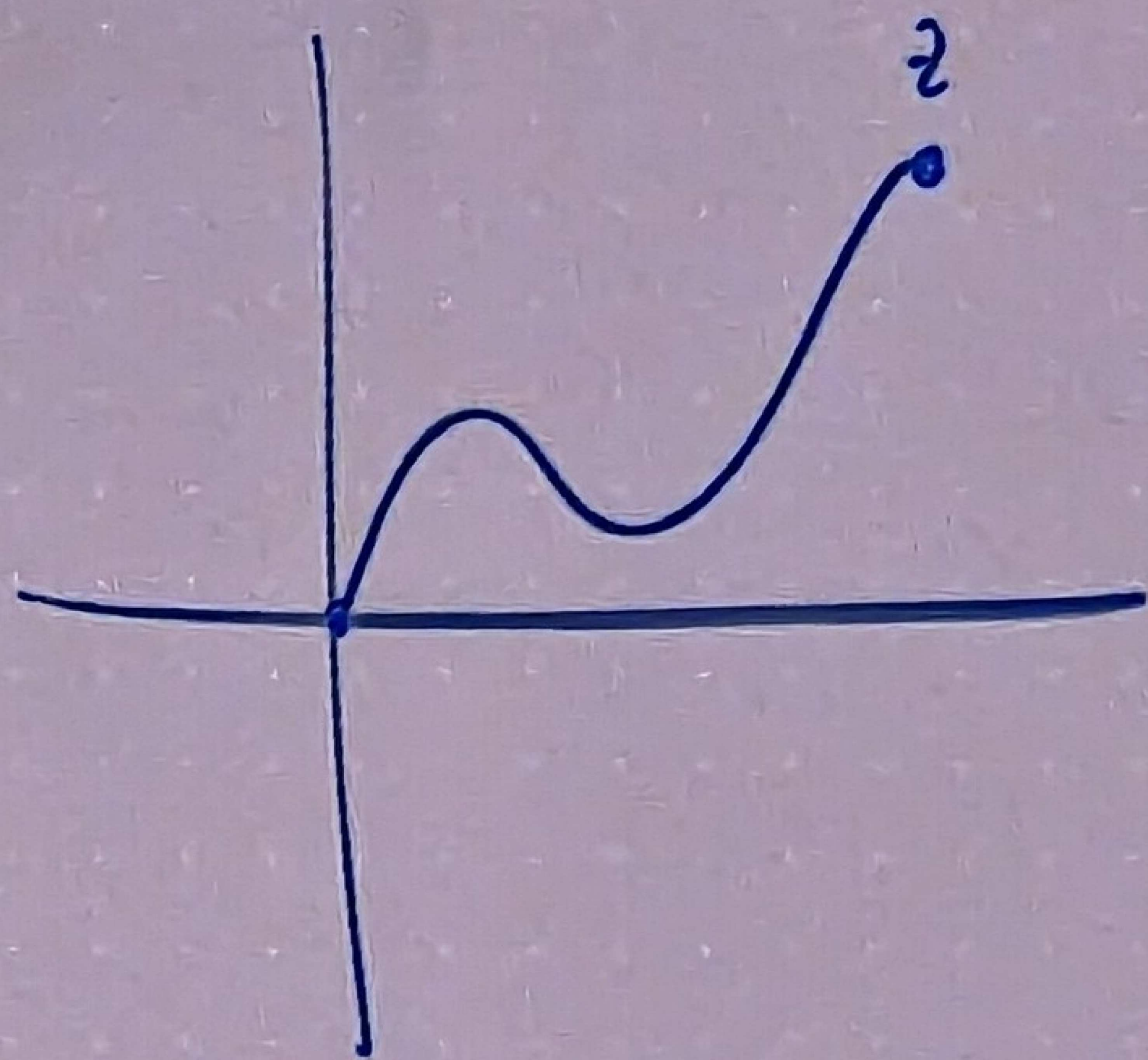
&  $f = u + iv$  holom.

!  $\nabla$   
0

falls Gebiet einfach zshgd.



# Konstruktion über Wegintegral



$$v(z) := \int_{\Gamma} \dots$$

$$\int_{\Gamma} f(z) \cdot dz := \int_0^1 f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

$\uparrow$   
 $\text{in } \mathbb{C}$

Kap. 27:

Viele holomorphe Fkt.

Bsp 1:  $f(z) := z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow f$  diffbar &  $f'(z) = 1 \quad \forall z$

Bsp 2:  $f(z) = z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$

$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$



Satz Es gelten Produktregel,

Quotientenregel, Kettenregel

und Satz über inverse Abb.

wie im Reellen.

