

Ein Banachraum mit Skalarprodukt
heißt Hilbertraum

Bsp: • $\mathbb{R}^n$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$

• $\ell^2(\mathbb{N})$ mit $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$

• $L^2(D)$ mit $\langle f, g \rangle = \int_D f(x) g(x) dx$

Zugehörige Norm: $\|f\| = (\langle f, f \rangle)^{1/2}$

2023-12-06

Also, für $L^2(D)$: $\|f\| = \left(\int_D f(x) \cdot f(x) dx \right)^{1/2}$
 $= \left(\int_D |f|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2$

Bsp für BR, das kein HR ist: $\ell^p(\mathbb{N})$ für $p \neq 2$
 $L^p(D)$ für $p \neq 2$

Cauchy-Schwarz in $L^2(D)$:

$$\int_D f(x) g(x) dx = \langle f, g \rangle \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

(Das ist Hölder für $p=q=2$)

Parallelogramm-Identität

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4} \left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \right)$$

Bew: $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w \rangle$

$$= \|v\|^2 + 2\langle w, v \rangle + \|w\|^2$$

$$\|v-w\|^2 = \dots \ominus \dots$$

□

Also: Norm bestimmt das
Skalarprodukt

Bemerkung: Es gibt auch $L^\infty(D)$

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf_{\substack{N \subset D \\ N \text{ Nullmenge}}} \sup_{x \in D \setminus N} |f(x)|$$

BR: $\|\cdot\|$

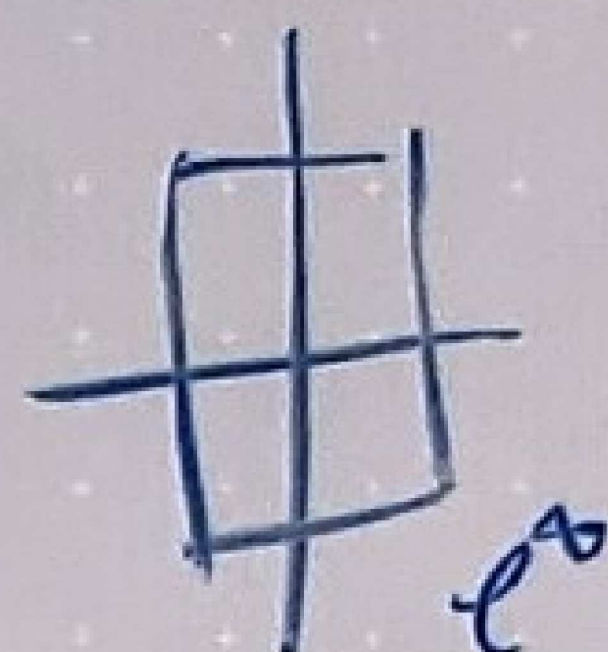
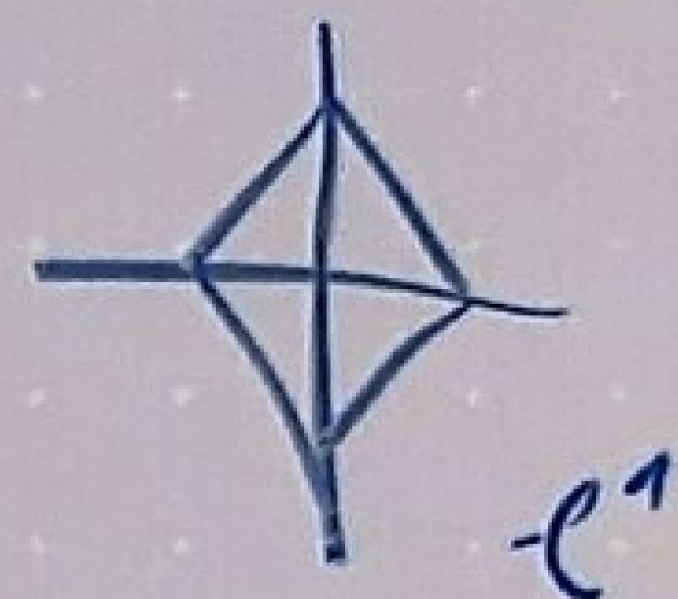
HR: $\|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} (\|f+g\|^2 - \|f-g\|^2)$$

Bsp für HR'e: $HR \rightarrow \bigoplus_{\ell^2}$

① $\mathbb{R}^n \ni x = (x_1, \dots, x_n)$

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^n |x_j|^2$$

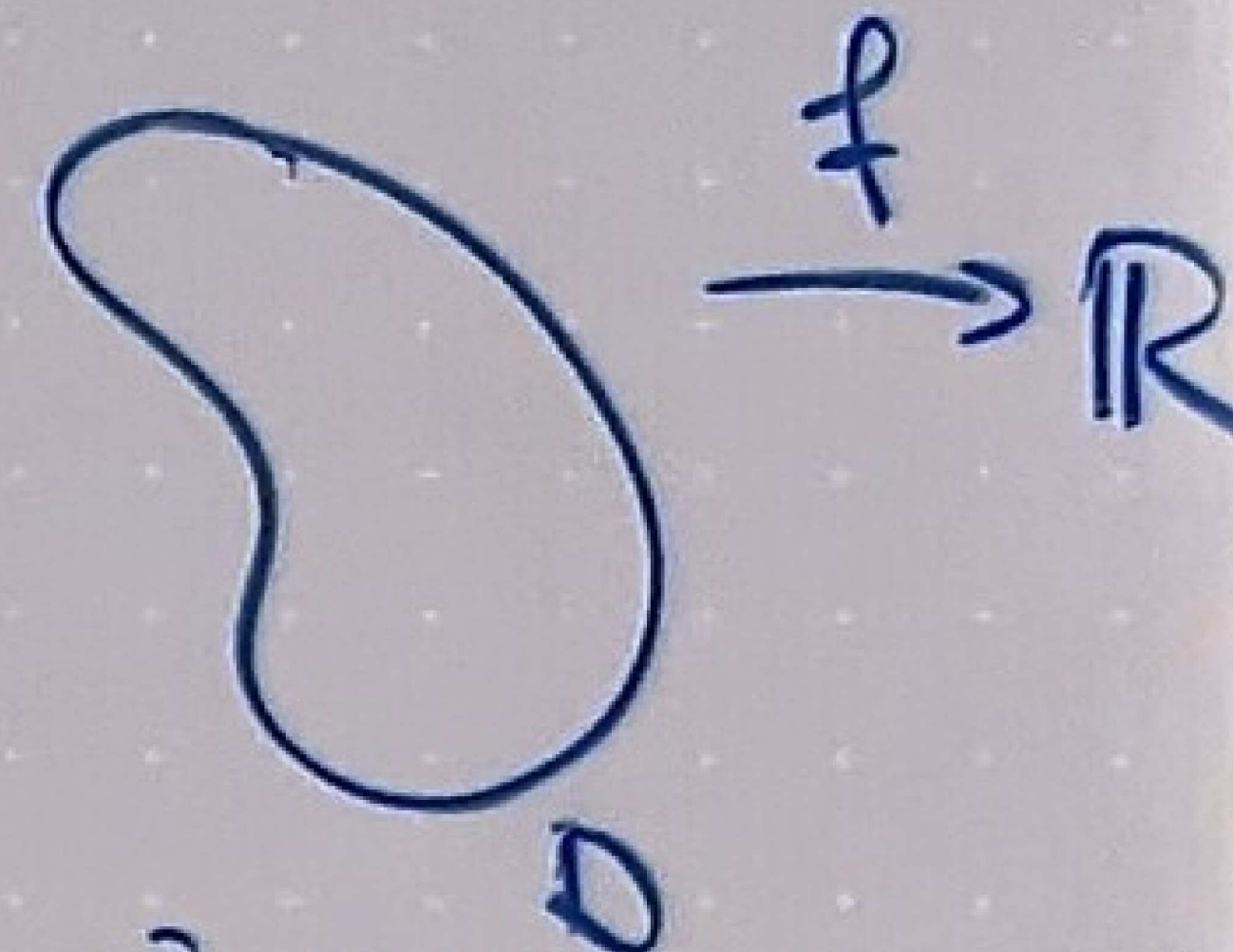


$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ ①

② $\ell^2(\mathbb{N}) \ni x = (x_1, x_2, \dots)$

$$\|x\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2$$

③ $D \subset \mathbb{R}^n$



$$L^2(D) := \left\{ f: D \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|^2 \text{ ist } L\text{-integrabel} \right\}$$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{D}} |f(x)|^2 dx$$

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}} f(x) g(x) dx$$

$L^2(\mathbb{D})$ mit $\| \cdot \|$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$
ist ein Hilbertraum

(!)

