

Dann: In der Darst. von f

$$c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}$$

$$= c_k e^{ikx} + \overline{c_k} e^{ikx}$$

$$= 2 \operatorname{Re}(c_k e^{ikx})$$

$$= 2 (\operatorname{Re} c_k) \cos kx$$

$$- 2 (\operatorname{Im} c_k) \sin kx$$

Ergebnis:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

$$= c_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

$$a_k = 2 \operatorname{Re} c_k$$

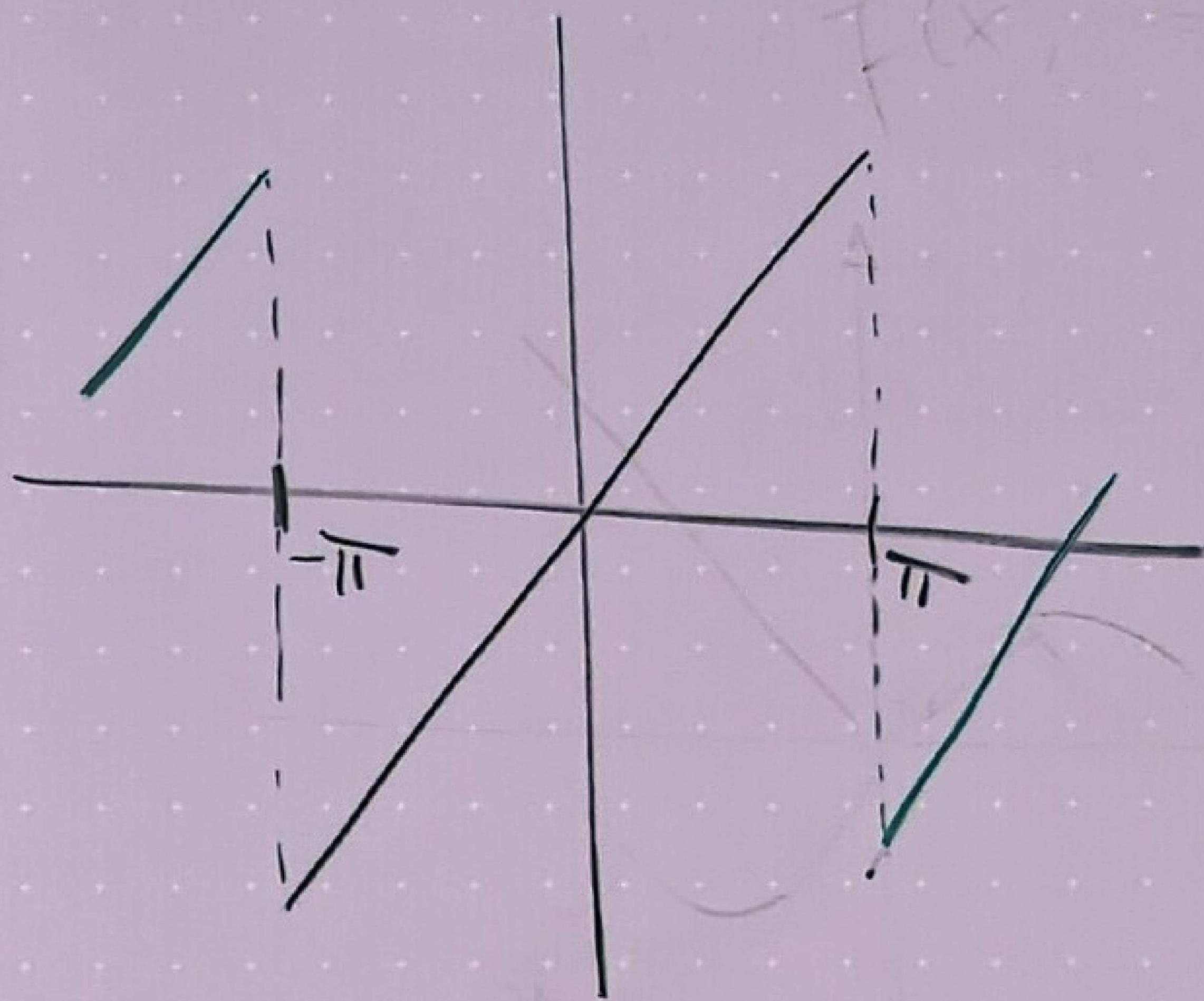
$$b_k = -2 \operatorname{Im} c_k$$

⑨

Beispiel: Sägezahn

$$f(x) = x \quad x \in (-\pi, \pi)$$

$$f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$



$$c_k \stackrel{(!)}{=} \langle f, e^{ikx} \rangle$$

(10)

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_x e^{-ikx} dx$$



$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{1}{(-ik)} e^{-ikx} dx$$

$$+ \frac{1}{2\pi} x \frac{1}{(-ik)} e^{-ikx} \Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \pi \cdot \frac{i}{k} \cdot 2(\pm 1)$$

$$= \pm i \frac{1}{k}$$

$$\text{NR: } e^{-ikx} \Big|_{\pm\pi} = (\pm 1)$$

+1 falls k gerade



$$\text{Also: } f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{i}{k} (-1)^k e^{ikx}$$

$$= - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} (-1)^k \sin kx$$

$$b_k = -2 \operatorname{Im} c_k = -2 \frac{(-1)^k}{k}$$

$$= 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right]$$

Fourier-Reihen

$(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ONS in X

$$\forall f \in X: f^* := \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k v_k$$

$$a_k = \langle f, v_k \rangle$$

$$(v_k)_k \text{ vollst.} \Rightarrow f^* = f.$$

$$X := L_\pi := L^2((- \pi, \pi), \mathbb{C}) \quad (1)$$

$$:= \left\{ f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{C} \mid \right.$$

$$\left. f \text{ messbar, } \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 < \infty \right\}$$

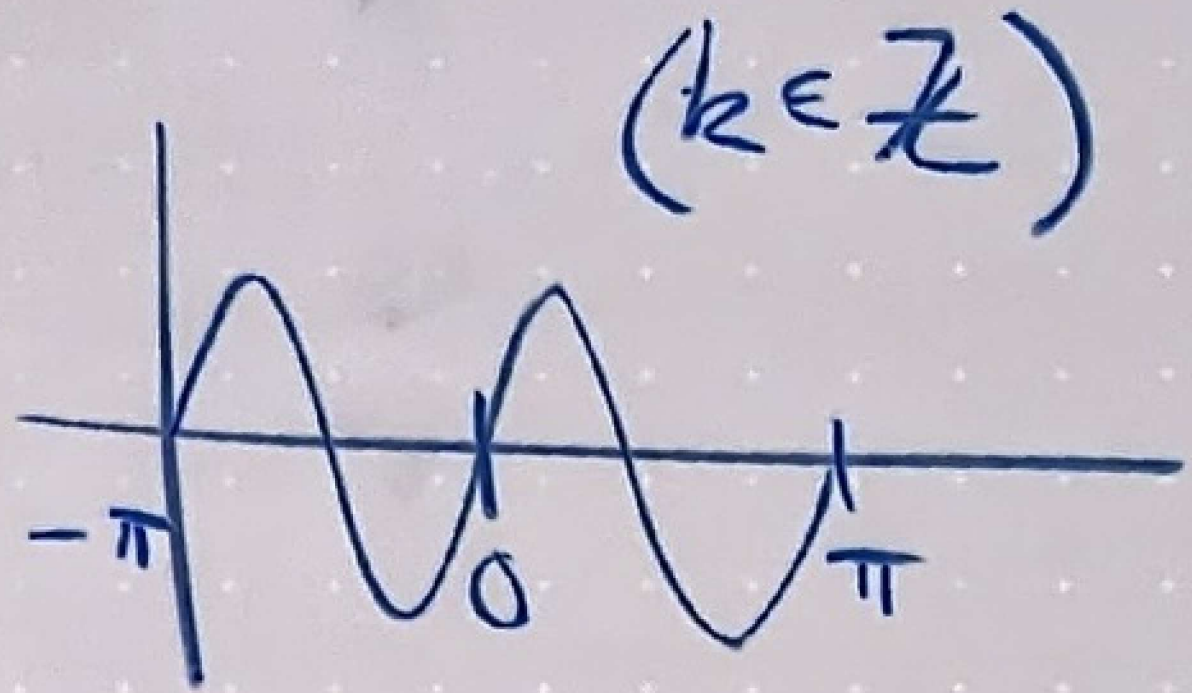
exist.