Z.B.:  $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$  holom.,  $D \subset \mathbb{C}$   
offen

$$\Rightarrow (f \cdot g)' = f' g + f g'$$

Z.B.:  $g: D \rightarrow E$  ④  
 $f: E \rightarrow \mathbb{C}$

beide holom.,  $D, E \subset \mathbb{C}$  offen

$\Rightarrow h := f \circ g$  ist holom. mit

$$h'(z) = f'(g(z)) \cdot g'(z) \quad \forall z \in D$$



Damit: Neues Argument für  $f(z) = z^2$   
ist holom.

$$f'(z) = 1 \cdot z + z \cdot 1 = 2z$$

Ebenso alle Polynome:

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

ist holom. mit

$$f'(z) = a_n n z^{n-1} + \dots + a_1$$

## Rationale Funktionen

⑤

Seien  $f, g$  Polynome

$$\text{Dann: } h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

$h$  heißt rat. Fkt.,  $h$  ist holomorph

auf  $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\}$

$=: D$



Speziell:  $f$  &  $g$  von Ordnung 1

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

$h$  heißt Möbius-Transformation

Zwei coole Beobachtungen:

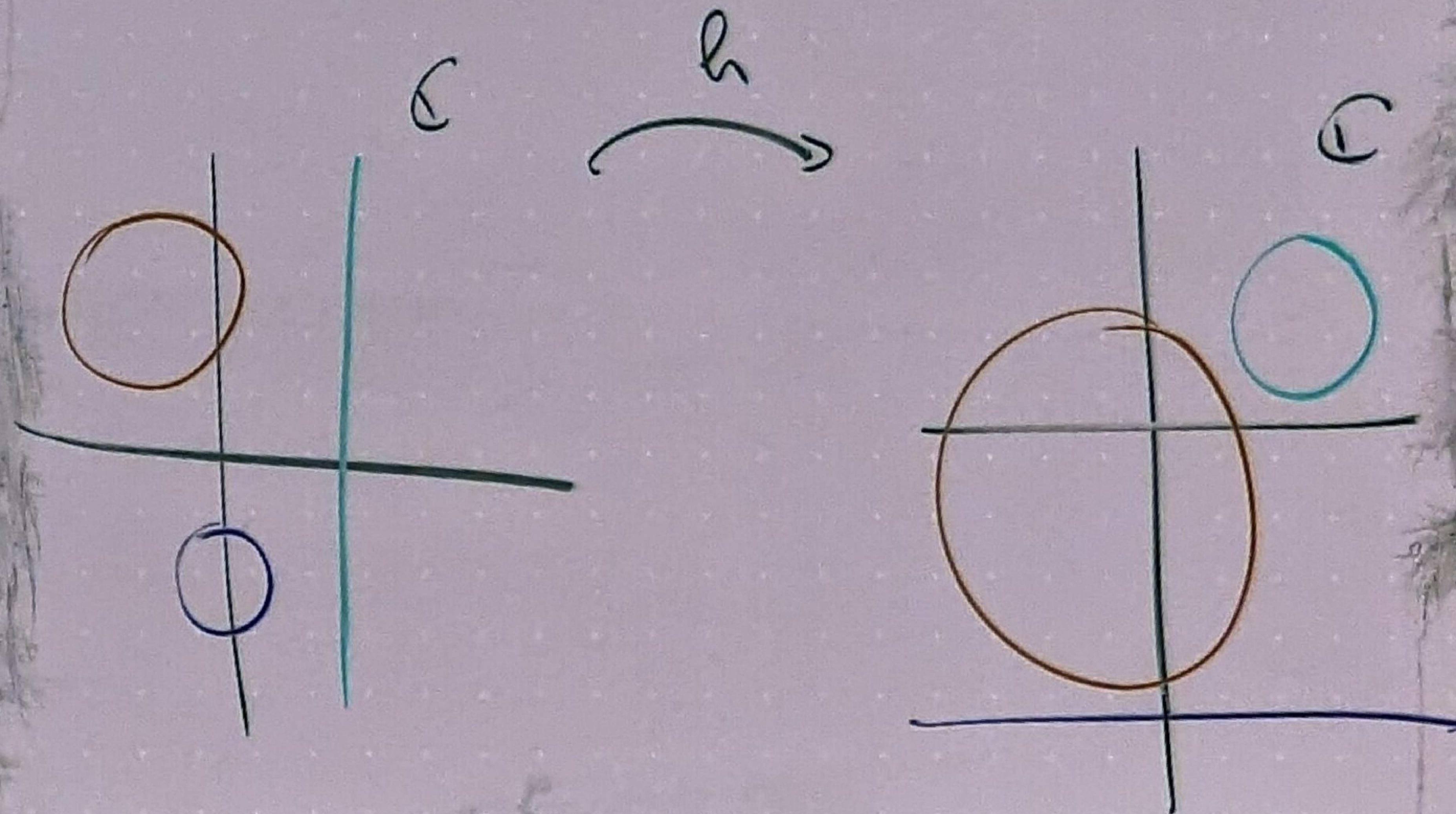
[1]  $h_1$  und  $h_2$  Möbius

$\Rightarrow h_1 \circ h_2$  wieder Möbius

[2] Möbius-Transfo bildet ⑥

$\left. \begin{array}{l} \text{Geraden} \\ \text{\& Kreise} \end{array} \right\}$  auf  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Geraden} \\ \text{\& Kreise} \end{array} \right\}$

ab.





## Die Exponentialfkt.

Wir definieren

$$e^z := \exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

Reihe konvergiert punktweise

(Nütze Quotientenkrit.,  
&  $|z^k| = |z|^k$ )

⑦

Sogar: Im

Konvergenzradius  $r = \infty$

best. glm. Konvergenz auf  
Kompakta vor.