Orthonormalsysteme (ONS) ②

Hier: X ein Hilbertraum

Def: Eine Familie $(v_1, v_2, v_3, \dots)$

von Vektoren $v_k \in X$ heißt ONS,

falls:

$$\forall k, j \geq 1: \langle v_j, v_k \rangle = \delta_{jk}$$

$$\text{mit } \delta_{jk} := \begin{cases} 1 & j=k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bem: Falls X ein HR

über $\mathbb{C}$ ist:

$$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R} \quad (\|\cdot\| \geq 0)$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle \lambda x, \mu y \rangle = \lambda \bar{\mu} \langle x, y \rangle$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist eine

Sesquilinearform

Bsp: $\|f+g\|^2 =$

③

$$= \langle f+g, f+g \rangle$$

$$= \langle f, f \rangle + \langle g, f \rangle + \langle f, g \rangle$$

$$+ \langle g, g \rangle$$

$$= \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle f, g \rangle$$

Regel: $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$

$$\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle = \langle f, \bar{\lambda} g \rangle$$

$l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$:

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$$

Dann: $\langle x, x \rangle = \sum_j |x_j|^2$

$L^2(\mathbb{D}, \mathbb{C})$:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{D}} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Weiter mit ONS.

(4)

Sei $f \in X$ von der Form

$$\textcircled{*} \quad f = \sum_{k=1}^n a_k v_k$$

(für ein n)
(für $a_k \in \mathbb{C} \forall k$)

Rechnen: $\langle \text{l.S.}, v_j \rangle = \langle \text{r.S.}, v_j \rangle$
//

$$\langle f, v_j \rangle$$

$$\langle r.S., v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_k v_k, v_j \right\rangle$$

$\langle, \rangle$
linear

$$\stackrel{\text{linear}}{=} \sum_{k=1}^n a_k \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{=\delta_{kj}} = a_j$$

Ergebnis: Falls f durch die $(v_k)_k$ ausgedrückt werden kann, so gilt:

$$a_k = \langle f, v_k \rangle$$

Andere, ähnliche Rechnung:

$$f = \sum_{k=1}^n a_k v_k$$

$$g = \sum_{k=1}^n b_k v_k$$

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_k v_k, \sum_{j=1}^n b_j v_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k,j} a_k \bar{b}_j \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{=\delta_{kj}}$$

$$= \sum_k a_k \bar{b}_k$$

(5)

Bessel'sche Ungleichung

$$f = \sum_{k=1}^n a_k v_k$$

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^n |a_k|^2$$

Unendliche Summen / Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k := \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k v_k$$

⑥

Sei $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$

Das heißt: $\exists a_1, a_2, a_3, \dots$
 $a_k \in \mathbb{C}$

$\dots, \underbrace{\sum_k^N a_k v_k}_{\in X}, \sum_k^{N+1} a_k v_k, \dots$
ist konv. Folge
in X

und: $f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_k^N a_k v_k$ (reicht, zu fordern: ... ist CF)

Sei $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$

(a) $\langle f, v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k, v_j \right\rangle$

$\stackrel{(!)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{kj} = a_j$

$\langle \lim, \rangle$
 $= \lim \langle \cdot, \cdot \rangle$

(b) $g := \sum_{k=1}^N a_k v_k$

$N \geq N \geq 1$

$\langle f, g \rangle = \sum_{j=1}^N \overline{a_j} \langle f, v_j \rangle$ ⑦

$= \sum_{j=1}^N |a_j|^2$

© Frage: $f - g$ klein?
 Wie klein?

$\|f - g\|^2 = \langle f - g, f - g \rangle$

$= \|f\|^2 + \|g\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle$

$$\begin{aligned}
 \text{NR: } \langle f, f \rangle &= \\
 &= \left\langle \sum_k^\infty a_k v_k, \sum_j^N a_j v_j \right\rangle \\
 &\stackrel{(D)}{=} \sum_{k,j}^\infty a_k \bar{a}_j \langle v_k, v_j \rangle \\
 &= \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2
 \end{aligned}$$

$$\|f - g\|^2 = \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 + \sum_{k=1}^N |a_k|^2$$

$$- 2 \sum_{j=1}^N |a_j|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^N |a_j|^2$$

Bessel'sche Ungl.:
 l.S. = $\|f - g\|^2 \geq 0$, also:

$$\sum_{j=1}^N |a_j|^2 \leq \|f\|^2$$

Liefert: $f \in X \Rightarrow (a_j)_j \in \ell^2(\mathbb{N})$
 $f = \sum_{k=1}^\infty a_k v_k$

(8)

Gilt umgekehrt auch:

X HR : $(a_k)_k \in \ell^2(\mathbb{N}) \Rightarrow$
 (v_k) ONS

Beweisschritte:

$$\left\| \sum_{k=1}^N a_k v_k - \sum_{k=1}^M a_k v_k \right\|_X^2$$

also ist CF

(9)

$$f := \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k \in X \text{ mit Konv. der Reihe}$$

$$\left\| \sum_{k=M+1}^N a_k v_k \right\|^2 = \sum_{k=M+1}^N |a_k|^2 \rightarrow 0$$

$N > M$

für $M \rightarrow \infty$

□

Mehr:

$$\|f - g_n\| \longrightarrow 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^N |a_k|^2 \longrightarrow \|f\|^2$$

Vollständigkeitsrelation

(10)

Def: Sei $(v_k)_k$ ein ONS.

$(v_k)_k$ heißt vollständig

$$:\Leftrightarrow \forall f \in X:$$

$$[\langle f, v_j \rangle = 0 \forall j \Rightarrow f = 0]$$

Sei $f \in X$ beliebig.

Setze $a_k := \langle f, v_k \rangle$

Bessel $\Rightarrow (a_k)_k \in \ell^2(\mathbb{N})$

X vollst. $\Rightarrow f^* := \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$
existiert in X

Frage: $f^* = f$

Im Allgemeinen: NEIN!

Falls ONS vollständig: JA!

$$\boxed{f = f^*}$$

Triviales Bsp (endlichdim.)

$\mathbb{C}^3$ mit Basis $e_1 = (1, 0, 0), e_2, e_3$

(e_1, e_2) ist ONS

(e_1, e_2, e_3) ist vollst. ONS

$$\begin{aligned} & \forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \\ & \exists a_1 = z_1, a_2 = z_2, \dots \\ & (z_1, z_2, z_3) = \sum_{k=1}^3 a_k e_k \end{aligned}$$

$$f = (0, 2, i)$$

$$\text{Dann } a_1 = \langle f, e_1 \rangle = 0$$

$$\text{Bzgl. } (v_1, v_2): a_2 = 2$$

$$\sum_{k=1}^2 a_k e_k = 2e_2 = f^* \neq f$$

$$\text{Bzgl. } (e_1, e_2, e_3): \text{ System ist vollst., } f^* = \sum_{k=1}^3 \langle f, e_k \rangle e_k = 2e_2 + ie_3 = f$$

Abstrakt: ONS é
im Hilbertraum X

Sei $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein ONS

$$\text{d.h.: } \langle v_k, v_j \rangle = \delta_{kj}$$

Dann:

A Falls $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$,

(d.h.: Konv. der Partialsummen in X)

so gilt

$$\langle f, v_k \rangle = a_k \quad \textcircled{1}$$

$$\text{und } \sum |a_k|^2 \leq \|f\|_X^2$$

(Bessel)

Bew: $g = \sum_{k=1}^N a_k v_k$

$$\sum_{k=1}^N |a_k|^2 = \langle g, f \rangle \leq \underbrace{\|g\|}_{\text{G-S}} \|f\|$$

$$\|g\|^2 = \sum_{k=1}^N |a_k|^2$$

Also: $(a_k)_k \in \ell^2(\mathbb{N})$.