X ist HR

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$v_k(x) := e^{ikx}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$v_k \in L_\pi$$



$$\operatorname{Im} e^{2ix}$$

$$\text{ONS: } \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} \overline{e^{ilx}} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)x} dx$$

$$\langle v_k, v_l \rangle$$

$\equiv$

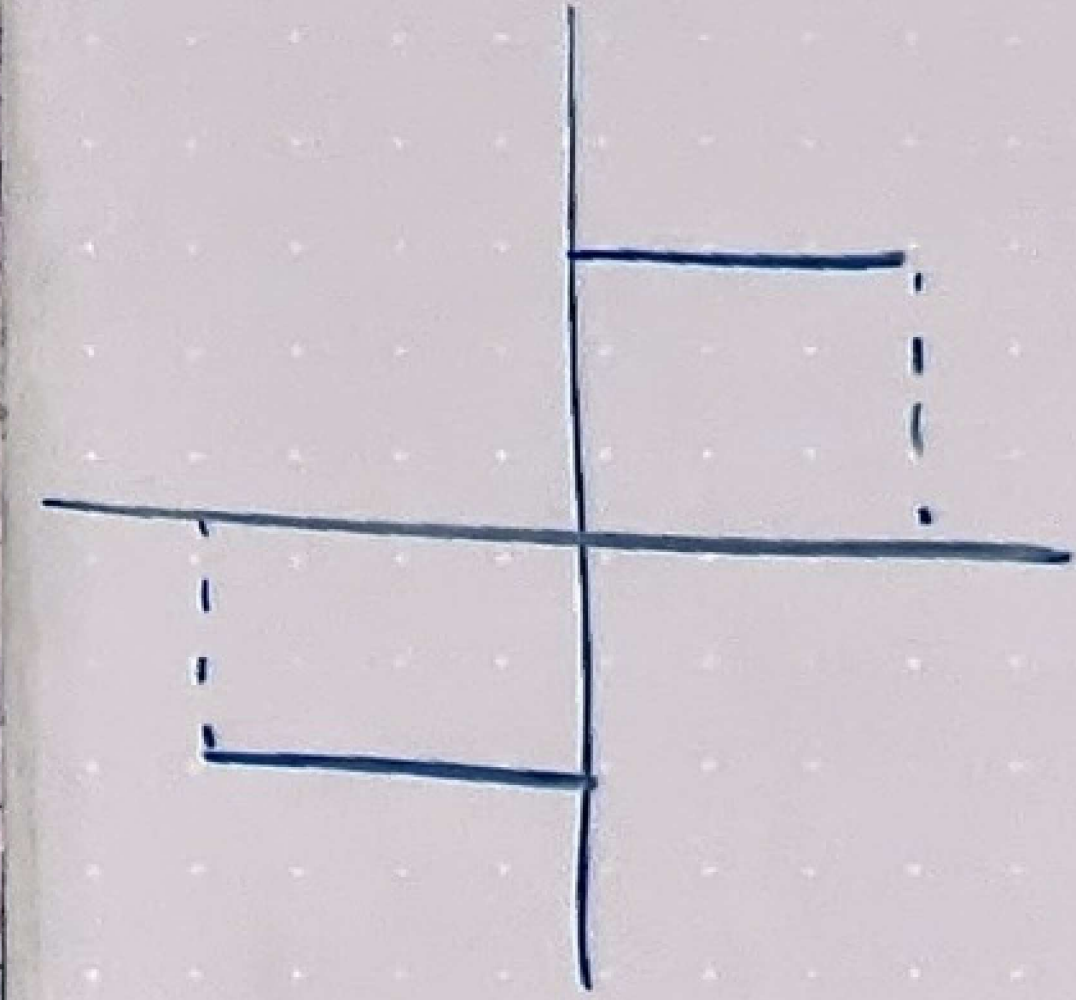
$$\begin{cases} 0 & k \neq l \\ 1 & k = l \end{cases}$$

Viel schwieriger zu zeigen:

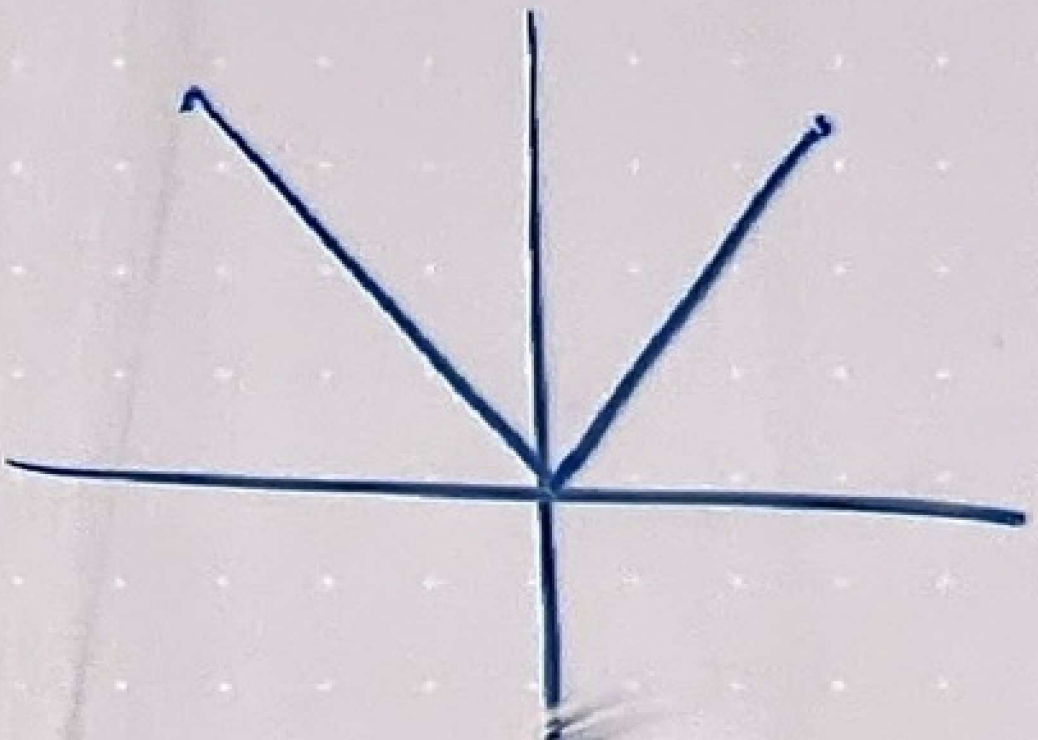
Satz: $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ist vollst. ONS in $X = L_\pi$.

Damit berechenbar:

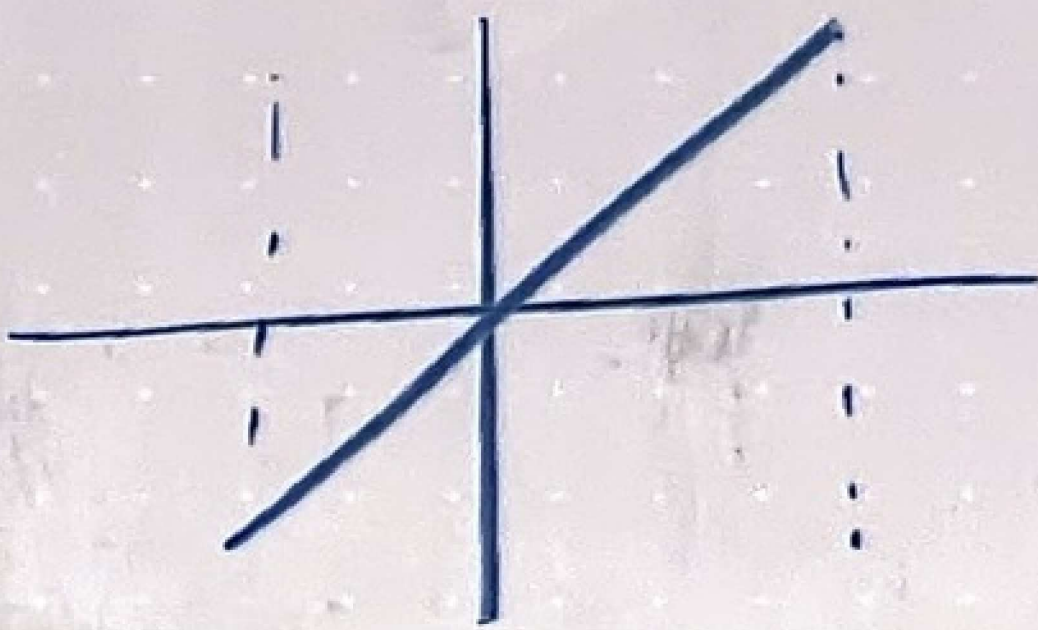
②



$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$$



$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots \right]$$



$$f(x) = 2 \left[\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right]$$

f reellwertig, $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$

③

Dann: $f = \sum_{l \geq 0} a_l \cos lx + \sum_{l \geq 1} b_l \sin lx$

mit $a_l := 2 \operatorname{Re} c_l$,
 $b_l := -2 \operatorname{Im} c_l$
 $a_0 :=$

Aber auch umgekehrt: $(a_l \in \mathbb{R})$

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{N}_{>0}} a_l \cos(lx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$
$$= \frac{1}{2} (e^{ilx} + e^{-ilx})$$

$$c_k := \begin{cases} \frac{1}{2} a_k & \text{für } k > 0 \\ \frac{1}{2} a_{-k} & \text{für } k < 0 \end{cases}$$

Vollständigkeit

- 1) Konsequenzen der Vollst.
- 2) Wie beweist man Vollst.?

$$1) \textcircled{a} \forall f \in L_{\pi}$$

$$\exists (c_k)_{k \in \mathbb{Z}}, c_k \in \mathbb{C} \forall k:$$

$$(*) \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

Dabei:

(i) c_k ist gegeben durch

$$c_k = \langle f, e^{ikx} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$$

(ii)

(*) bedeutet: Mit

$$f_N := \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} \quad \text{gilt}$$

