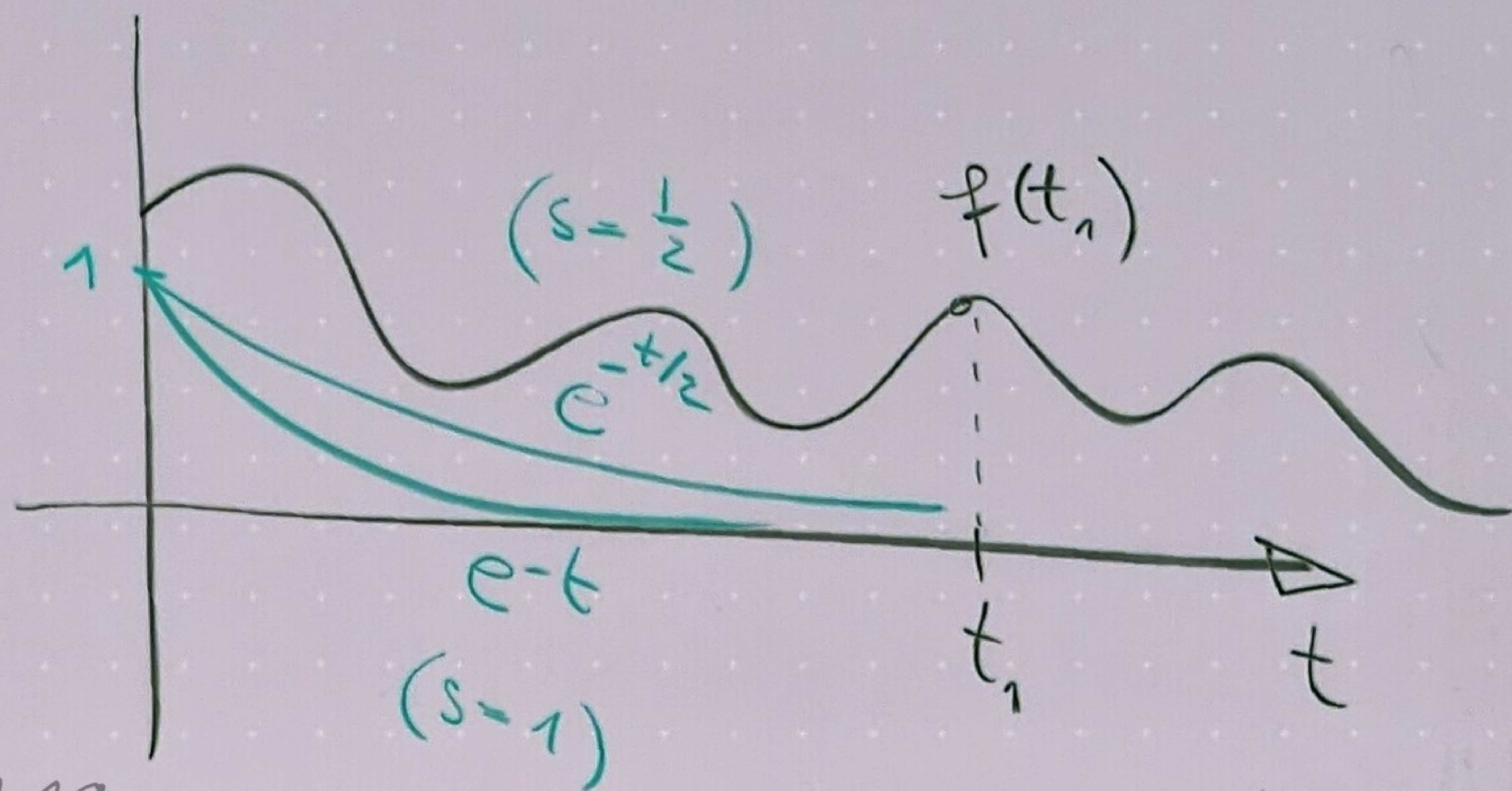


30. Laplace-Transfo

Idee: Gegeben ist

$$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$



Bilde neue Funktion ①

$$F(s) := \int_0^{\infty} f(t) e^{-ts} dt$$

Dies definiert

$$\mathcal{L}: f \mapsto F$$

Laplace-Transformation

Rechnung: $f \in C^1([0, \infty))$

$$\mathcal{L}[f'](s) = \int_0^{\infty} (f'(t)) e^{-ts} dt$$

($s > 0$)