[B] Sei $(a_k)_k \in \ell^2(\mathbb{N})$

Dann: $f^* := \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$ wohldef

(da X vollst.)

[C] Falls $(v_k)_k$ vollständig

(dh: $\langle f, v_k \rangle = 0 \forall k \Rightarrow f=0$)

$$\forall f \in X: \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k \quad (2)$$

mit $a_k = \langle f, v_k \rangle$

Bew: f^* zu $(a_k)_k$ wohldef (sh. **[B]**)

$$\text{zz: } f = f^*$$

$$\begin{aligned} \text{Dafür: } \langle f - f^*, v_k \rangle &= \langle f, v_k \rangle - \langle f^*, v_k \rangle \\ &= a_k - a_k = 0 \quad \forall k \end{aligned}$$

Also: $f = f^*$

Kommentar:

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$$

$$\Leftrightarrow f = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N a_k v_k$$

$$\Leftrightarrow \left\| f - \sum_k a_k v_k \right\|_X \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Projektionen:

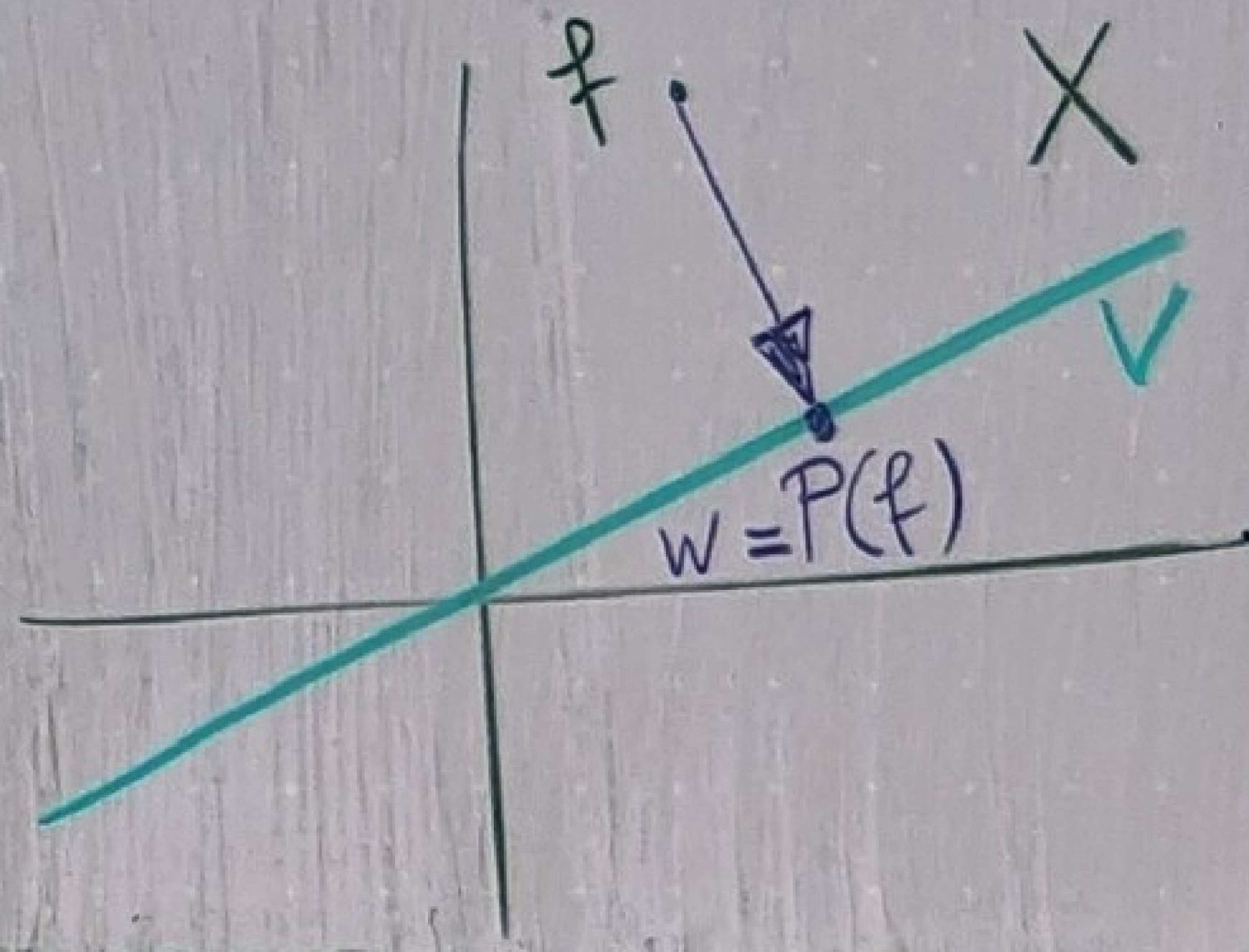
③

$(v_k)_k$ ein ONS

$v_1, \dots, v_N$ spannen $V := \text{span}\{v_1, \dots, v_N\}$
 $\subset X$ auf

Projektion:

$$P: f \mapsto \sum_{k=1}^N \langle f, v_k \rangle v_k$$



$P(f) =: w$
minimiert $\|w - f\|_X$
in V

32 Fourier-Reihen

$T > 0$, Intervall $(0, T) =: I$,

darauf Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$

Frage: Was ist ein
mögliches ONS?