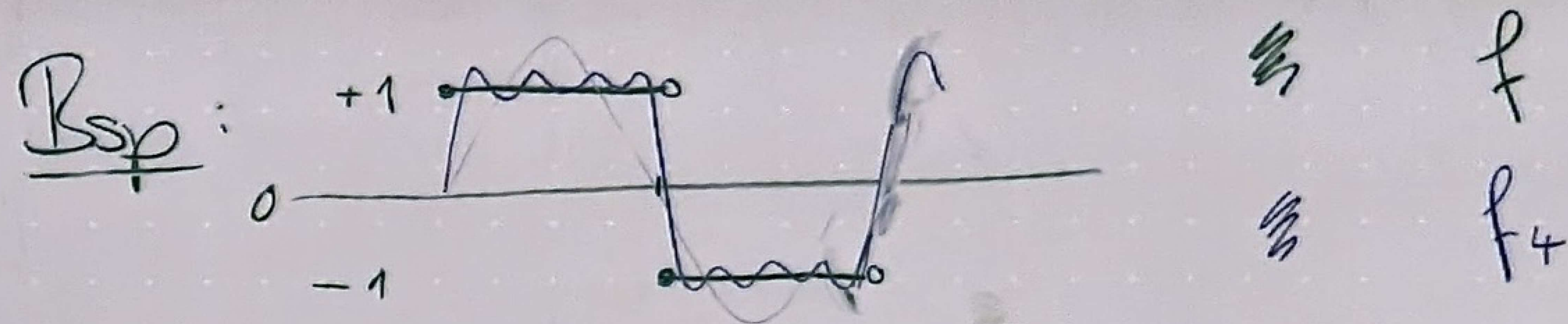
$$f_N \xrightarrow{L_\pi} f,$$

das heißt: $\|f - f_N\|_{L_\pi}^2 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

also: $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_N(x)|^2 dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$

Dies impliziert nicht die ptweise Konvergenz!

(Erst recht nicht: gleichmäßige Konv.!) keine ptw. Konv.!



Wegen Symmetrie: $f_N(0) = 0$

Unsere Wahl: $f(0) = -1$

Also: $f_N(x_0) \not\rightarrow f(x_0)$

$$x_0 = 0$$

Sowieso nicht gleichmäßig: f_N st., $f_N \rightarrow f$ glm $\Rightarrow f$ st.

⑥ Bessel wird zu Gleichung

$$\|f\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2$$

$$\stackrel{!}{=} \|(c_k)_k\|_{l^2(\mathbb{Z})}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2$$

" $\geq$ " gilt immer (Bessel-Ungl.)

⑦ L^2 -Konvergenz in (*)

$$\text{impliziert: } f_N(x) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} f(x) (**)$$

für fast alle $x \in (-\pi, \pi)$

Das heißt: $\exists N \subset (-\pi, \pi)$,
Maß der Menge N : $|N| = 0$ mit

(**) gilt für alle $x \notin N$.

(aus Lebesgue-Th.)

(vgl. Bsp)

Im Bsp:

f_{10}

f_{20}

Über-
schwingung

etwa 9%
der Höhe

Gibbs-Phänomen

$$f_N \rightarrow f \text{ in } L^2$$

nur im Integral-Sinn!

2) Wie beweist man
Vollständigkeit
→ nach den Ferien

Eine Methode:

Man zeigt:

Satz: $f \in C^0_{\text{per}}([-\pi, \pi], \mathbb{C})$

und f Lipschitzstetig

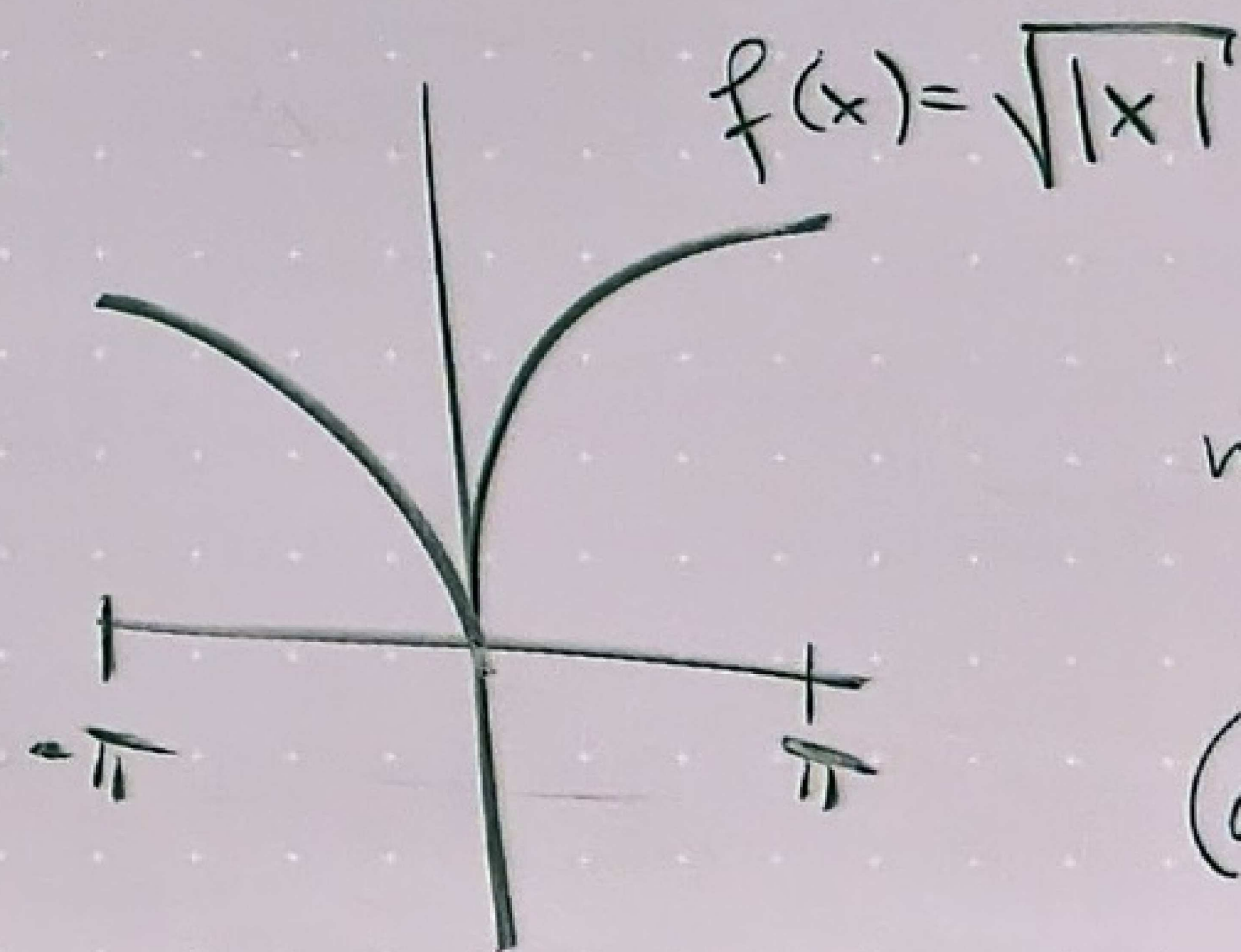
$$\left(\text{d.h.: } |f(x) - f(y)| \leq C |x - y| \right) \textcircled{8}$$

$\forall x, y$, ein $C > 0$.

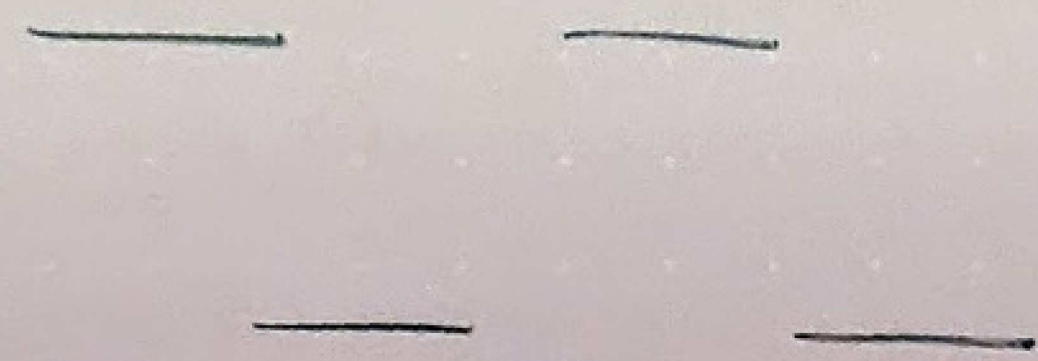
Dann: $f_N(x) \longrightarrow f(x)$
 $\forall x$

also: punktweise Konvergenz.