$$= - \int_0^{\infty} f(t) (-s e^{-ts}) dt$$

$- f(0)$

$$= s \mathcal{L}[f](s) - f(0)$$

2023-11-29

$f \in C^2$

(2)

$$\mathcal{L}[f''](s) = \int_0^{\infty} f''(t) e^{-ts} dt$$

$$= s \int_0^{\infty} f'(t) e^{-ts} dt - f'(0)$$

$$= s^2 \int_0^{\infty} f(t) e^{-ts} dt - s f(0) - f'(0)$$

$$= s^2 \mathcal{L}[f](s) - s f(0) - f'(0)$$

Gewöhnliche DGL

$$(*) \quad y''(t) + 4y'(t) - y(t) = f(t)$$

$$y(0) = y_0$$

$$y'(0) = y_1$$

$$F(s) := \mathcal{L}[f](s)$$

$$Y(s) := \mathcal{L}[y](s)$$

Glt. für Y ?

Wende $\mathcal{L}$ auf beide

Seiten von $(*)$ an,

nutze Linearität von $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}[y''](s) = s^2 Y(s) - sy_0 - y_1$$

$$\mathcal{L}[y'](s) = sY(s) - y_0$$

$$s^2 Y(s) + 4sY(s) - Y(s)$$

$$= F(s) + sy_0 + y_1 + 4y_0$$

(3)

Also:

$$Y(s) = \frac{F(s) + s y_0 + y_1 + 4 y_0}{s^2 + 4s - 1}$$

Damit ist $Y(s)$ "explizit"
bestimmt

Für rigorose Einführung
der Laplace-Transformation: ④

Voraussetzungen:

① $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei

auf jedem Intervall

stückweise stetig

② f stetig in 0, $\lim_{t \downarrow 0} f(t) = f(0)$

③ f von exponentiellem Typ, d.h.:

$\exists a > 0$ und $M > 0$:

$$|f(t)| \leq M e^{at} \quad \forall t \in [0, \infty)$$

④ Vereinbarung: $f(t) := 0$ für $t < 0$

Dann: $\mathcal{L}[f](s)$ wohldefiniert für $\operatorname{Re} s > a$.

Bew: $|f(t) e^{-ts}| \leq M e^{at} e^{-t \operatorname{Re} s} \quad \textcircled{5}$

integrierbar über $[0, \infty)$

für $\operatorname{Re} s > a$

□

Bsp: Heaviside-Funktion

$$f(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

f von exp. Typ, es kann $a = 0$ gewählt werden.

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-ts} dt$$

$$= \frac{1}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re} s > 0$$

$$e^{-ts} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{s} e^{-ts} \right)$$