Denke an: f Riemann-intbar

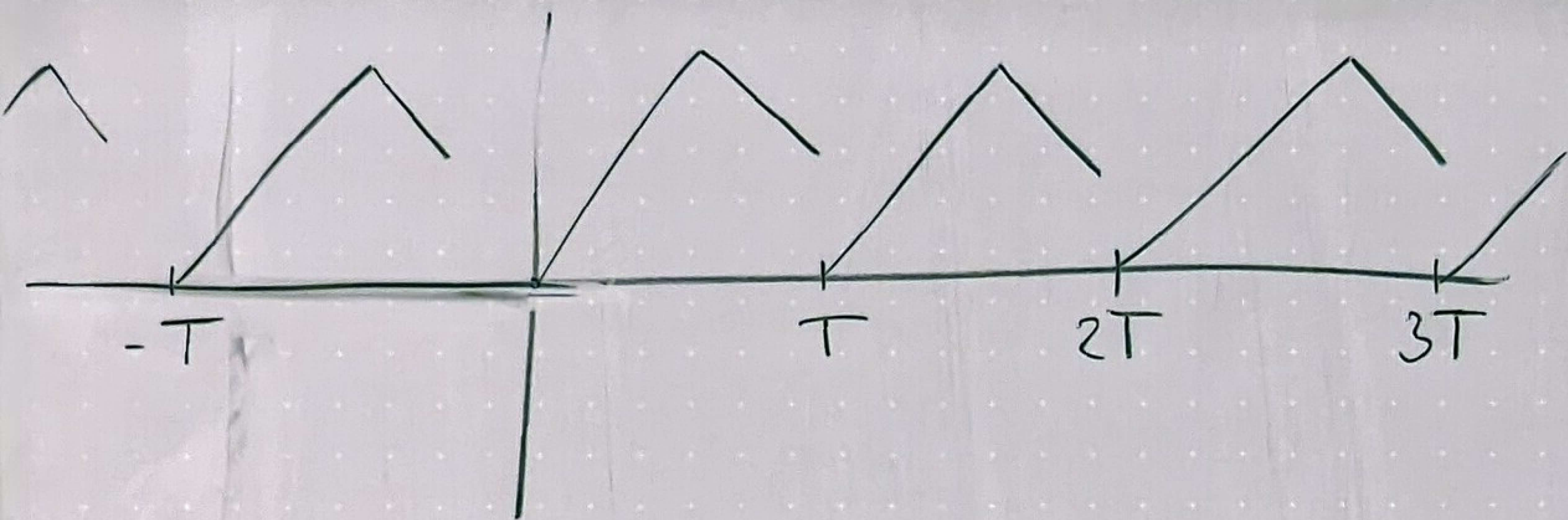
④

Periodische Fkt. auf $\mathbb{R}$
mit Periode T

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

T -periodisch, falls

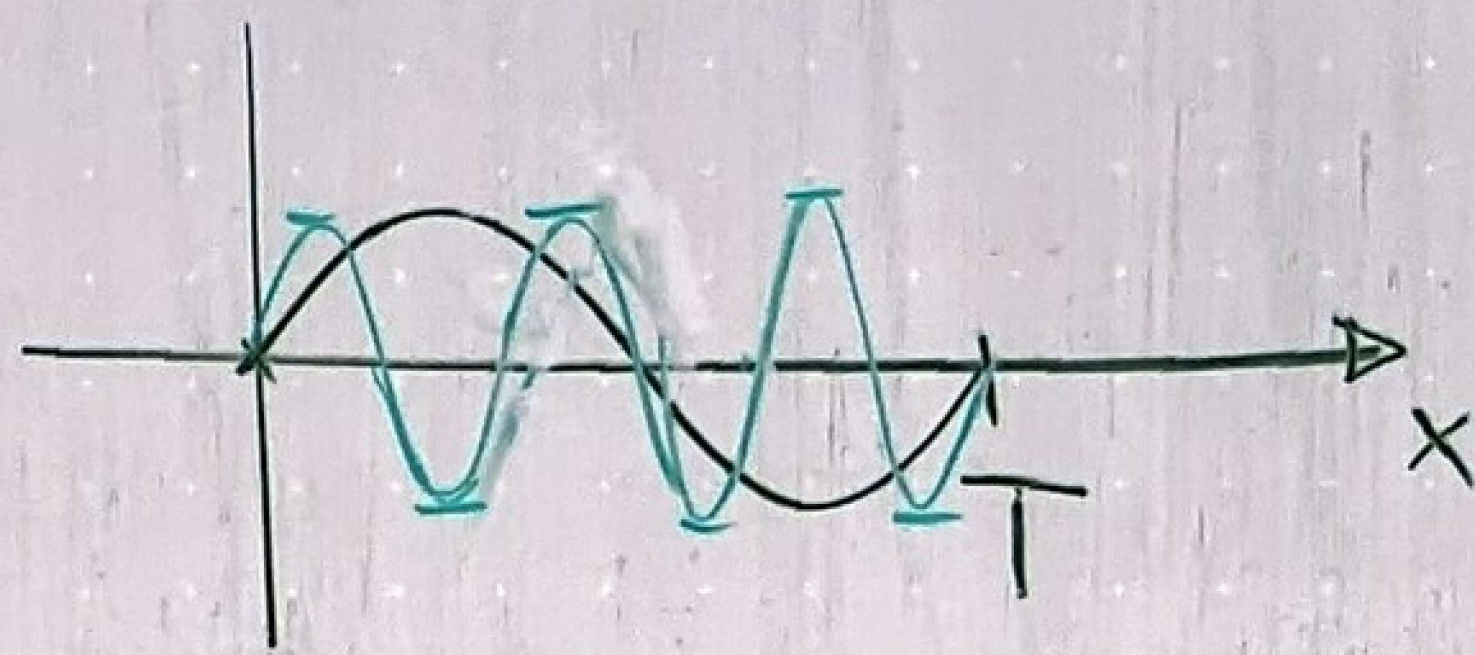
$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x$$



Denkweise: $f: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ wird
identifiziert mit einer T -periodischen Fkt.

$$V_1(x) := \sin\left(\frac{2\pi x}{T}\right)$$

$$V_3(x) := \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi x}{T}\right)$$



$$V_k(x) := \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right)$$

(5)

alle glatt periodisch fortsetzbar

$$\langle V_k, V_j \rangle = ?$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f \bar{g}$$

hier $\bar{g} = g$

$$\langle V_k, V_j \rangle = \int_0^T V_k(x) V_j(x) dx$$

$$= \int_0^T \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) \sin\left(j \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

NR : $\int_0^{2\pi} \sin kx \sin jx \, dx$

$k, j \geq 0$
 $k, j \in \mathbb{N}$

$$= - \int_0^{2\pi} k \cos kx \left(-\frac{1}{j} \cos jx \right) dx$$

$\downarrow$ $\uparrow$
(Randterme = 0)

$$= + \int_0^{2\pi} k^2 (-\sin kx) \frac{-1}{j^2} \sin jx \, dx$$

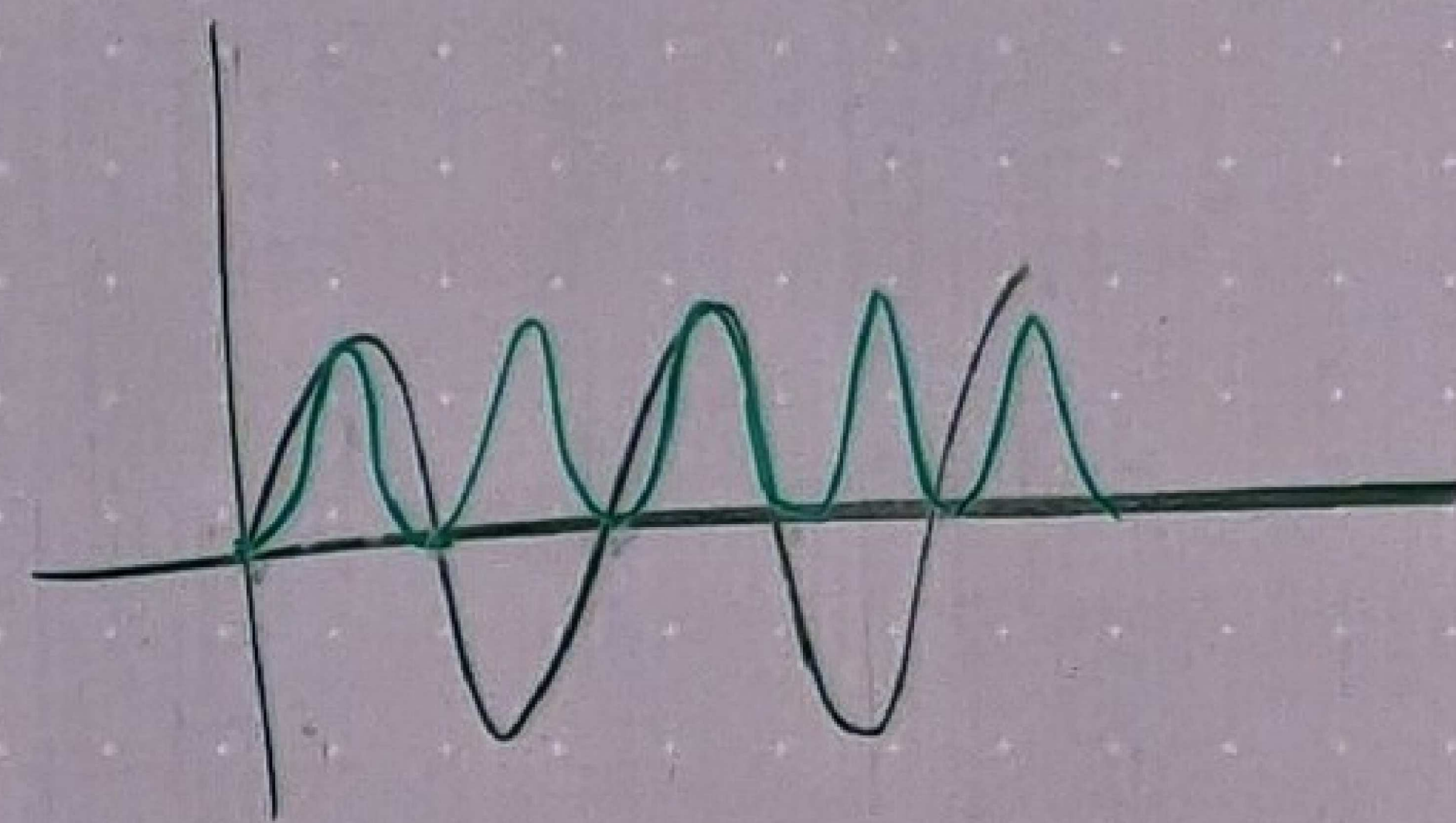
Also:

$$\left(1 - \frac{k^2}{j^2} \right) \int_0^{2\pi} \sin kx \sin jx \, dx = 0$$

Also: $k \neq j \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin kx \sin jx \, dx = 0$ ⑥