Bsp:



nicht Lipschitz
(aber stetig)



unstetig



— " —

$f_N \rightarrow f$ ptw.
fast überall

g)



stetig, sogar Lipschitz

$\leadsto$ ptw. Konv. $f_N \rightarrow f$

Tatsächlich: Falls $|c_k| \leq \frac{C}{|k|^2}$ für ein C ,

dann gilt

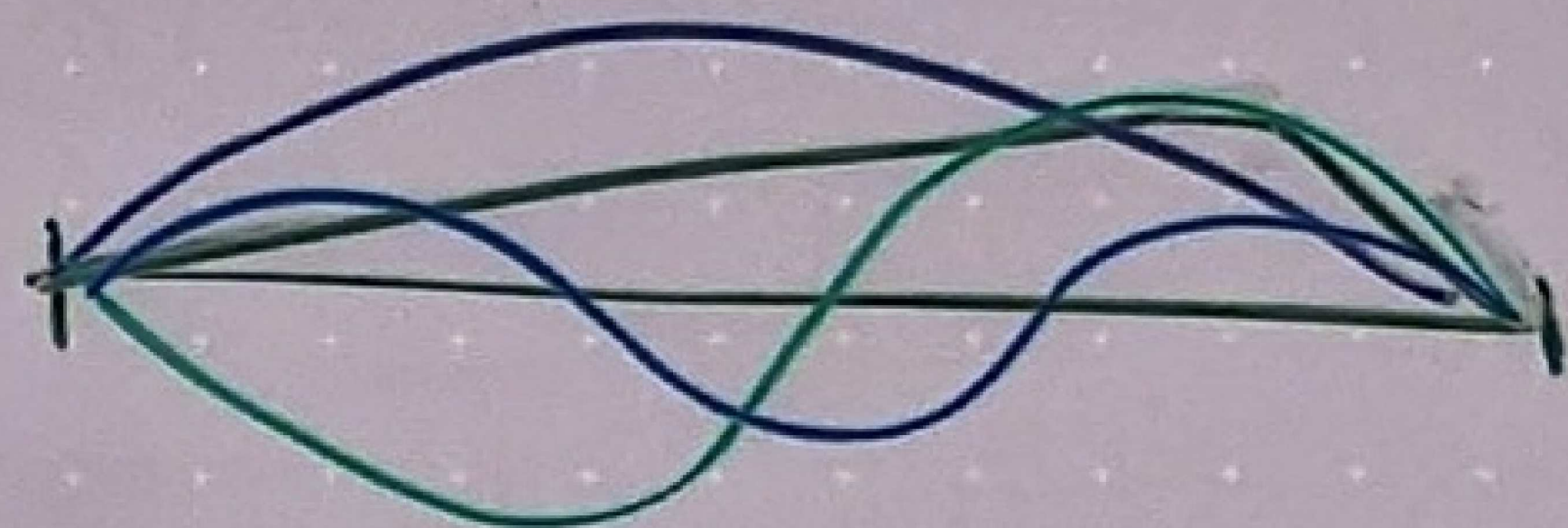
$$|f(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k e^{ikx}| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{C}{|k|^2} < \infty$$

Also: Reihe $f_N(x) = \sum_{-N}^N c_k e^{ikx}$
 konvergiert für alle x .

Falls $|c_k| \sim \frac{1}{k}$: $\sum c_k e^{ikx}$??

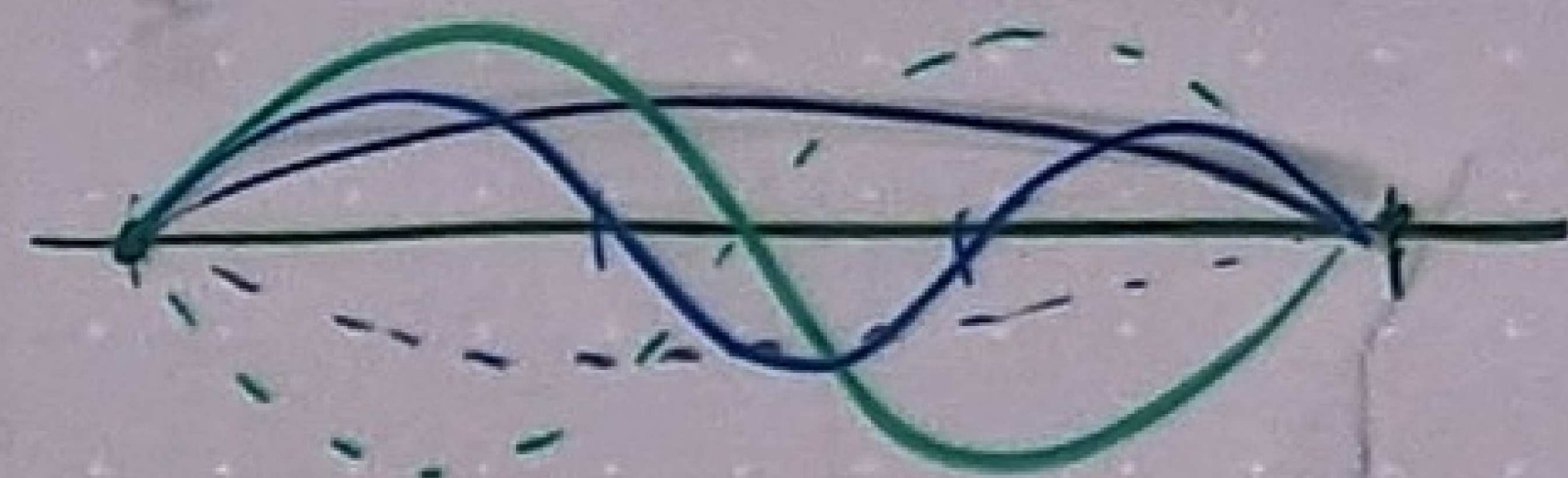
Anzupfen der Saite

$$f = \sum c_k e^{ikx}$$



Man hört alle Vielfachen Frequenzen des

Instrument:



Saite $\text{///} : 1$
 $\text{///} : 2$
 $\text{///} : 3$

Blasinstrument



Wegen Wellenl. : Freq. von

Grundtons! → "Overtöne"

$\text{///} 400\text{Hz}$
 $\text{///} 800\text{Hz}$
 $\text{///} 1200\text{Hz}$

Fourier — nochmal
(& Abschluss)

$$L^2((0, 2\pi)) =: L^2_{2\pi}$$

$f \in L^2_{2\pi}$ ist eine Abb.

$$f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\text{mit } \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$$

Und: $L^2_{2\pi}$ ist ein

Hilbertraum:

VR (über $\mathbb{C}$), vollständig

und hat Skalarprodukt:

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

$$\left(\text{mit } \langle f, f \rangle = \|f\|^2 \right)$$

Die Fkt.: $v_k: x \mapsto e^{ikx}$
($k \in \mathbb{Z}$)

sind orthogonal:

$$\langle v_k, v_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikx} e^{-ilx} dx$$

Abstrakte HR-Theorie: $= \delta_{kl}$

$$f \in X := L^2_{2\pi}$$

$$\text{Dann: } f_N := \sum_{k=-N}^N c_k v_k$$

2024-01-08

mit $c_k := \langle f, v_k \rangle$

(2)

Dann: f_N ist beste Approx. von f

mit $v_{-N}, \dots, v_N$

Es gilt der Satz:

Falls $(v_k)_k$ ein vollständiges ONS,

so gilt

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N \quad \text{im HR } X.$$

Def: $(v_k)_k$ ist vollst., falls

gilt:

$$\langle f, v_k \rangle = 0 \quad \forall k$$

$$\Rightarrow f = 0$$

Danke an: $X = \mathbb{R}^3$, $v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\{v_1, v_2\}$ sind

$$v_2 = e_2$$

nicht vollständig in $\mathbb{R}^3$

Beweisskizze des Satzes:

Sei $f \in X$ beliebig.

$$\text{Definiere } f_N := \sum_{k=-N}^N \underbrace{\langle f, v_k \rangle}_{=c_k} v_k$$

Dann: f_N ist Cauchy-Folge in X

(Abfall der c_k , Bessel)

$$X \text{ vollst.} \Rightarrow \exists \text{ Limes } f^* = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N$$

③

Limes f^* erfüllt:

$$\langle f^* - f, v_k \rangle$$

$$= \langle f^*, v_k \rangle - \underbrace{\langle f, v_k \rangle}_{= c_k}$$

$$= \underbrace{\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \langle f_N, v_k \rangle \right)}_{= c_k} - c_k$$

$$= 0$$

$\forall k$

$(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ vollst. $\Rightarrow f^* = f$ $\square$

(4)

Was noch fehlt:

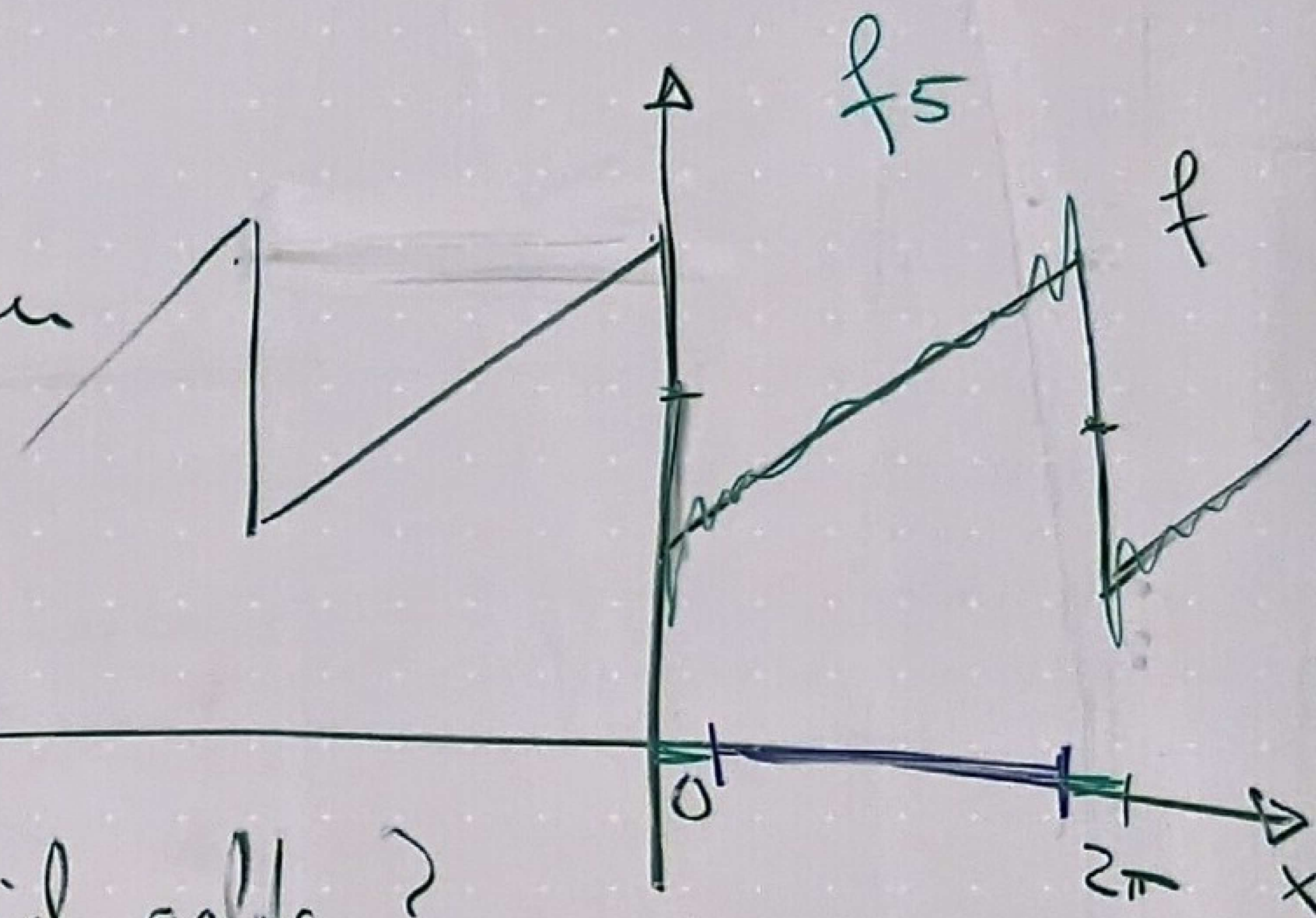
Satz: $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$v_k(x) = e^{ikx}$ ist vollständig

in $X = L^2_{2\pi}$.

Bemerkungen

1.) Gibbs-Phänomen



Frage: Kann denn $f_N \rightarrow f$ wirklich gelten?

Überschwingung etwa 9%, für alle N

Ja, $f_N \rightarrow f$ kann in $L^2_{2\pi}$ gelten:

2024-01-08

(5)

• Auf einem schmalen Streifen um Sprungstelle (Breite $\sim \frac{1}{N}$?) ist $|f_N - f|$ groß (Ordnung 1)

• Auf dem Rest: $f_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x)$

Damit: $\|f_N - f\|_{L^2_{2\pi}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_N - f|^2(x) dx \rightarrow 0$

• klein für $x \in (\delta, 2\pi - \delta)$
• $\int_0^\delta 1 \sim \delta$

Im Allgemeinen:

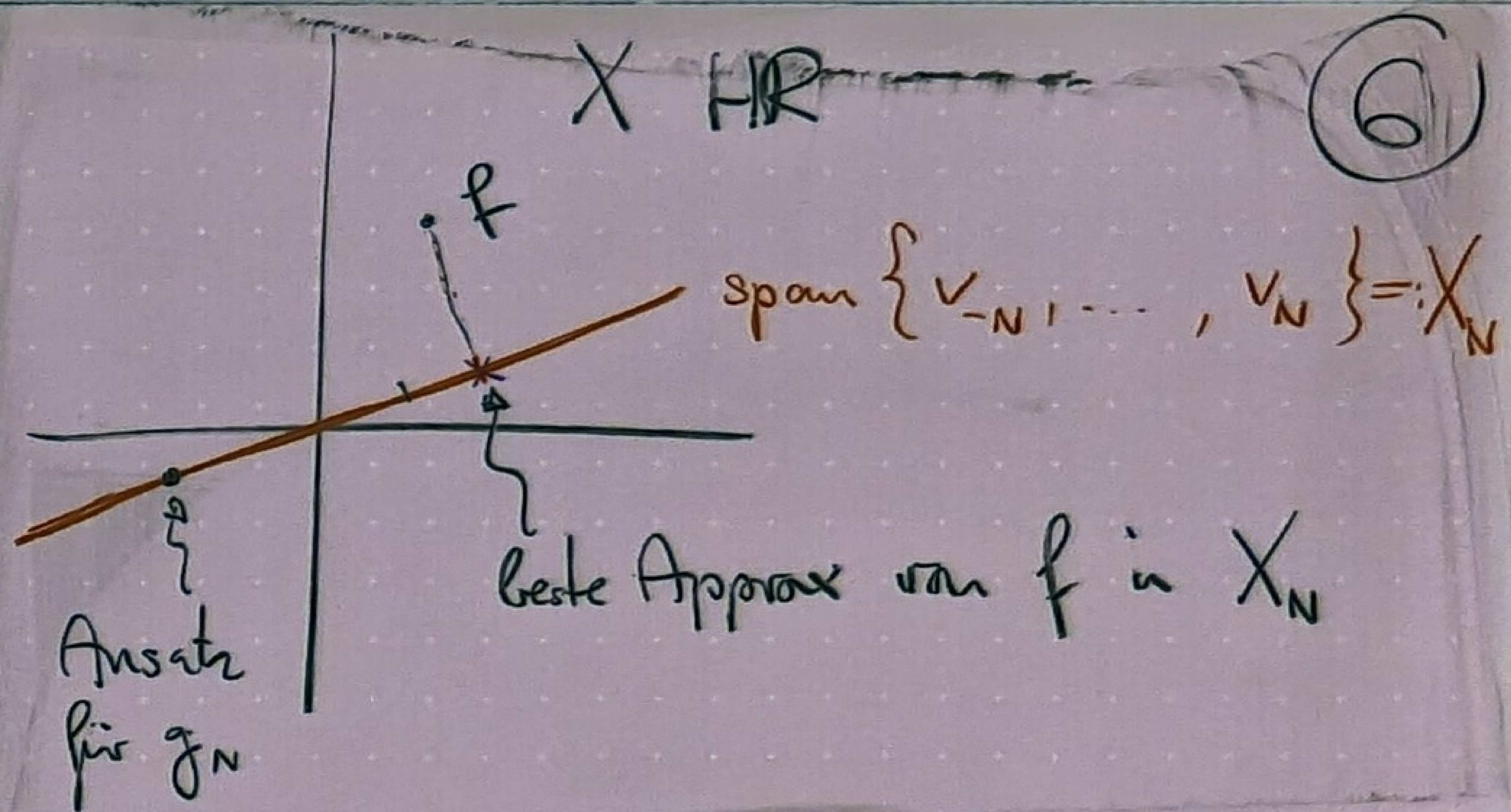
- Keine punktweise Konvergenz
- Keine gleichmäßige Konv.

Aber: L^2 -Konv.

2.) Beste Approximation

Sei $f \in X = L^2_{2\pi}$

$$\text{und } g_N := \sum_{k=-N}^N a_k v_k$$



$$\|f - g_N\|_{L^2}^2 = \left\langle f - \sum_{k=-N}^N a_k v_k, f - \sum_{k=-N}^N a_k v_k \right\rangle$$

$$\boxed{f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k v_k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 - 2 \sum_{k=-N}^N \text{Re } a_k \bar{c}_k$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \notin \{-N, \dots, N\}} |c_k|^2 + \sum_{k=-N}^N |a_k - c_k|^2 + \sum_{k=-N}^N |a_k|^2$$

Beweis der Vollständigkeit

von e^{ikx} in L^2

Reicht zu zeigen: Für

glatte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (2π -period)

gilt

$$f_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x)$$

für alle x .

Tatsächlich:

$L^2_{2\pi}$ ist der Abschluss
der glatten Fkt., daher
reicht das!