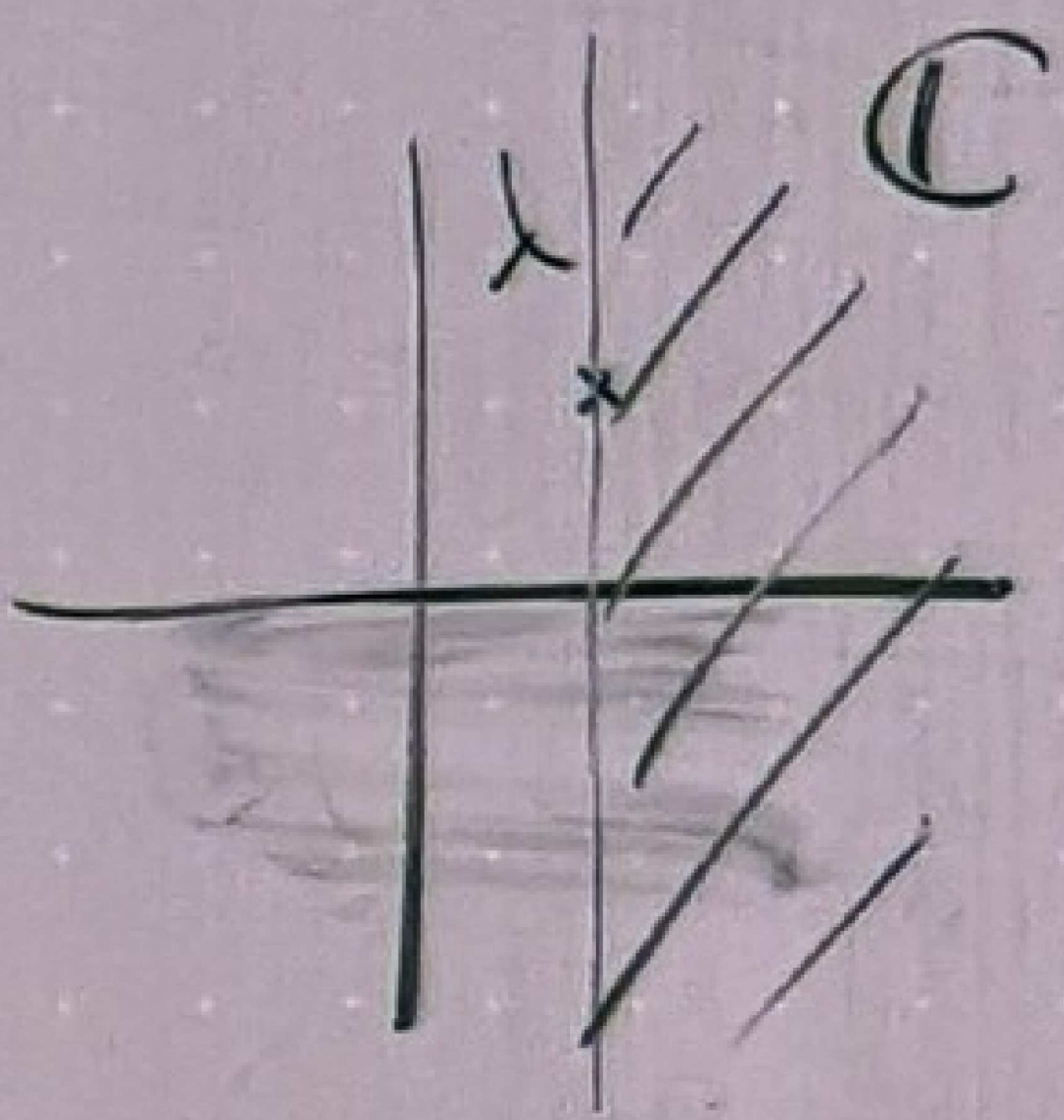
Bsp: $f(t) := t$

f vom exp. Typ für jedes $a > 0$.

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} t e^{-ts} dt \quad \textcircled{6}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{s} e^{-ts} dt = \frac{1}{s^2}$$