$k = j$:

$$\int_0^{2\pi} (\sin kx)^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$$



$(\sin kx)^2$:
 doppelte Frequenz
 halbe "Amplitude"
 Werte in $[0, 1]$

Für Normierung

$$k \in \{1, 2, \dots\}$$

$$V_k(x) := \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right)$$

$$\int_0^T \sin^2\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

Dann: $(V_k)_k$ sind ONS $= \frac{T}{2}$

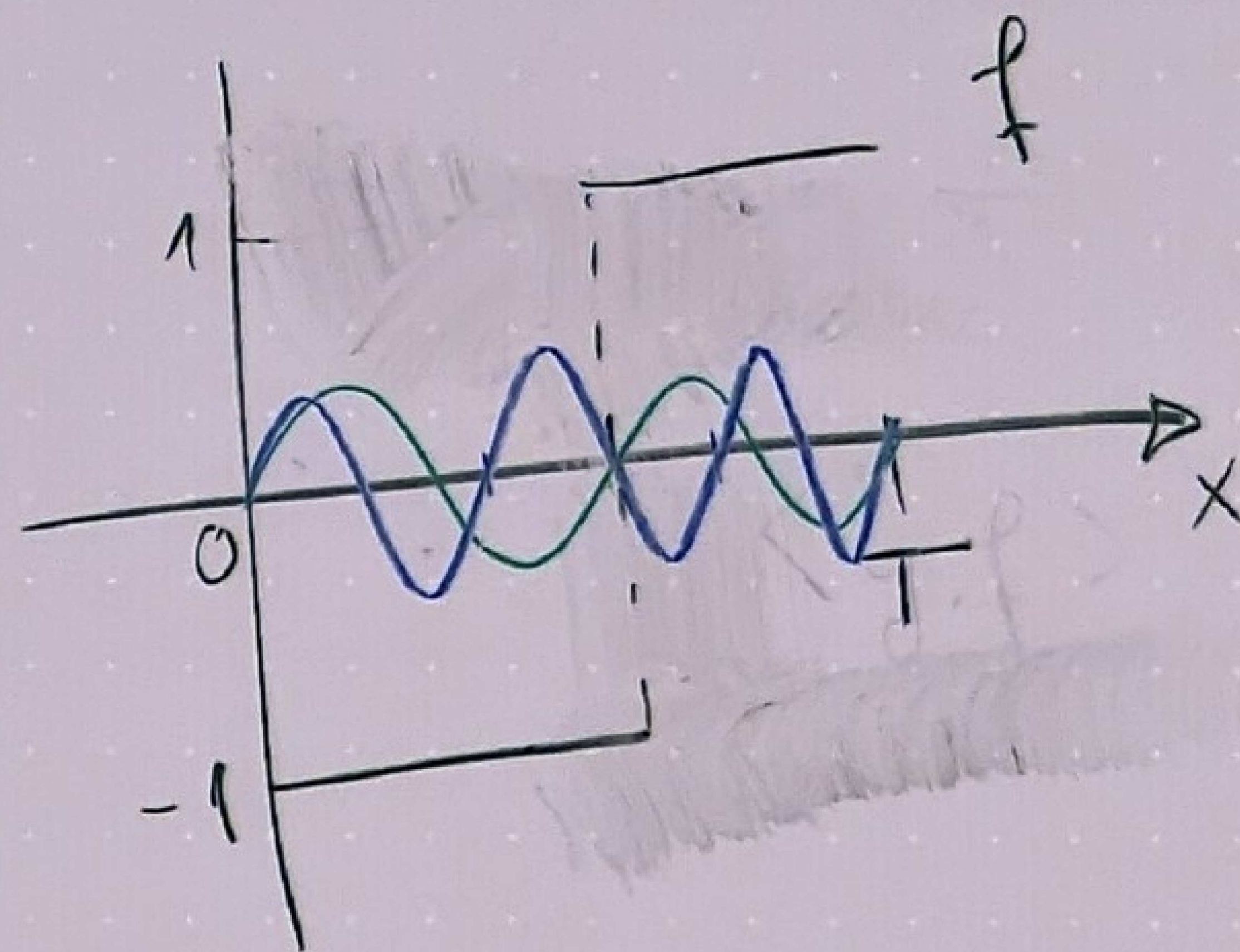
(in $X = \text{Riem. u. f. bar. Fkt.}$,
mit $\langle f, g \rangle = \int_0^T f g$)

Beispiel:

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x > \frac{T}{2} \\ -1 & x < \frac{T}{2} \end{cases}$$

$$x > \frac{T}{2}$$

$$x < \frac{T}{2}$$



$$\hookrightarrow k=2$$

$$\hookrightarrow k=3$$

Frage: $a_k := \langle f, v_k \rangle = ?$

$$\langle f, v_k \rangle = \int_0^T f(x) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

$$= - \int_0^{T/2} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx + \int_{T/2}^T \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{T}{2\pi k} \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) \Bigg|_{x=0}^{T/2} - \sqrt{\frac{2}{T}} \frac{T}{2\pi k} \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) \Bigg|_{T/2}^T$$

$$= \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{2} \pi k} \left[-1 \overset{\uparrow}{\pm 1} \pm 1 - 1 \right]$$