Jetzt, als Notation:

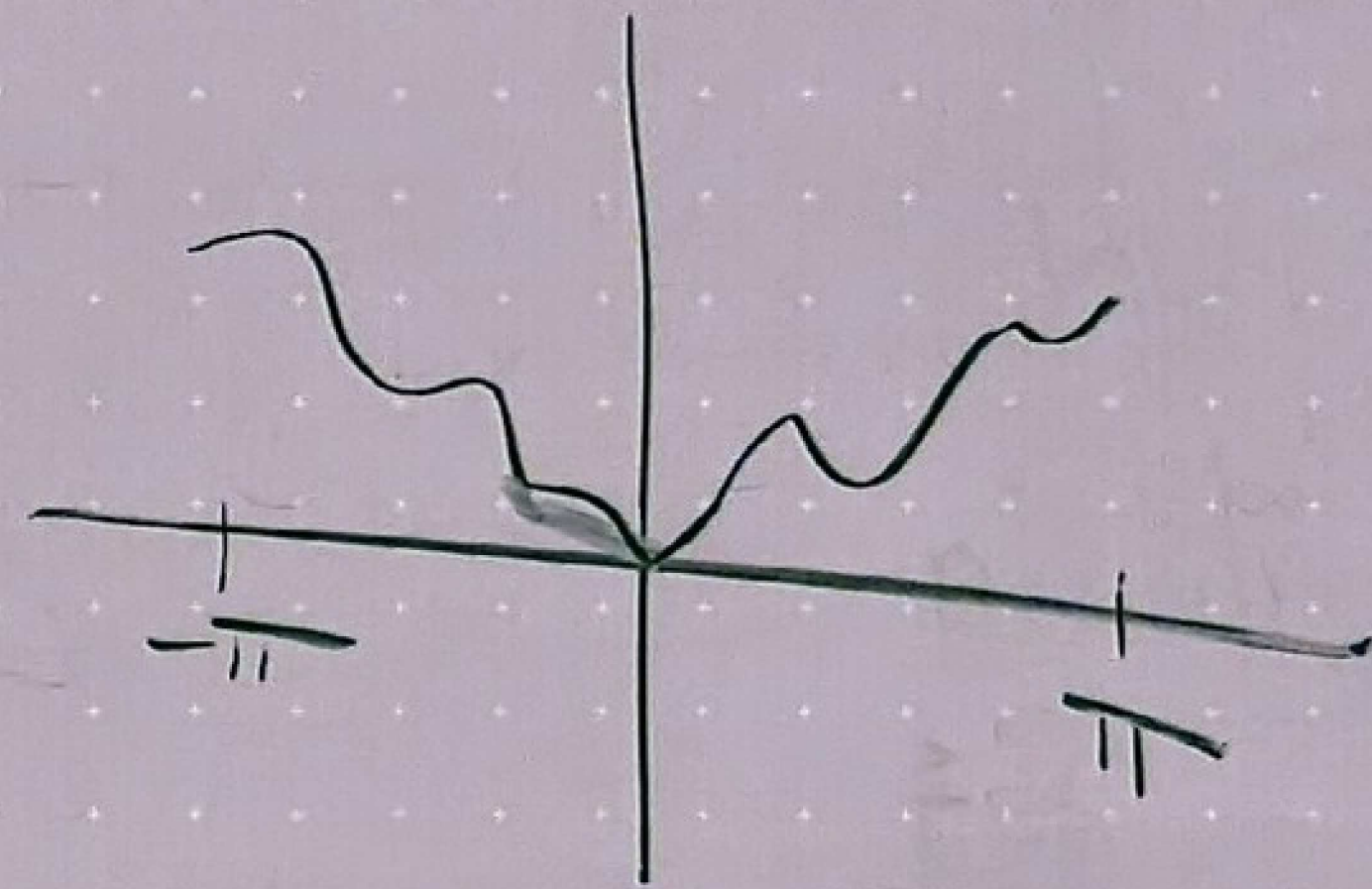
$$L^2_{\pi} := L^2((-\pi, \pi), \mathbb{C})$$

Sei $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$

Lipschitzstetig und mit $f(0) = 0$

Insbes:

$$g(x) \mapsto \frac{f(x)}{x}$$



$\in C_L$ ist besch. auf $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$

f Lipschitz $\Leftrightarrow |f(x) - f(y)|$

Verwende mit $y = 0$:

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)|$$

$$|f(x)| \leq C_L |x - 0| = C_L |x|$$

$$\leq C_L |x - y| \quad \left(\begin{array}{c} |f(x) - 0| \\ \uparrow \\ = f(0) \end{array} \leq C_L \cdot |x - 0| \right)$$

$$\text{Also: } \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{C_L |x|}{|x|} = C_L$$

(8)

Dann ist auch

$$g(x) := \frac{f(x)}{e^{ix} - 1}$$

besch. auf $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$

$$\left(\text{da } e^{ix} - 1 = ix + \frac{1}{2}(ix)^2 + \frac{1}{6}(ix)^3 + \dots \right)$$

$\leadsto$ Nenner wie ix

$$\text{Also: } g \in L^2_\pi$$

Berechne Fourier-Koeff.,

$$c_k(g) := \langle g, e^{ikx} \rangle$$

Bessel: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(g)|^2 < \infty$

insbes.: $c_k(g) \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0$

$$c_k(f) = \langle f, e^{ikx} \rangle$$

$$= \langle g(x)(e^{ix} - 1), e^{ikx} \rangle$$

$$= -c_k(g) + \underbrace{\langle g, e^{-ix} e^{ikx} \rangle}_{c_{k-1}(g)} \quad \textcircled{g}$$

$$f_N(0) = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e^{ikx} \Big|_{x=0}$$

$$= \sum_{k=-N}^N c_k(f) = \sum_{k=-N}^N [-c_k(g) + c_{k-1}(g)]$$

$$= -c_N(g) + c_{-N-1}(g) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Damit ist gezeigt:

In jedem Punkt x , so dass f
Lipschitzst. in Umgebung von x

gilt:

$$f_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(x).$$

Also: $f \in L^2_{2\pi} \Rightarrow f_N \rightarrow f$ in $L^2_{2\pi}$

und: f stückw. C^1 $\Rightarrow f_N \rightarrow f$ punktweise
(und stetig)

2024-01-08

Info: Sogar gleichmäßig.

(10)

Faltung

Auf $\mathbb{R}$ (!)

definiert man für

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{oder } \mathbb{C})$$

$$h := f * g: \mathbb{R} \ni x \mapsto$$

h heißt Faltung
von f mit g .

Fragen:

- Wann ist h wohldef.?
- Eigenschaften von h ?

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt$$

Bem: $f \equiv 1$ und $g \equiv 1$

$\Rightarrow h$ nicht definiert ($\forall x$)

Bem: Falls f (lokal) integrierbar

($\forall M > 0$: $f|_{[M, M]}$ ist
integrierbar)

und g eine stetige
Fkt. mit kompaktem Träger

($\exists M > 0$: $g(x) = 0$
 $\forall |x| > M$)

Dann ist h wohldefiniert:

$x \in \mathbb{R}$ bel.

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt = \int_{\substack{-M \\ M \text{ von } g}}^M f(x-t) g(t) dt$$

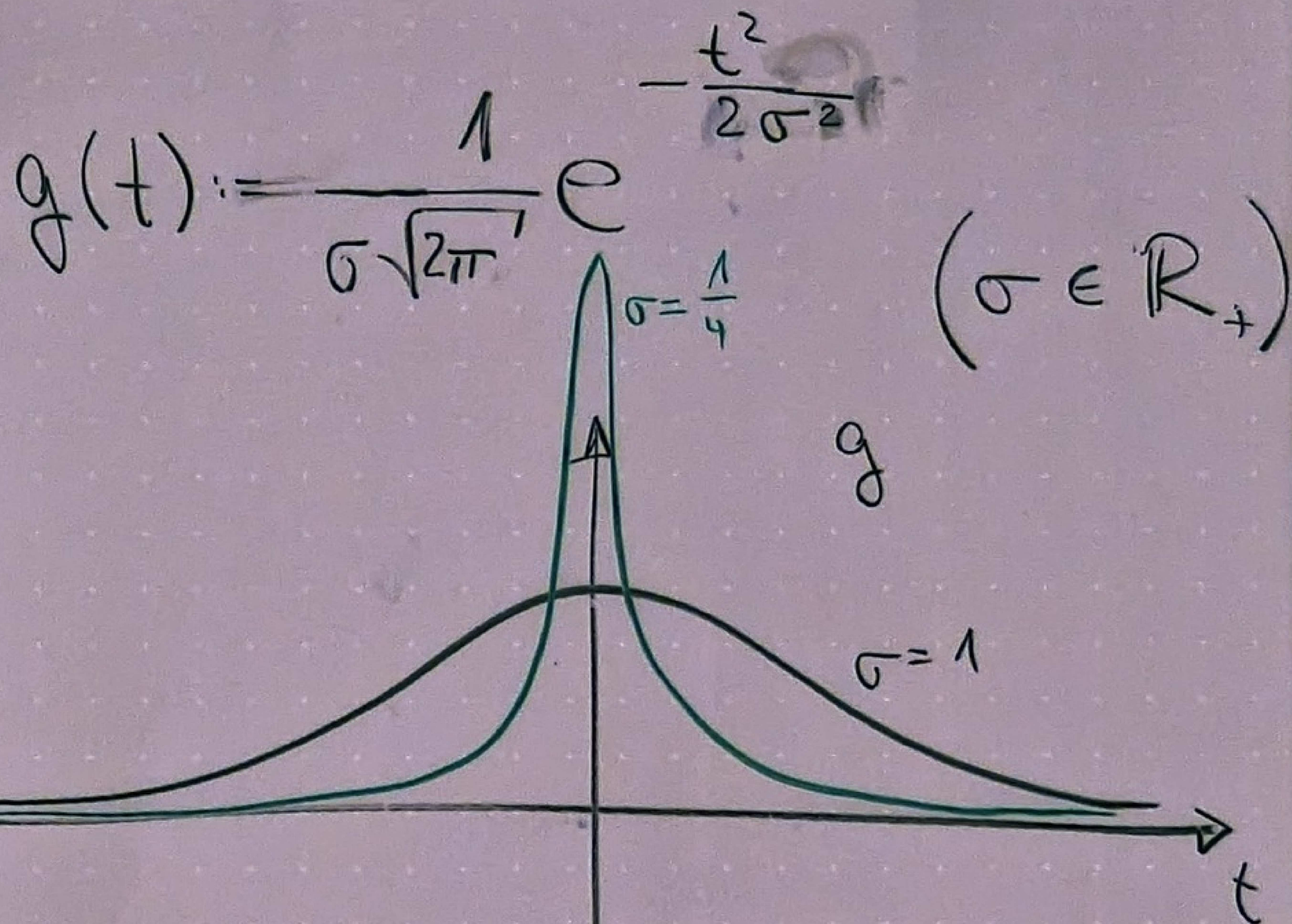
Hier wird nur f im

Intervall $[x-M, x+M]$

betrachtet. $\leadsto$ Integral existiert.