Bsp: $f(t) = e^{\lambda t}, \lambda \in \mathbb{C}$



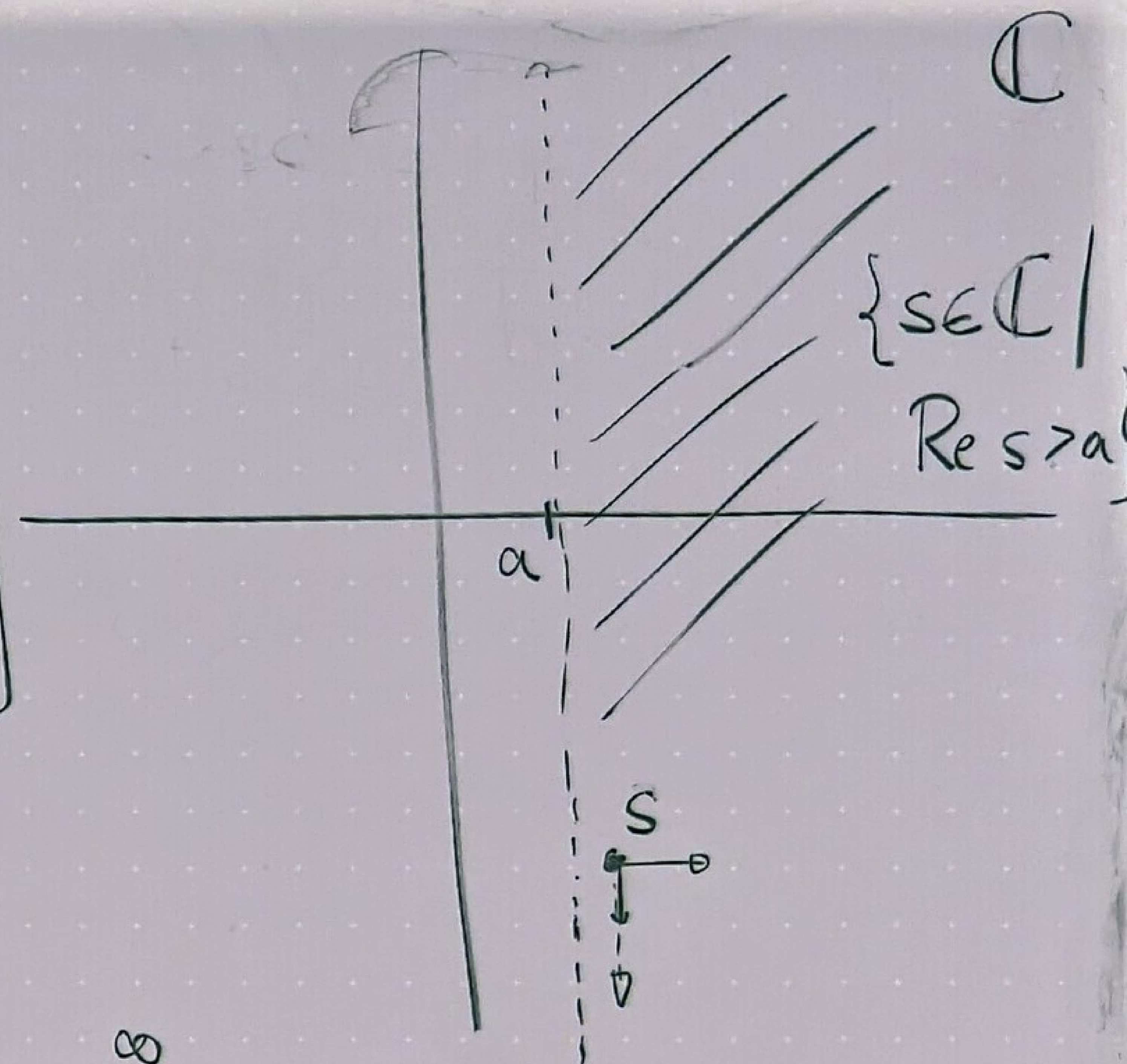
Ist vom exp. Typ für $a = \operatorname{Re} \lambda$

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^{\infty} e^{\lambda t} e^{-st} dt = \frac{1}{s - \lambda}$$

Eigenschaften der Laplace-Transformierten.

Sei f von exp. Typ mit Param. $a \in \mathbb{R}$

$$F(s) := \mathcal{L}[f](s)$$



$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-ts} dt \quad \text{wohldef.} \checkmark$$

$$|F(s)| \leq \int_0^{\infty} |f(t)| |e^{-ts}| dt$$

$$\leq \int_0^{\infty} M e^{at} e^{-t \operatorname{Re}(s)} dt$$

$$= M \frac{1}{\operatorname{Re}(s) - a}$$

Also: $F(s) \sim \frac{1}{\operatorname{Re}(s)}$ für $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$

Aber, für $\operatorname{Re}(s) = a + \delta$, $\delta > 0$ fest

Dann: $F(s) \leq \frac{M}{\delta}$ ohne Abfall
für $|s| \rightarrow \infty$

Positiv:

komplexe
Ableitung

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}[f](s) =$$

$$= \frac{d}{ds} \int_0^{\infty} f(t) e^{-ts} dt$$

Info:
Erlaubt

für $\operatorname{Re} s > a$

$$= \int_0^{\infty} [-t f(t)] e^{-ts} dt$$

$$= \mathcal{L}[-t f(t)](s)$$

Resultat:

F ist holomorph in $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > a\}$

Hauptsatz zur Laplace-Transf.

Satz (Rekonstruktion von f /
Inverse Laplace-Transf.)

Falls f geeignete Bed. erfüllt:

$$F(s) := \mathcal{L}[f](s) \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}, \gamma > a$$

$$\forall t \geq 0: f(t) := \frac{1}{2\pi} \text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma + i\gamma) \cdot e^{t(\gamma + i\gamma)} d\gamma$$

Bem:

(i) F bestimmt f eindeutig

(ii) Cauchy-Hauptwert i. allg. notwendig

(iii) Manchmal kann das
komplexe Wegintegral mit
dem Residuensatz berechnet
werden.

$$e^{t(\gamma + i\gamma)} d\gamma$$

(Cauchy-Hauptwert)

(iv) Formel wird
einsetzbar im
Kontext Fourier-Transf.