+1, falls k gerade
-1, falls k ungerade

8

$$= \begin{cases} 0 \\ -\frac{4\sqrt{T}}{\sqrt{2}\pi k} \end{cases}$$

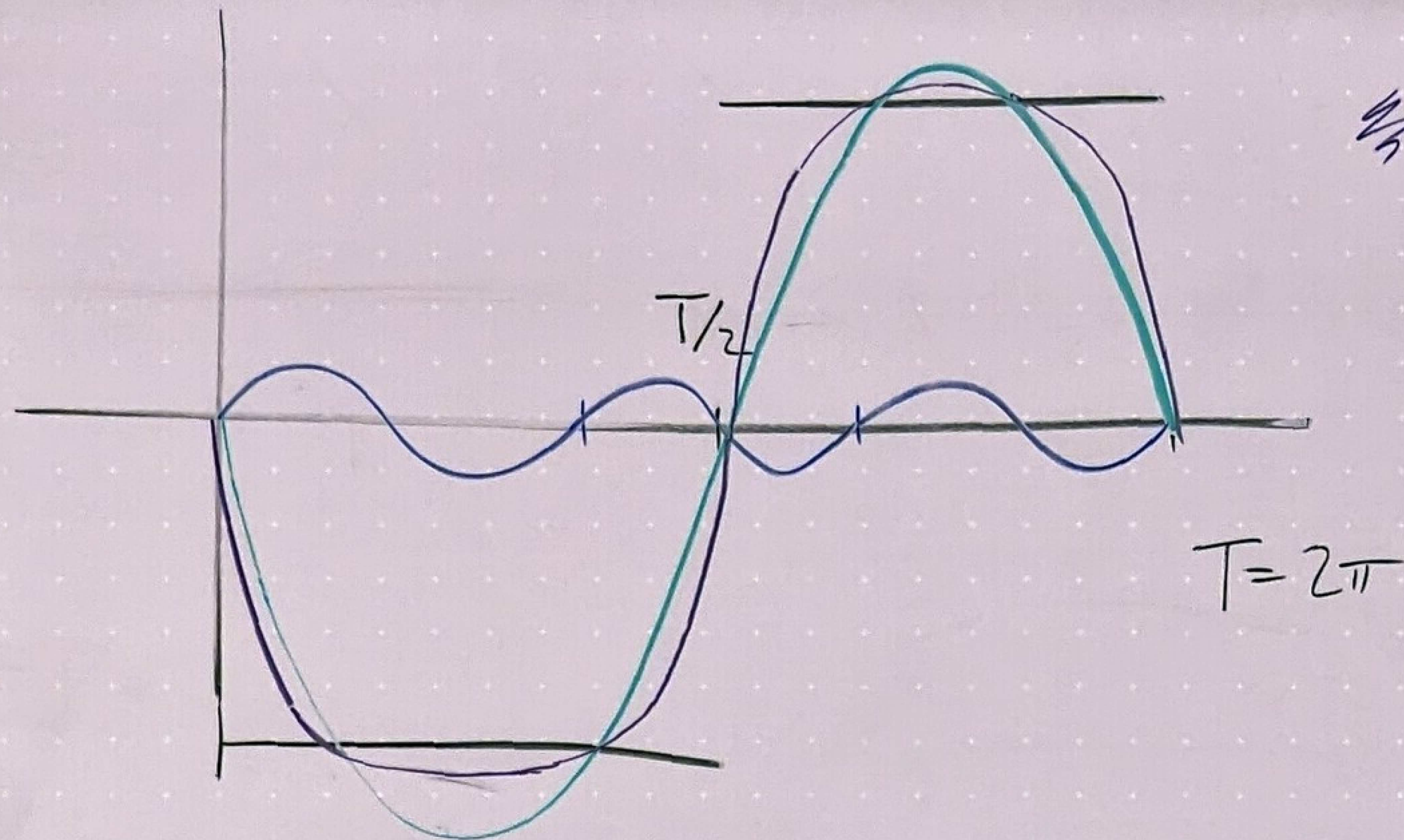
falls k gerade

falls k ungerade

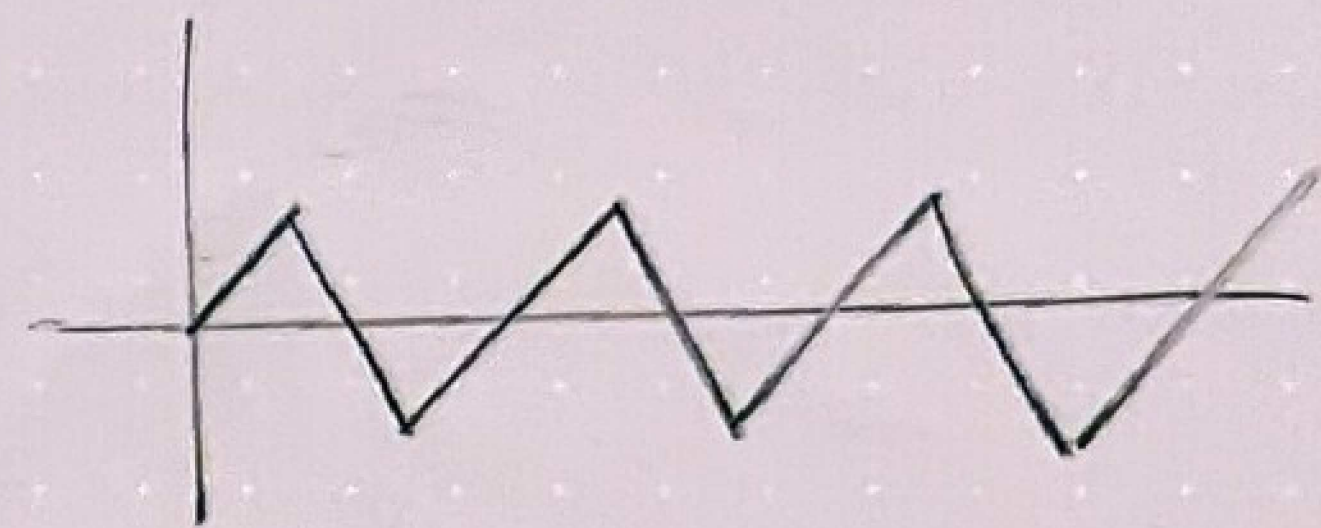
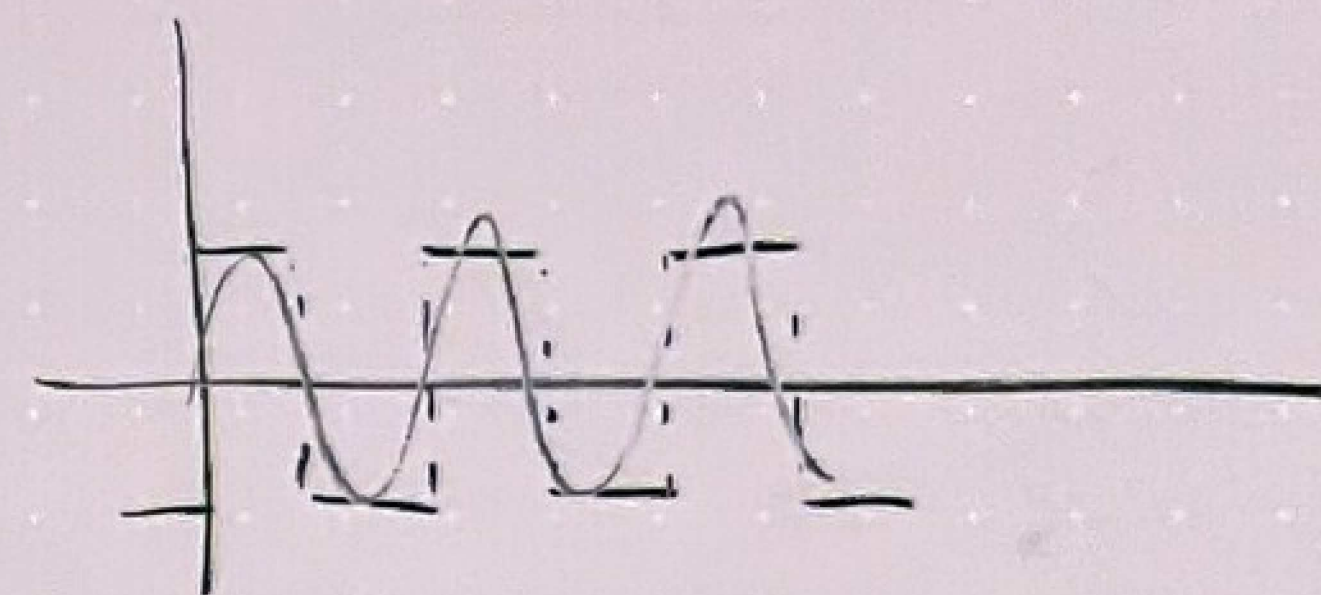
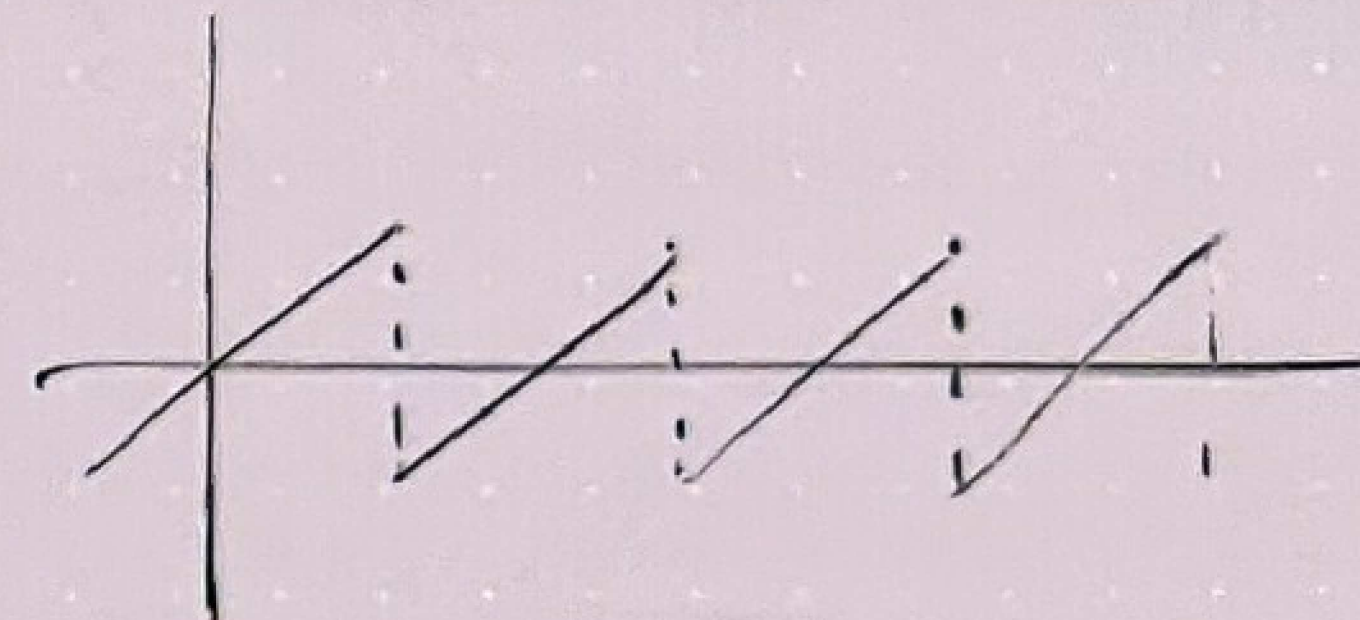
9