Konsequenz:  $\exp$  ist holomorph

$$\& \quad \exp' = \exp$$



Funktionalgl.:  $e^w e^z = e^{w+z}$   
 $\forall w, z \in \mathbb{C}$

Bew: Sei  $w \in \mathbb{C}$  fest. Betrachte

$$f(z) := e^{w+z} \underline{e^{-z}}$$

Hier:  
 $e^{-z}$  steht  
für  $1/e^z$

$$f'(z) = e^{w+z} \cdot 1 \cdot \underline{e^{-z}} + e^{w+z} \underline{e^{-z}} \cdot (-1) = 0$$

exp holom.  
Produkt r.  
exp' = exp

$$\text{Also } f'(z) = 0 \quad \forall z \\ \Rightarrow f(z) = c \quad \forall z$$

Setze  $z=0$  ein:  $c = f(0) = e^w$  ⑧

$$\text{Also: } e^w = e^{w+z} \underline{e^{-z}} \quad (\exp(0)=1)$$

$$e^w \cdot e^z = e^{w+z} \quad / \cdot e^z$$

□

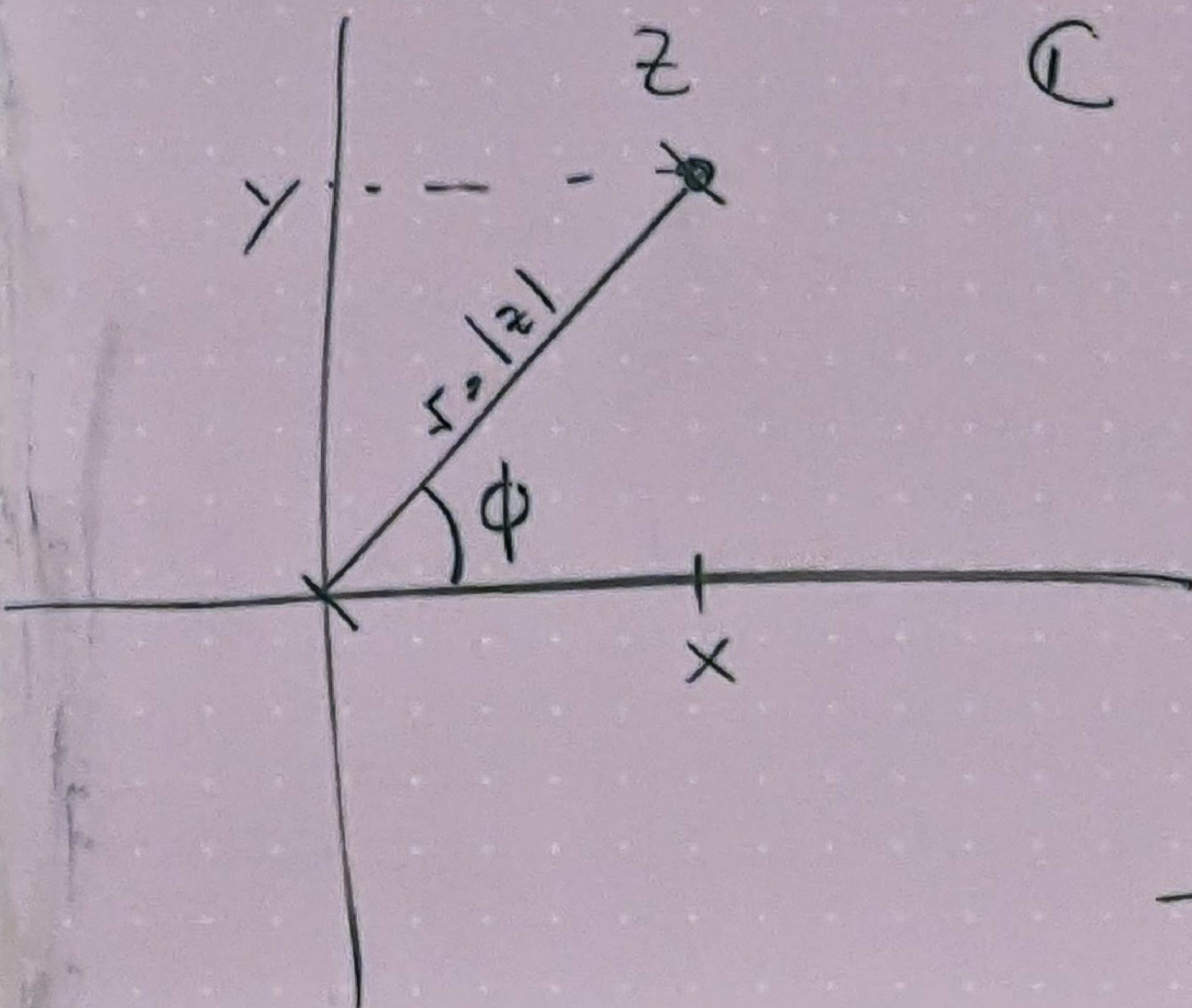


# Polar koordinaten

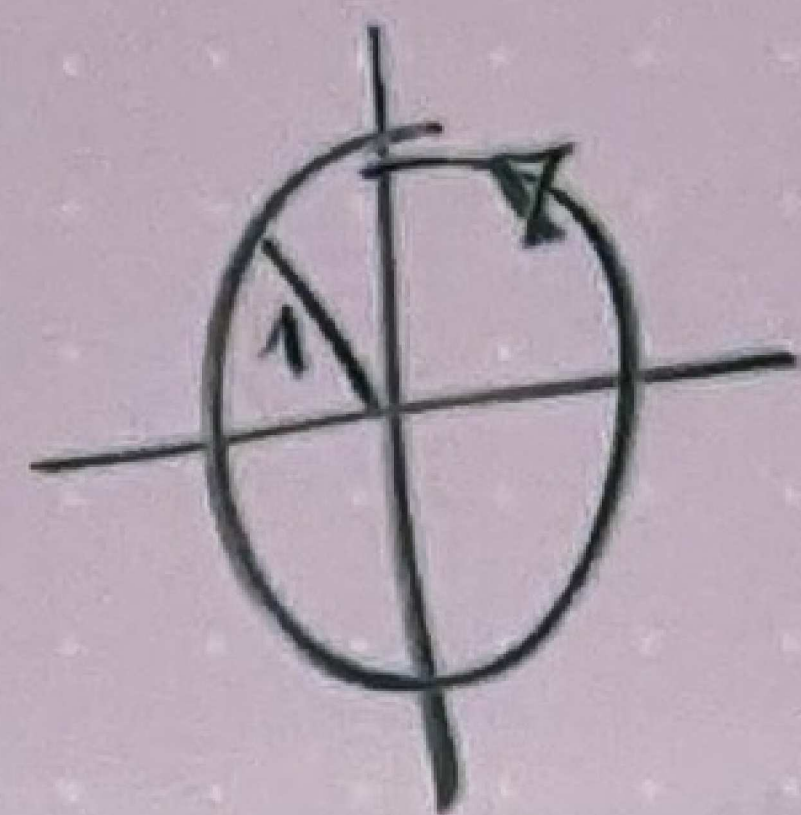
$$z = x + iy = |z| e^{i\phi}$$

$$\phi = \arg(z)$$

$\in$



$$|e^{i\phi}| = 1 \quad \forall \phi$$



Dann ist:  $e^z = ???$  ⑨

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{e^{iy}}_{|1|=1}$$

Also:  $e^z$  in Polarkoord:

$$e^z = r e^{i\phi}$$

$$\text{mit } r = e^x, \quad \phi = y$$



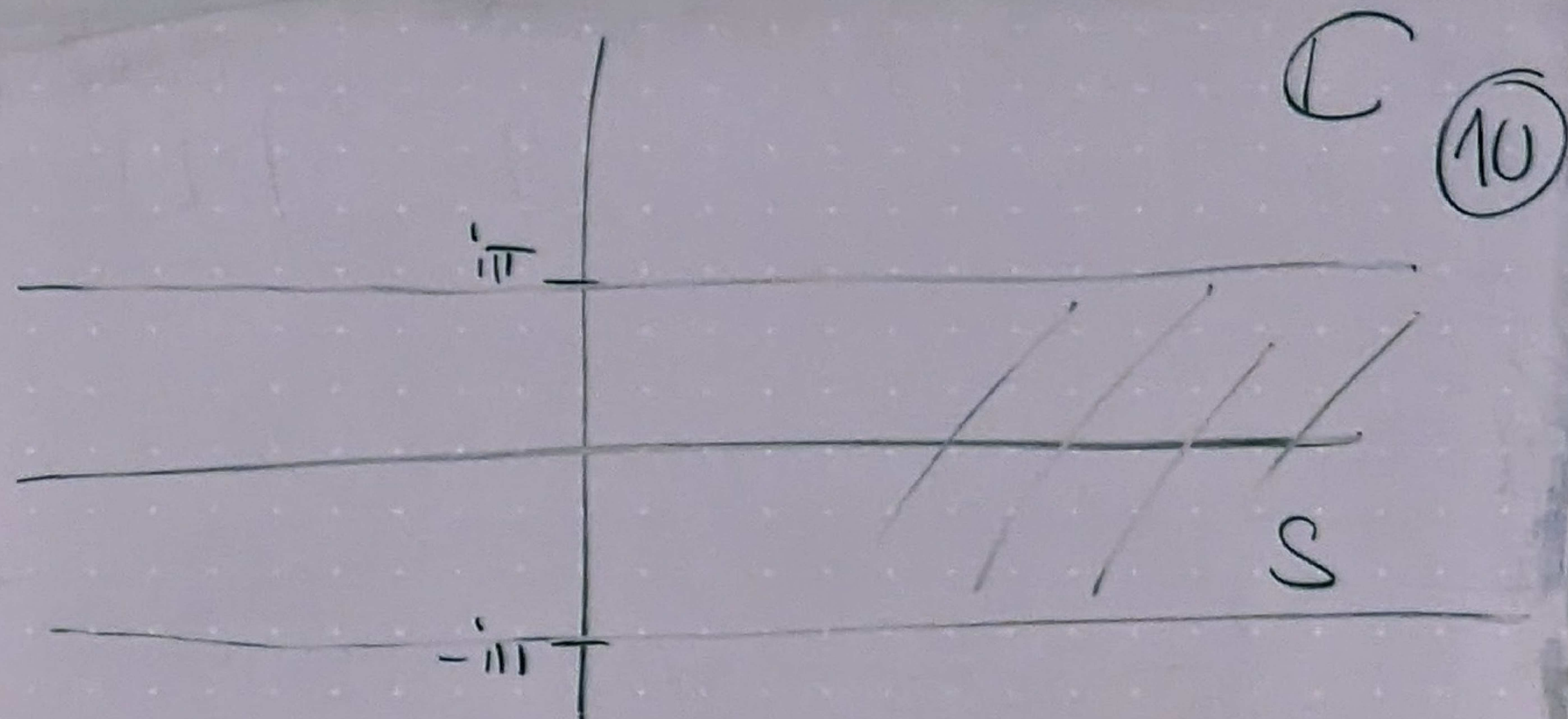
Folgerungen:

- 1)  $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- 2)  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$
- 3)  $\arg(e^z) = \operatorname{Im} z$
- 4)  $e^z = e^{z+2\pi ik} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$

Insbes.:  $\exp$  nicht injektiv

Aber:

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi)\}$$

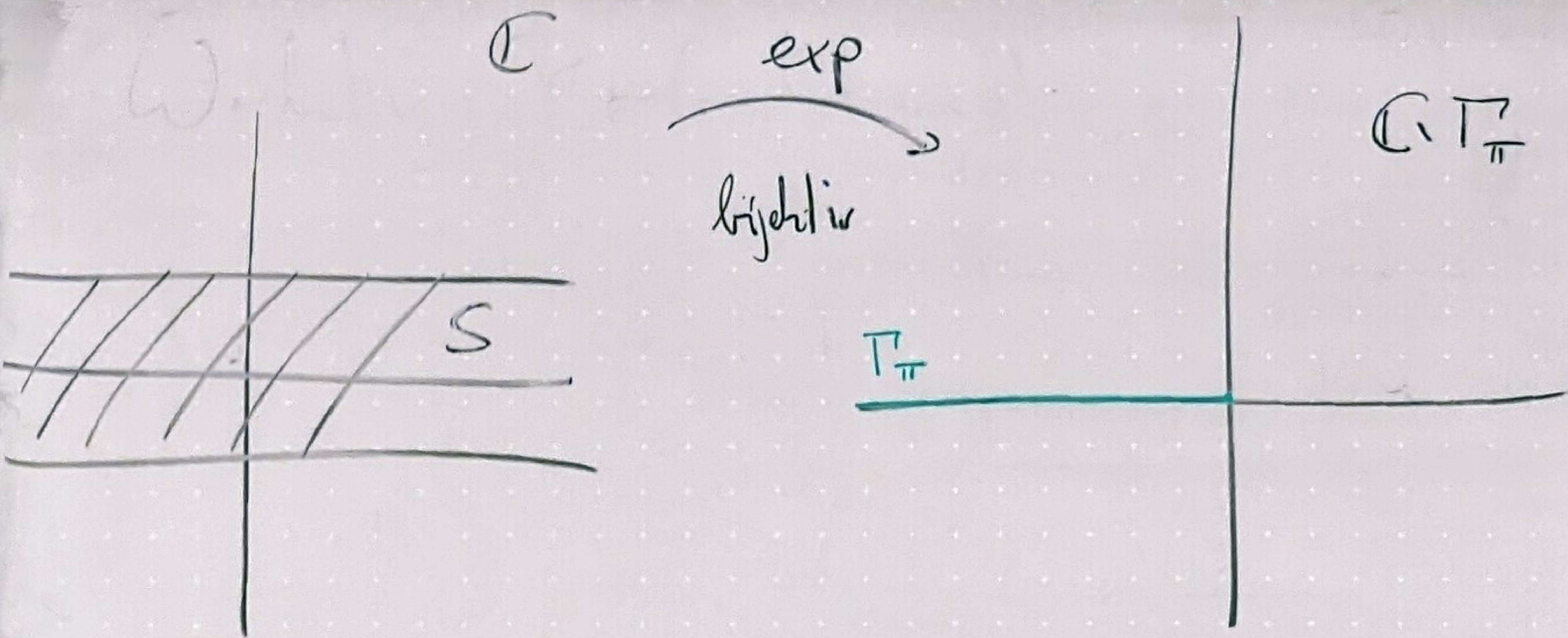


$$\exp|_S : S \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Gamma_\pi$$

bijektiv

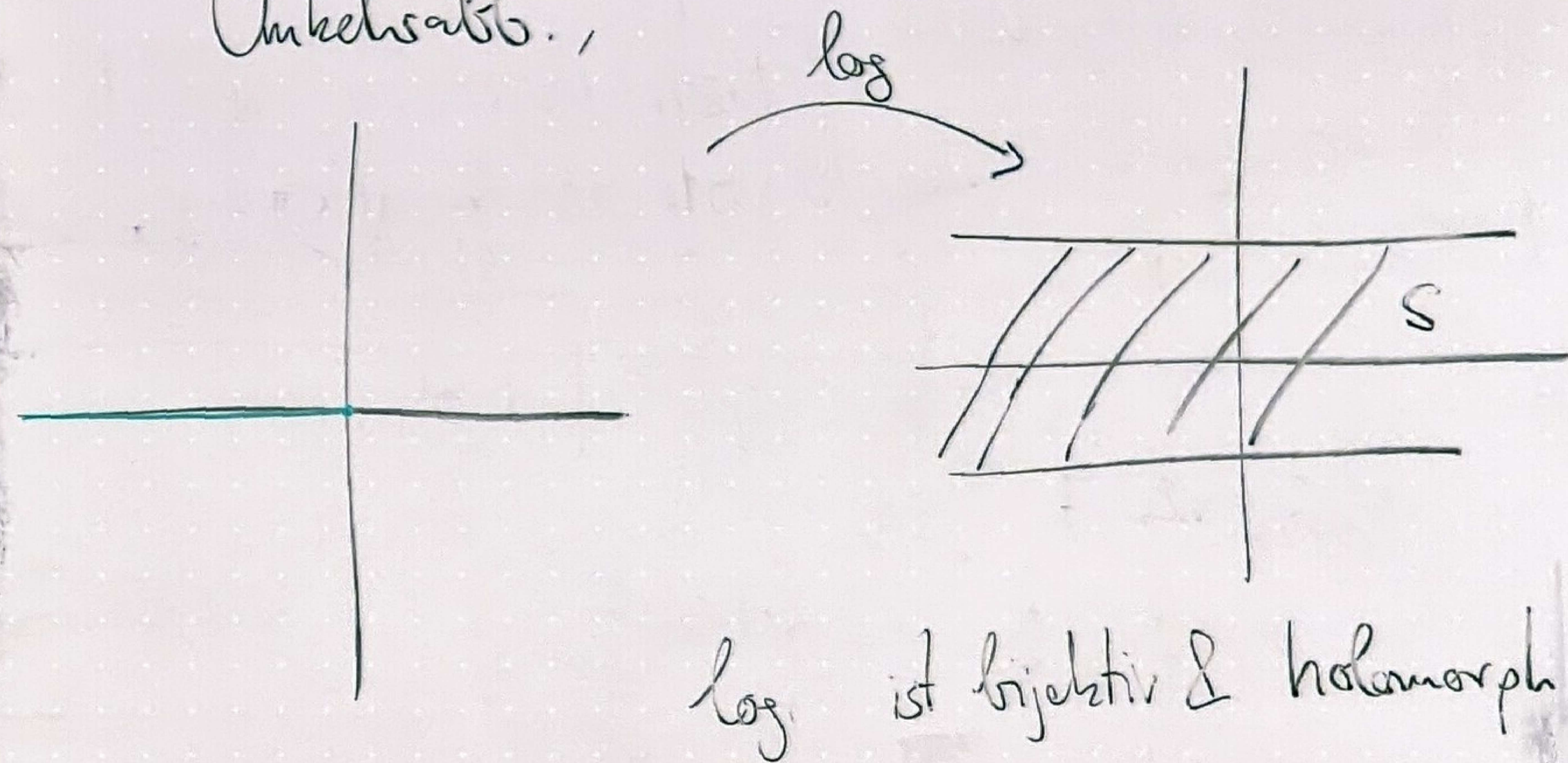
$$\Gamma_\pi := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \leq 0, \operatorname{Im} z = 0\}$$





$$\Gamma_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid z=0 \text{ oder } \arg(z) = \alpha\}$$

Diese Abbildung besitzt eine Umkehrabb.,



$\log$  ist bijektiv & holomorph

$$\log'(z) = \frac{1}{z}$$



## Zwei Erweiterungen / Ergänzungen

Man kann auch definieren:

$$\arg: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$$

$$\log(re^{i\phi}) := \log(r) + i\varphi$$

$$r > 0$$

(R-Log.)

$\varphi$  sodass  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  und  $\varphi - \phi \in 2\pi\mathbb{Z}$

Noch eine Möglichkeit:

$$\alpha \in \mathbb{R}, \quad S_\alpha := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in (\alpha, \alpha + 2\pi)\}$$

$$\exp: S_\alpha \rightarrow \mathbb{C} \setminus \Gamma_\alpha$$

bijektiv

$\leadsto$  Umkehrfkt. "log"

Warnung: Das ist eine andere Abb.!



$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$f$  holomorph

↳ C-R:

$$\partial_x u = \partial_y v$$

$$\partial_x v = -\partial_y u$$

$$f'(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Viele holom. Fkt.