(2)

Anwendung:



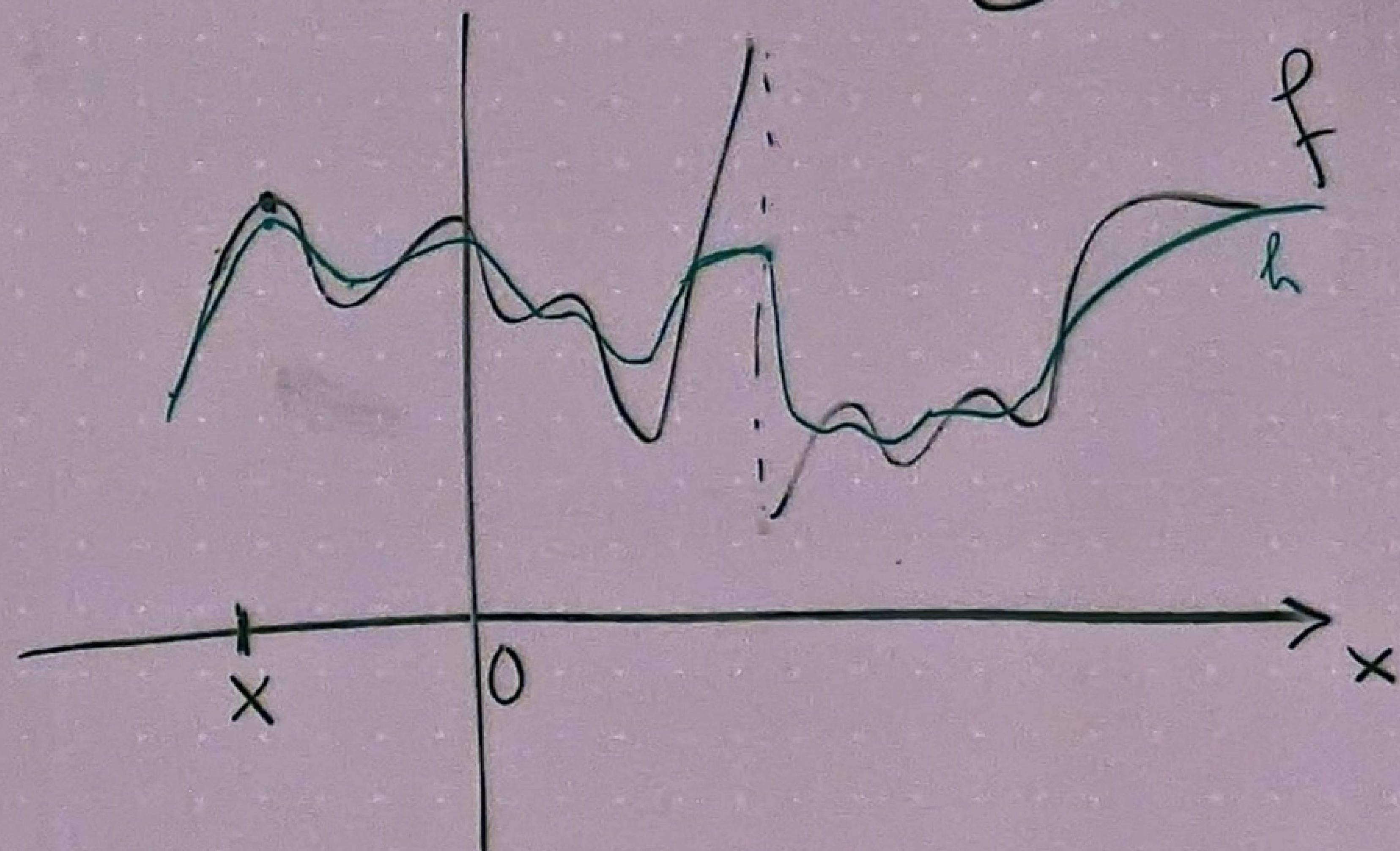
Dann:

$h(x)$ ist Mittelwert
von f -Werten



Was macht Faltung?

③



$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$$

$$h = f * g = ?$$

$$\text{Ann: } \int g = 1$$

Relevant: Klein $|t|$

Also: f in Nähe
von x

Für stetiges g ist h
(falls wohldef.) stetig

Es gilt:

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt$$

$$\stackrel{!}{=} \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt$$

Substitution

$$y := x-t, dy = -dt$$

Also: $h = f * g = g * f$ ④

Faltung für period. Fkt.

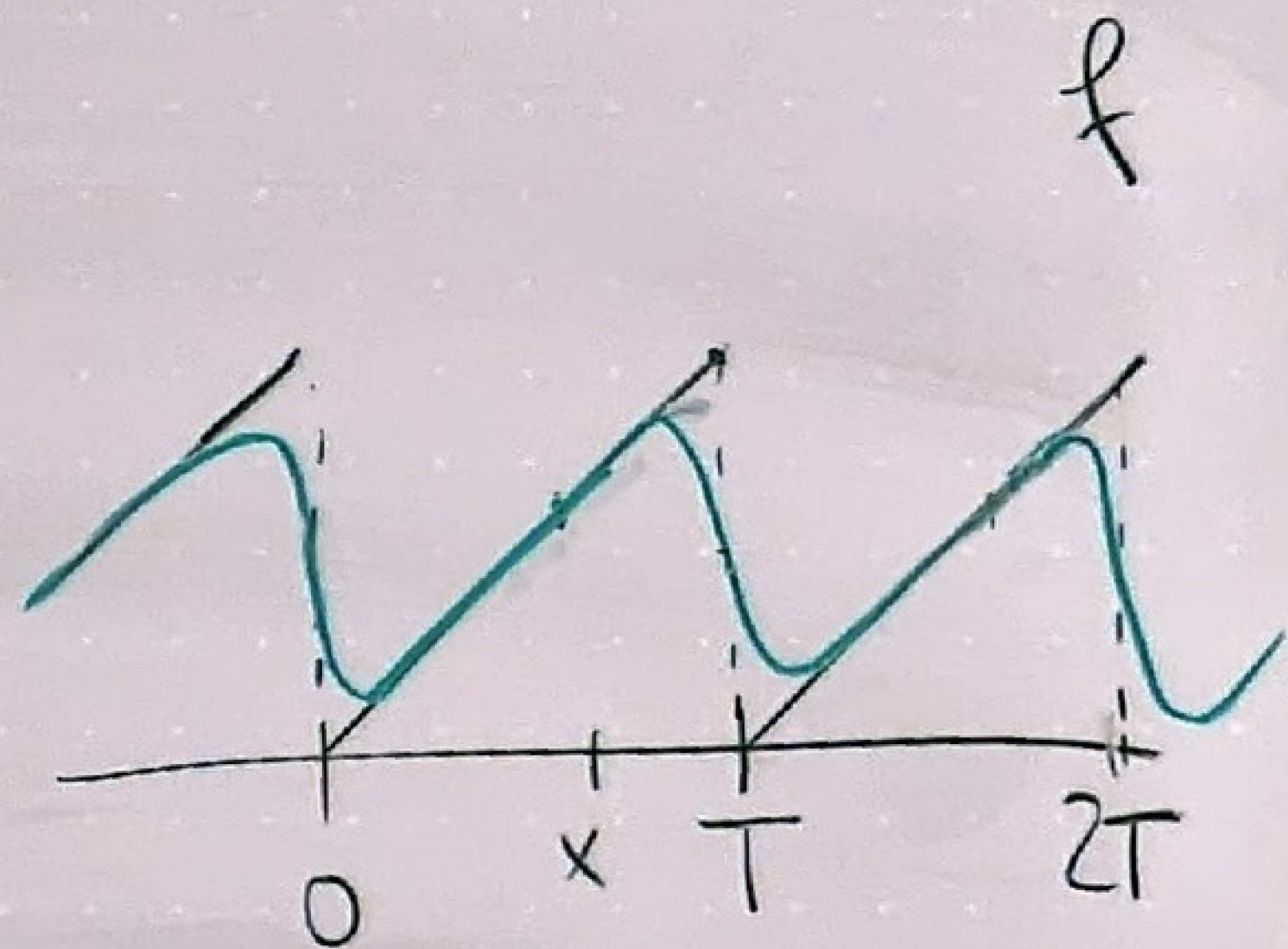
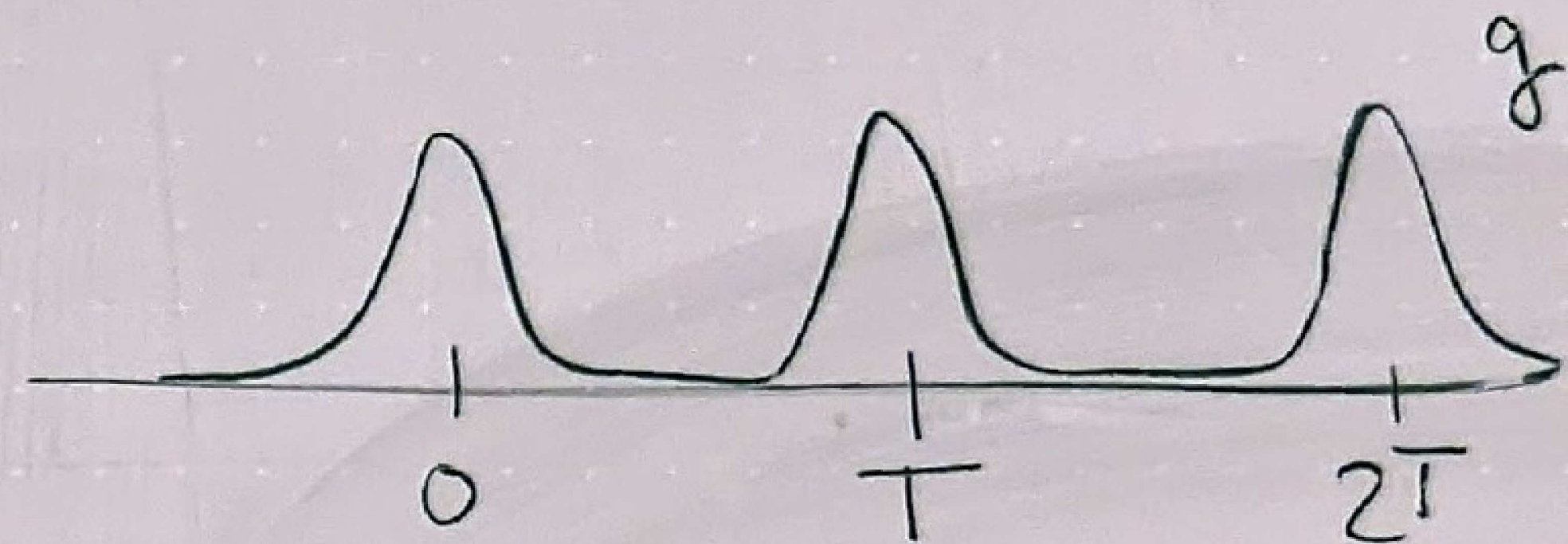
Annahme: $g, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ seien T -period.