Also, vermuten:

$$f(x) = \sum_{\substack{k \text{ ungerade} \\ (k \geq 1)}} \frac{-4\sqrt{T}}{\sqrt{2}\pi k} \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) = -\frac{4}{\pi} \left[\sin \frac{2\pi x}{T} + \frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{2\pi x}{T}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(5 \frac{2\pi x}{T}\right) + \dots \right]$$



$$f(x) = -\frac{4}{11} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x \right)$$



Berechne "Bessel-Form"

$$\|f\|^2 = \int_0^T |f|^2 = T$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k \text{ ungerade}} 8 \frac{T}{(\pi k)^2}$$

$$= 8 \frac{T}{\pi^2} \sum_{k \text{ ungerade}} \frac{1}{k^2}$$

Info: Es gilt Gleichheit, also $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Andere Basisfunktionen

$$(k \geq 1) \quad w_k(x) := \sqrt{\frac{2}{T}} \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right)$$

und $w_0(x) = \frac{1}{\sqrt{T}}$

"Alle orthogonal"

$$\langle w_k, w_j \rangle = 0 \quad \forall k \neq j$$
$$k, j \geq 0$$

$$\langle v_k, w_j \rangle = 0 \quad \forall k \geq 1, j \geq 0.$$

31 Abstrakt

$$(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$$

HR
↓
ONS in X
 $\left\{ \begin{array}{l} \langle v_k, v_l \rangle_X = \delta_{kl} \end{array} \right.$

Dann: $\forall f \in X: a_k := \langle f, v_k \rangle$

$$f^* := \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k$$

$(v_k)_k$ vollst. ONS $\Rightarrow f = f^*$

Bem: X HR. Dann

entweder: X separabel

$(\Leftrightarrow) \exists (w_k)_{k \in \mathbb{N}}:$

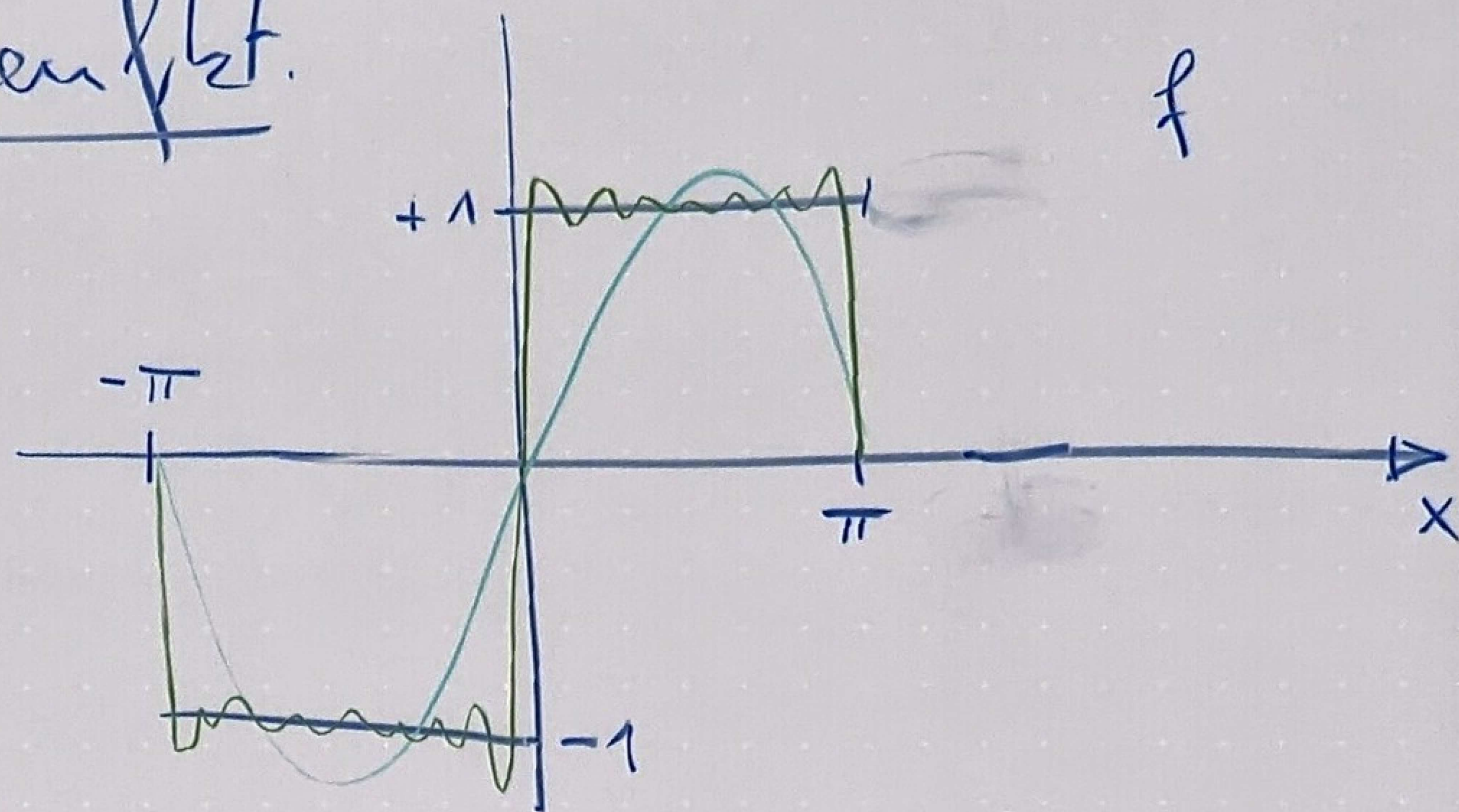
$$X = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{span}\{w_1, \dots, w_k\}}$$

Dann: $\exists$ vollst. ONS

und: $X \sim \ell^2(\mathbb{N})$
(isomorph)

oder X nicht separabel

Vorzeichenfkt.



$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left[\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$$

Berechne:

$$\langle f, \sin kx \rangle_{L^2}$$

(2)

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

Basisfunktionen:

auf $(0, T)$

$\underline{k > 0}$:

$$\begin{aligned} & \cdot \left(\sin \frac{2\pi kx}{T} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \\ & \cdot \left(\cos \frac{2\pi kx}{T} \right) \cdot \sqrt{\frac{2}{T}} \end{aligned}$$

$$\cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{T}}$$

NR:

$$\int_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) dx = \frac{T}{2}$$

Bem: (Intervalle austauschbar)

$$f: (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$$

Ziel: Fourier-Reihe = ?