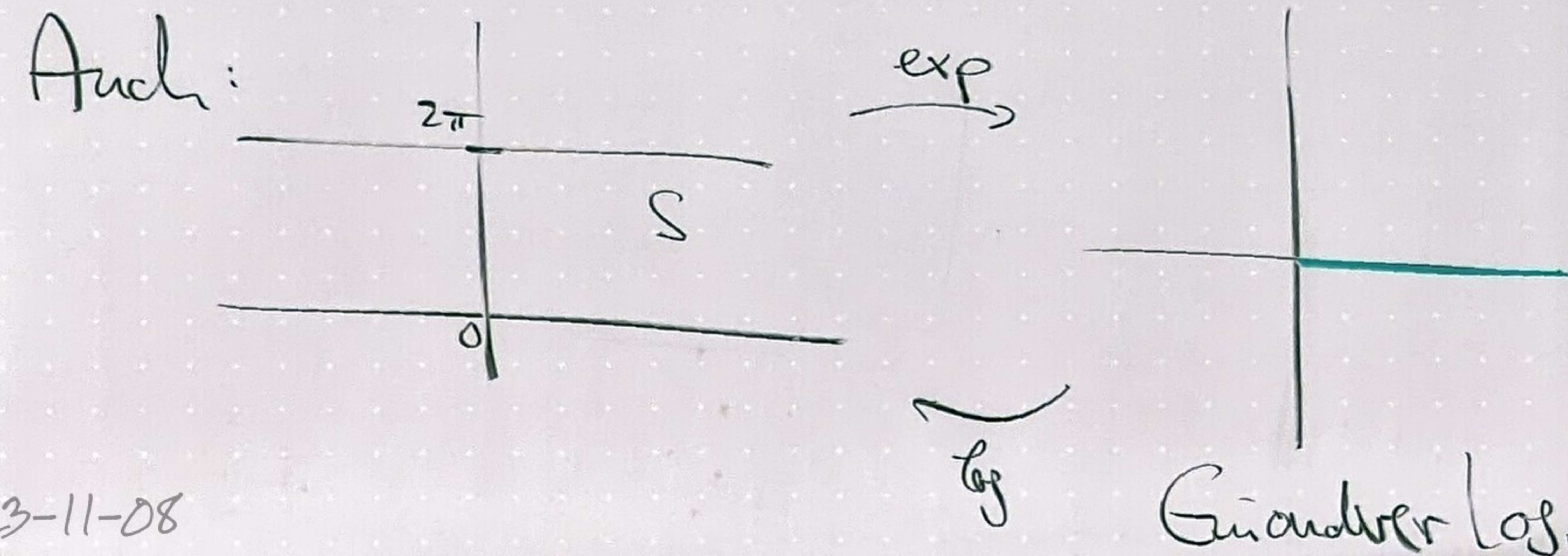
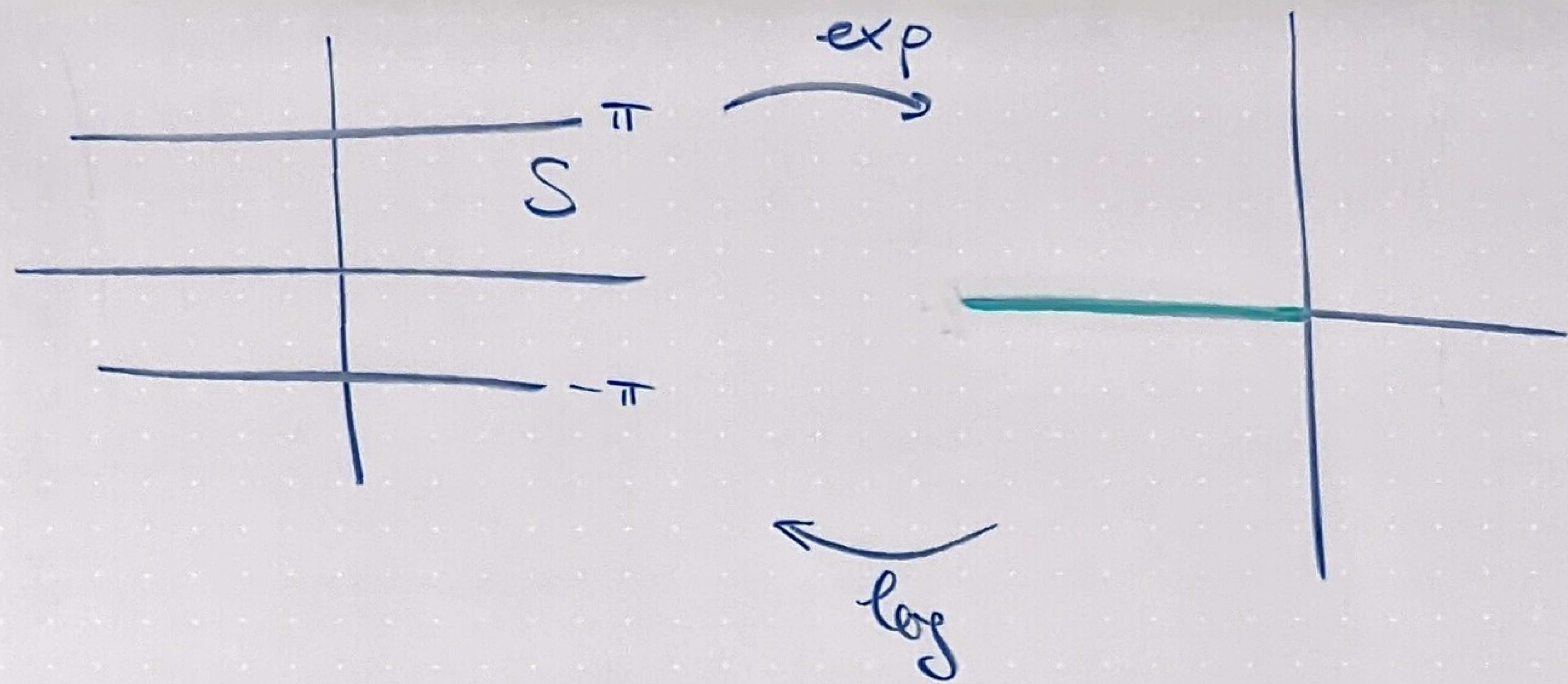
①