(d.h.: $f(x+T) = f(x)$
 $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$h(x) := \int_0^T f(x-t) g(t) dt$$

Anwendung

⑤



Frage:

Kann auf h das "Original" f wieder hergestellt werden? (Ann: g bekannt)

Fourier-Reihe von h : ⑥
Rechnung für $T=2\pi$

$$c_k(h) := \frac{1}{T} \int_0^T h(x) e^{-ikx} dx$$

Allg. T : $\boxed{e^{-ik \frac{2\pi x}{T}}}$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \underbrace{f(x-t)}_{\text{wavy}} \underbrace{g(t)}_{\text{wavy}} e^{-ikx} dt \, dx$$

Fubini

$$= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) \left[\int_0^T f(x-t) e^{-ikx} dx \right] dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T g(t) e^{-ikt} \left[\int_0^T f(x-t) e^{-ik(x-t)} dx \right] dt$$

f per. $\equiv \int_0^T g(t) e^{-ikt} c_k(f) dt$

$$= T c_k(g) c_k(f).$$

Satz: h ist T -periodisch

und es gilt $c_k(h) = T c_k(f) c_k(g)$
 $\forall k.$

Antwort:

f kann aus h
rekonstruiert werden! ⑦

$$c_k(f) = \frac{1}{T} \frac{c_k(h)}{c_k(g)}$$

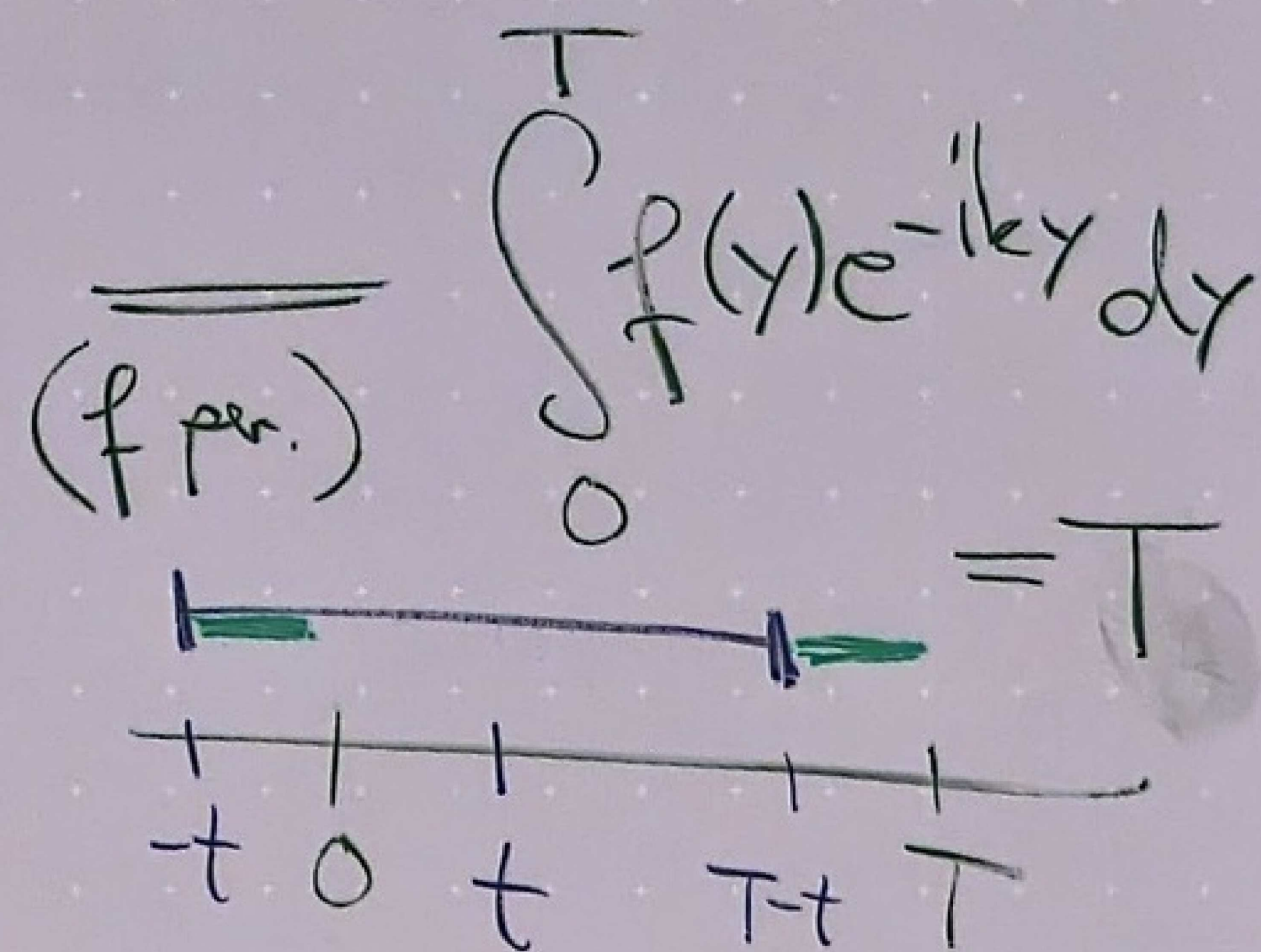
bestimmt f .

Zu obiger Rechnung:

$$\left[\int_0^T f(x-t) e^{-ik(x-t)} dx \right]$$

$$\int_{-t}^{T-t} f(y) e^{-iky} dy$$

Substitution
 $y := x - t$



$$y \in [-t, T-t]$$

Seien f, g periodisch (T) ⑧

$$g|_{[0,T]}, f|_{[0,T]} \in L^2([0,T])$$

Wie gut ist h ??

Es gilt $(c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$

(Bessel)

$$(c_k(g))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$$

$c_k(f)$

Also: $c_k(h) = T \cdot c_k(f) \cdot c_k(g)$

$$h = f * g$$

$$\frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k(h)| = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) c_k(g)$$

$$\leq \| (c_k(f))_{k \in \mathbb{Z}} \|_{\ell^2} \cdot \| (c_k(g))_{k \in \mathbb{Z}} \|_{\ell^2}$$

Cauchy-Schwarz
in $\ell^2(\mathbb{Z})$

$$< \infty$$

Also: $(c_k(h))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$

2024-01-10

Dann: $h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{c_k(h)}_{\substack{\uparrow \\ \text{summierbar}}} \underbrace{e^{ik \frac{2\pi x}{T}}}_{| \leq 1}$ (9)

Reihe konv., sogar glm. $\Rightarrow$ h stetig

$$h(x) = \int_0^T f(x-t) g(t) dt$$