Erinnerung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R g(x) dx \text{ existiert} \\ \& \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^0 g(x) dx \text{ existiert} \\ \& A = L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\text{CH} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R g(x) dx \text{ existiert} \\ \& A = L \end{cases}$$

Bsp:

$$g(x) := \begin{cases} \frac{1}{1+|x|} & x > 0 \\ \frac{-1}{1+|x|} & x < 0 \end{cases}$$

Dann: $\int_{-\infty}^{\infty} g$ nicht existent

$$\text{CH} \int g = 0$$

31. Normierte Vektorräume

Ⓐ ca. Euler Funktionen sind

z.B.: x^3 , $\sin x$,
 $x^2 \cos(\exp x)$

Ⓑ später: Abbildung $f: A \rightarrow B$

z.B.: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Ⓒ Probleme: (ca. 1900) z.B.: $\int_a^b f$ wohldef.? (1')

→ Eigenschaften, z.B.: f stetig

Ⓓ Funktionenräume

$C^0([a, b], \mathbb{R})$ (st. Fkt.)

$C^1([a, b], \mathbb{R})$ (st. diffbar Fkt.)

C^α (Hölderst.), L^1 (intbar), L^p

①

Verallgemeinere ^(max in 60'ers)

den Eigenschaften

X ein normierter Vektorraum.

"Funktionalanalysis"

Erinnerung

②

X Vektorraum (über $\mathbb{R}$)

$$x, y \in X \Rightarrow x + y \in X$$

$$x \in X, a \in \mathbb{R} \Rightarrow ax \in X$$

$\| \cdot \|$ Norm auf X

Def: $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|x\| \geq 0 \forall x, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R}: \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$\forall x, y \in X: \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Bem: Ersetze überall $\mathbb{R}$
 durch $\mathbb{C}$ $\leadsto$ VR
 (aber: $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$) über $\mathbb{C}$

Beispiele

1) $\mathbb{R}^n$ ist VR über $\mathbb{R}$
 ($n \in \mathbb{N}$)

Mögliche Normen sind:

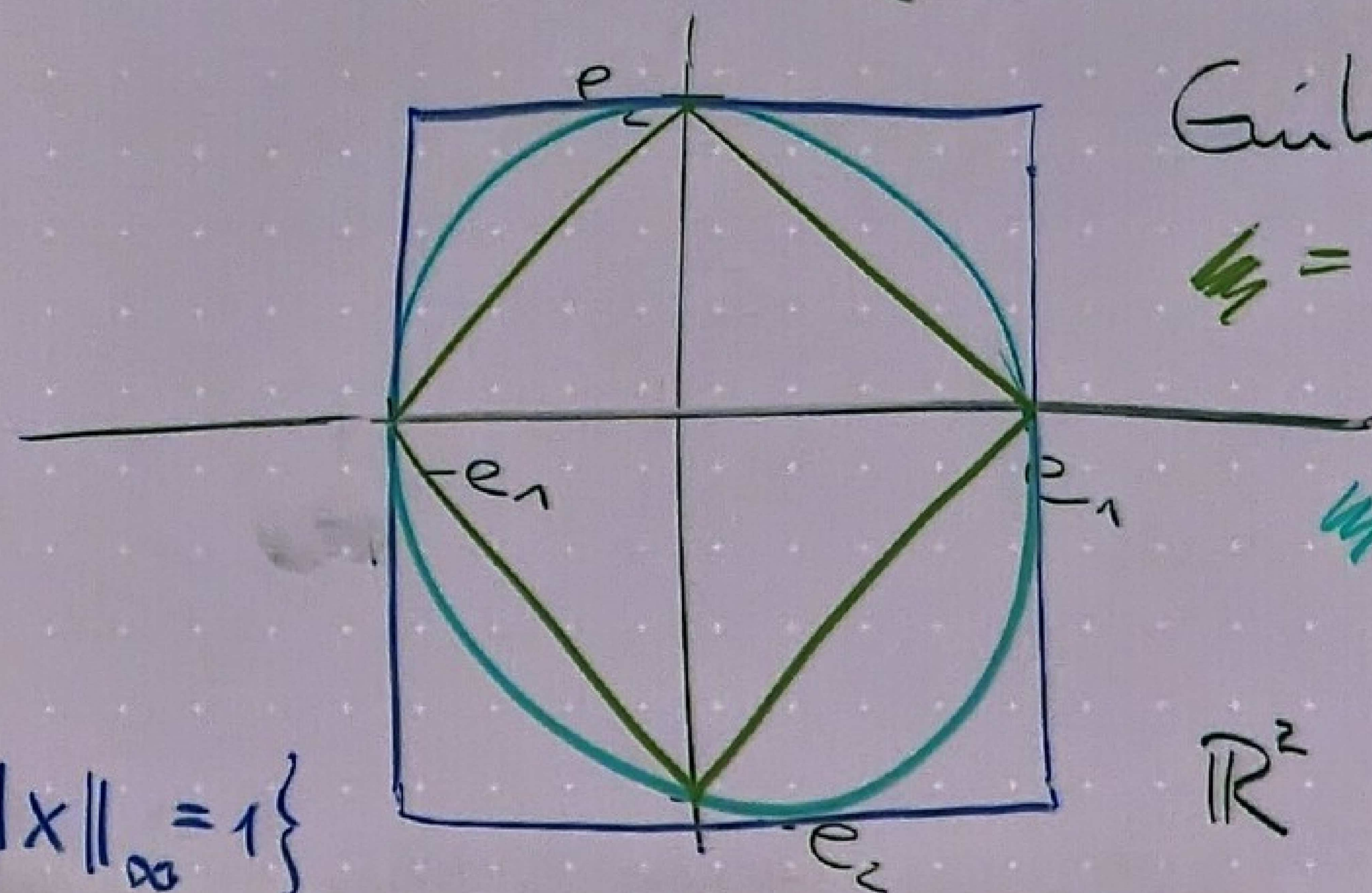
$\{x \mid$

$$\|x\|_\infty = 1\}$$

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$$

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|$$

$$\|x\|_\infty := \max_{k \leq n} |x_k|$$



Einheitskugeln
 $\{x \mid \|x\|_1 = 1\}$

$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid$
 $\|x\|_2 = 1\}$

$\mathbb{R}^2$

③

$$2) \quad \ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \mid \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

$$p \in [1, \infty) \quad = \left\{ x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \|x\|_p < \infty \right\}$$

$$\text{mit } \|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

$$3) \quad C^0([a, b], \mathbb{R}) \text{ mit } \|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

ist norm. VR.

Jeder norm. VR ist auch metr. Raum ④

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

Wichtiger: Es gibt einen Konvergenzbegriff

$$x_j \in X \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad x \in X$$

$$x_j \xrightarrow{X} x \iff \|x_j - x\|_X \rightarrow 0$$

Cauchy-Folgen

$(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ist CF

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \in \mathbb{N}.$$

$$\|x_j - x_i\|_X < \varepsilon \quad \forall j, i \geq k$$

Def: Ein normierter VR heißt vollständig, wenn jede CF konvergiert.

Ein vollst.-norm. VR

heißt Banachraum

Bei den Beispielen:

$\mathbb{R}^n$ mit jeder der Normen ist BR

$\ell^p(\mathbb{N})$ ist BR

$C^0([a, b], \mathbb{R})$ ist BR

⑤

Warning:

⑥

$$C^0(\mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ st.}\}$$

ist kein BR mit $\|f\| := \sup_x |f(x)|$

Denn: $\exists f \in C^0(\mathbb{R})$ mit $\|f\| = \infty$

Bsp: $f(x) = x$

Aber: $C_b^0(\mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ st.}$
ist BR. $\& \|f\| < \infty\}$

Warning: Auf $\ell^2(N)$ ist $\|\cdot\|_1$ keine Norm

Begründung: $\exists x \in \ell^2(N), \|x\|_1 = \infty$

Bsp: $x_k = \frac{1}{k}, \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty \checkmark \right)$

aber: $\sum \frac{1}{k} = \infty$ $\|x\|_{\ell^2}^2$

Andersrum:

Ist $\|\cdot\|_2$ eine Norm auf ℓ^1 ?

$$\|x\|_1 < \infty \Rightarrow \|x\|_2 < \infty \checkmark$$

Ja, ist eine Norm. Aber: ℓ^1 mit $\|\cdot\|_2$ ist nicht vollständig

(7)