Definiere $\tilde{f}: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) := f\left(x \cdot \frac{T}{2\pi}\right)$$

$$\hookrightarrow f(x) = \tilde{f}\left(x \cdot \frac{2\pi}{T}\right)$$

Berechne: $\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos kx + b_k \sin kx \right\}$

+ a_0

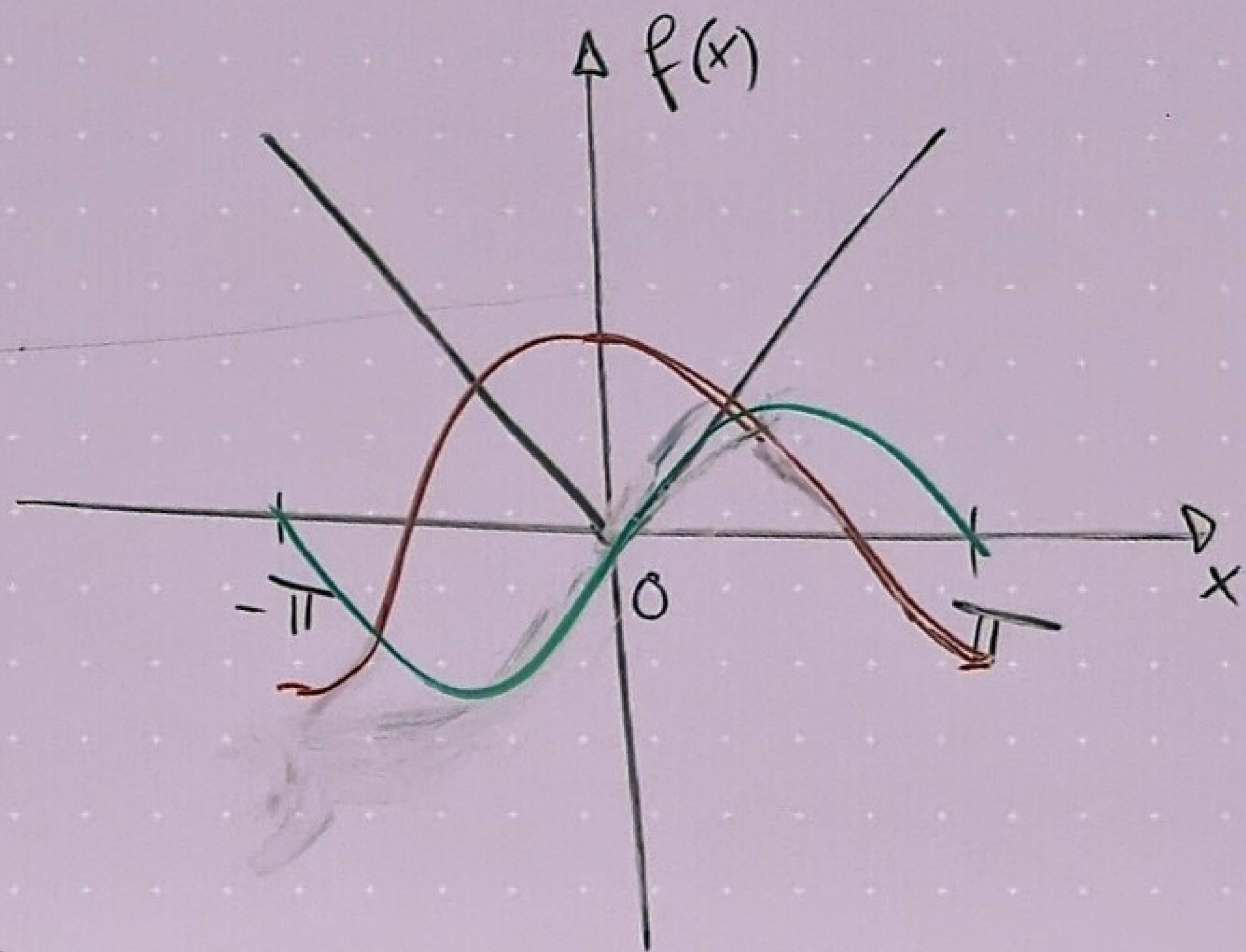
Dann:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ a_k \cos\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) + b_k \sin\left(k \frac{2\pi x}{T}\right) \right\}$$

Eine letzte Rechnung mit
 $\sin$ & $\cos$

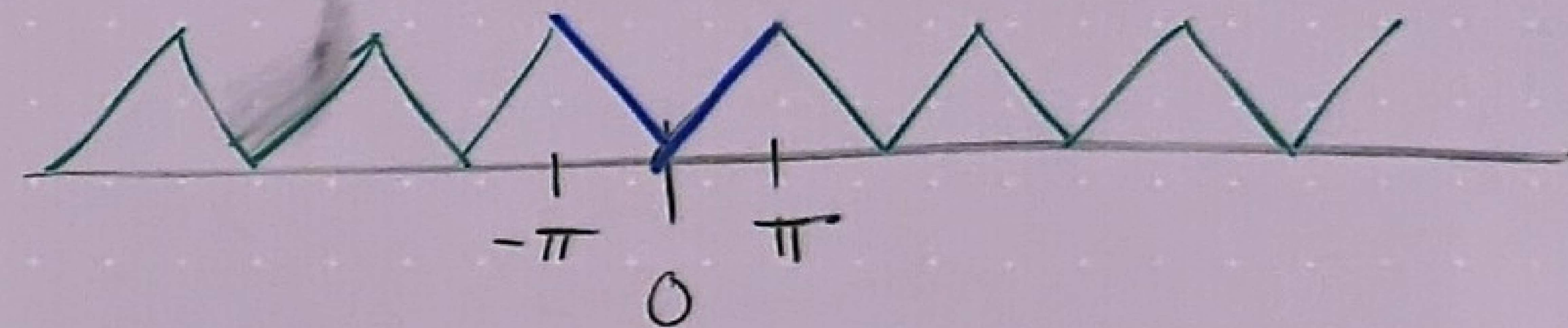
$$f: (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x|$$



Als per. Fkt. auf $\mathbb{R}$

(4)



Ziel: Schreibe f mit $\sin$ & $\cos$.

$$\textcircled{1} \quad \langle f, \sin kx \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

f symmetrisch ($f(x) = f(-x)$)

$x \mapsto \sin kx$ antisymm. ($f(x) = -f(-x)$)

Daher: $\langle f, \sin kx \rangle = 0 \quad \forall k.$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx$$

↑
nicht-normierte
Basisfunktion

$$= 2 \int_0^{\pi} \underbrace{f(x)}_{=x} \cos(kx) dx = -2 \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) dx$$

↓ ↑

$$+ 2 \times \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^{\pi}$$

$$= 2 \frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} + 2\pi \frac{1}{k} \underbrace{\sin(k\pi)}_{=0} \quad (5)$$

$$= \frac{2}{k^2} (\pm 1) - \frac{2}{k^2} (+1)$$

Basisfkt.: $\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}$
 $\left\{ \begin{array}{l} = -\frac{4}{k^2} \text{ falls } k \text{ ungerade} \\ +1 \text{ für } k \text{ gerade} \\ -1 \text{ für } k \text{ ungerade} \end{array} \right. \quad \text{bzw.: } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$
 $\left. \begin{array}{l} 0 \text{ sonst} \end{array} \right\}$

Damit:

$$|x| = f(x) = -\frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right] + a_0$$

Beobachtung:

$$f(x) = |x| \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$$

$$= g(x) := \text{sign}(x)$$

$$\frac{4}{\pi} \left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right]'$$

$$= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right]$$



Komplexe Basisfkt.

$$f(x) \in \mathbb{C}, \quad x \in (0, 2\pi)$$

$$f: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$$

$$e^{ikx}$$

$$X := L^2((0, 2\pi), \mathbb{C})$$

mit

$$\langle f, g \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Damit:

$$\|e^{ikx}\|^2 = \langle e^{ikx}, e^{ikx} \rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{ikx} \cdot \overline{e^{ikx}}}_{=1} dx = 1$$

$k \neq l$:

$$\begin{aligned} \langle e^{ikx}, e^{ilx} \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{e^{ikx} e^{-ilx}}_{=e^{i(k-l)x}} dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

(7)

Also: $(e^{ikx})_k$ ist ONS.

Hier: $k \in \mathbb{Z}$

$$v_k := e^{ikx}, \quad v_k: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto e^{ikx}$$

$(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sind ONS.

Satz: Diese $(v_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ sind vollst. ONS in X .

Angenommen:

$$f: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{mit } f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

$$\text{Dann: } f(x) = \overline{f(x)} \Rightarrow \sum c_k e^{ikx} = \sum \overline{c_k} e^{-ikx}$$

$$\text{Darstellung eindeutig} \Rightarrow c_{-k} = \overline{c_k} \quad \forall k$$