Polynome:  $\sum_{j=0}^n a_j z^j$

Rat. Fkt:  $f = \frac{P}{Q}$

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k$$

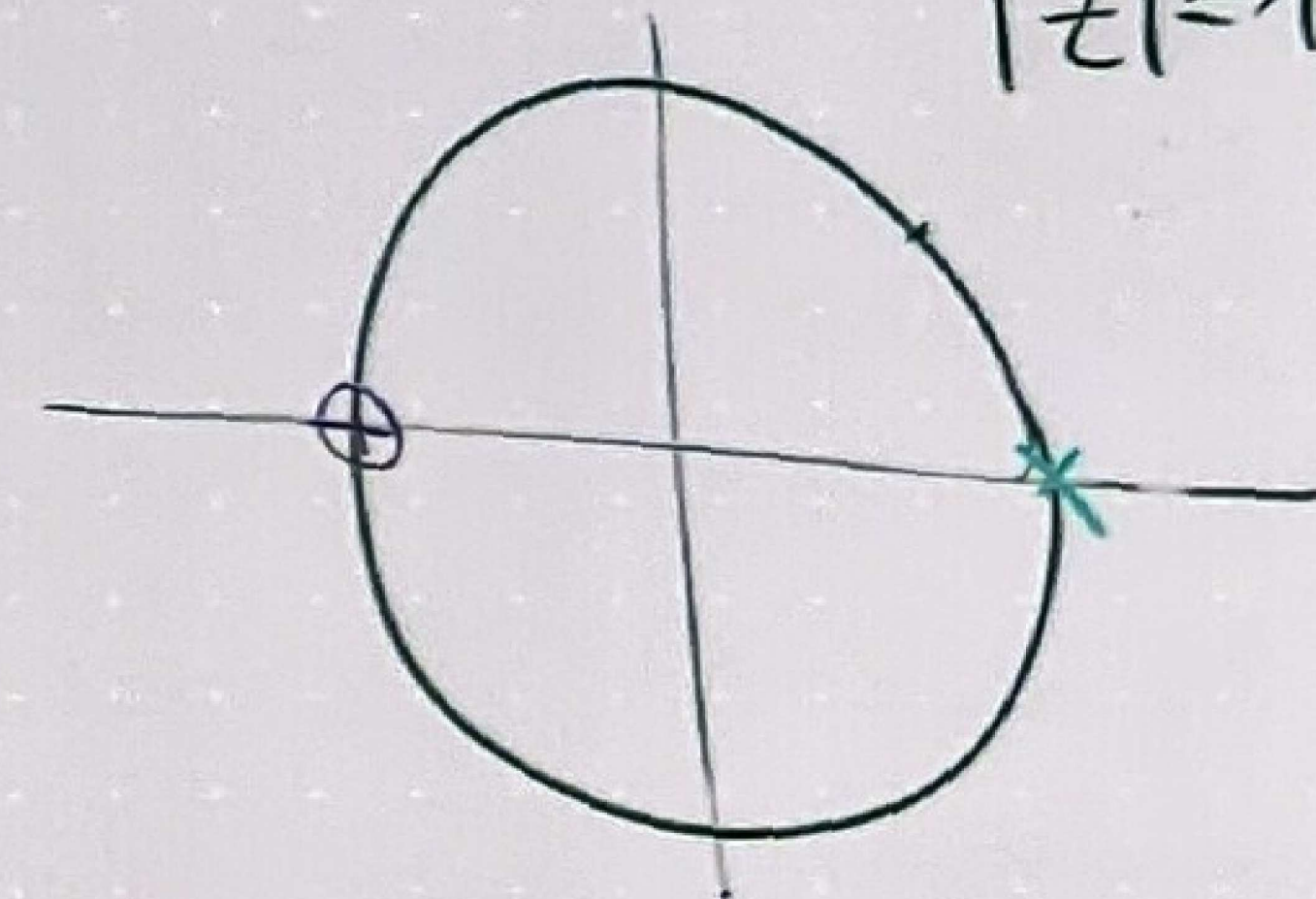
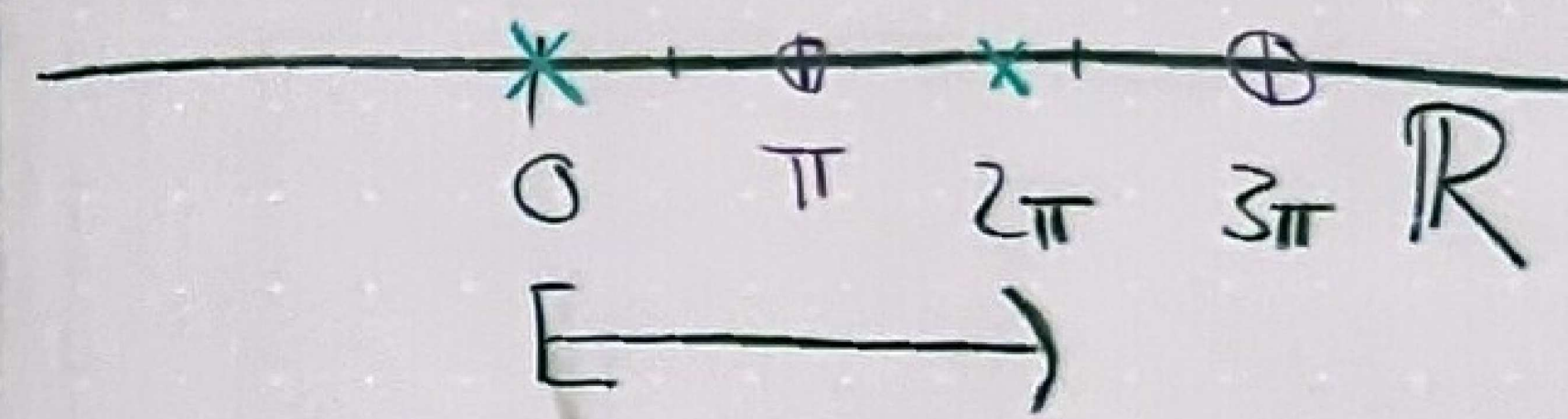




2023-11-08

Bild: "Überlagerungen" ②

$$\mathbb{R} \ni \phi \mapsto e^{i\phi} \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z|=1\}$$



nicht invertierbar  
auf  $[0, 2\pi)$  invertierbar

Gegensatz log!