So ähnlich auf $C^0([a,b], \mathbb{R}) =: X$

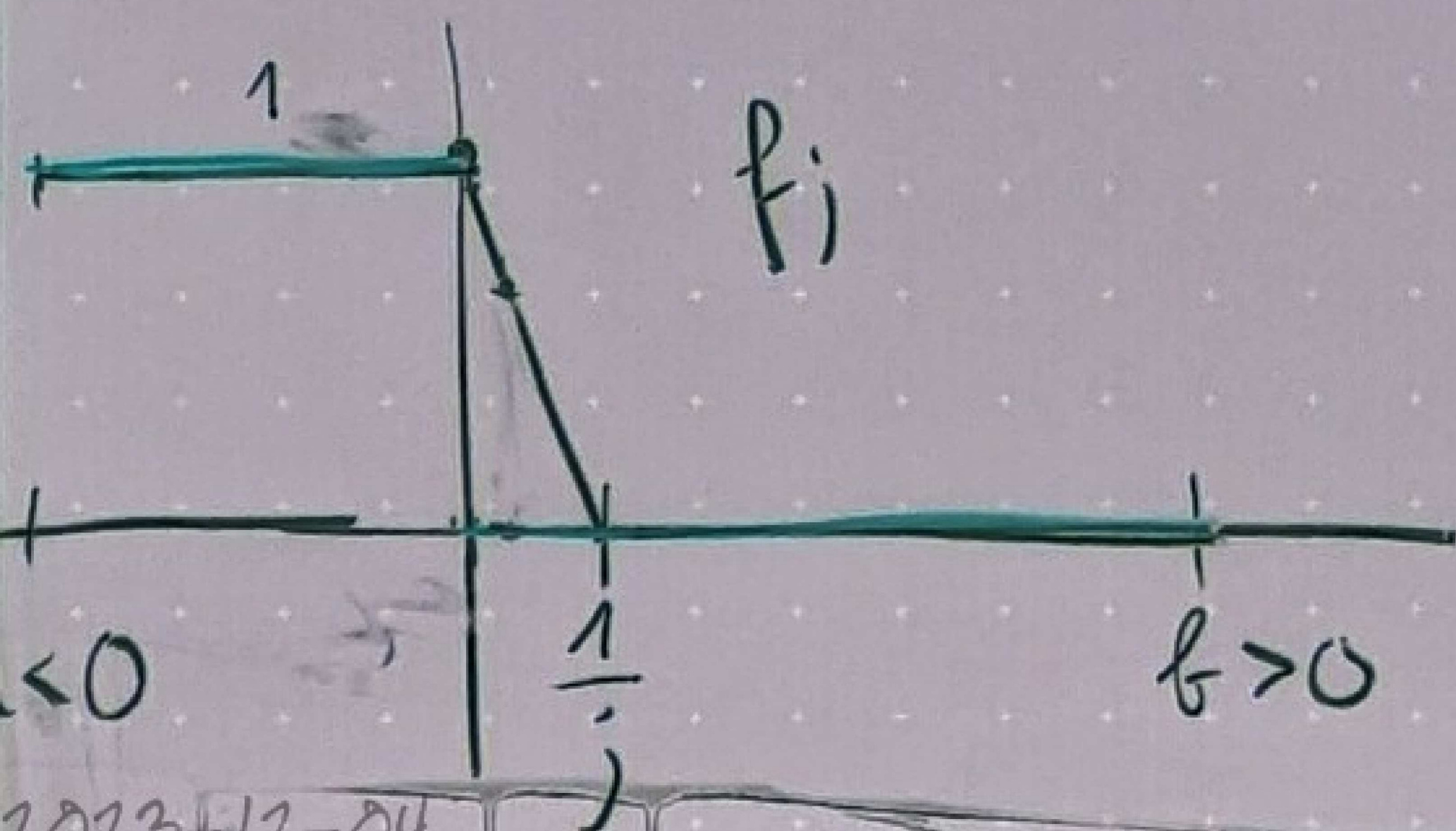
⑧

$$f \in X, \quad \|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$p \in [1, \infty)$$

Damit ist X ein norm. R.

— aber nicht vollständig



$$f_i \rightarrow f \text{ in } \|\cdot\|_p$$

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$x < 0$$

$$x > 0$$

Limes nicht stetig

Def: Zwei Normen $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$
auf einem VR X heißen
äquivalent, falls: $\exists C > 0$

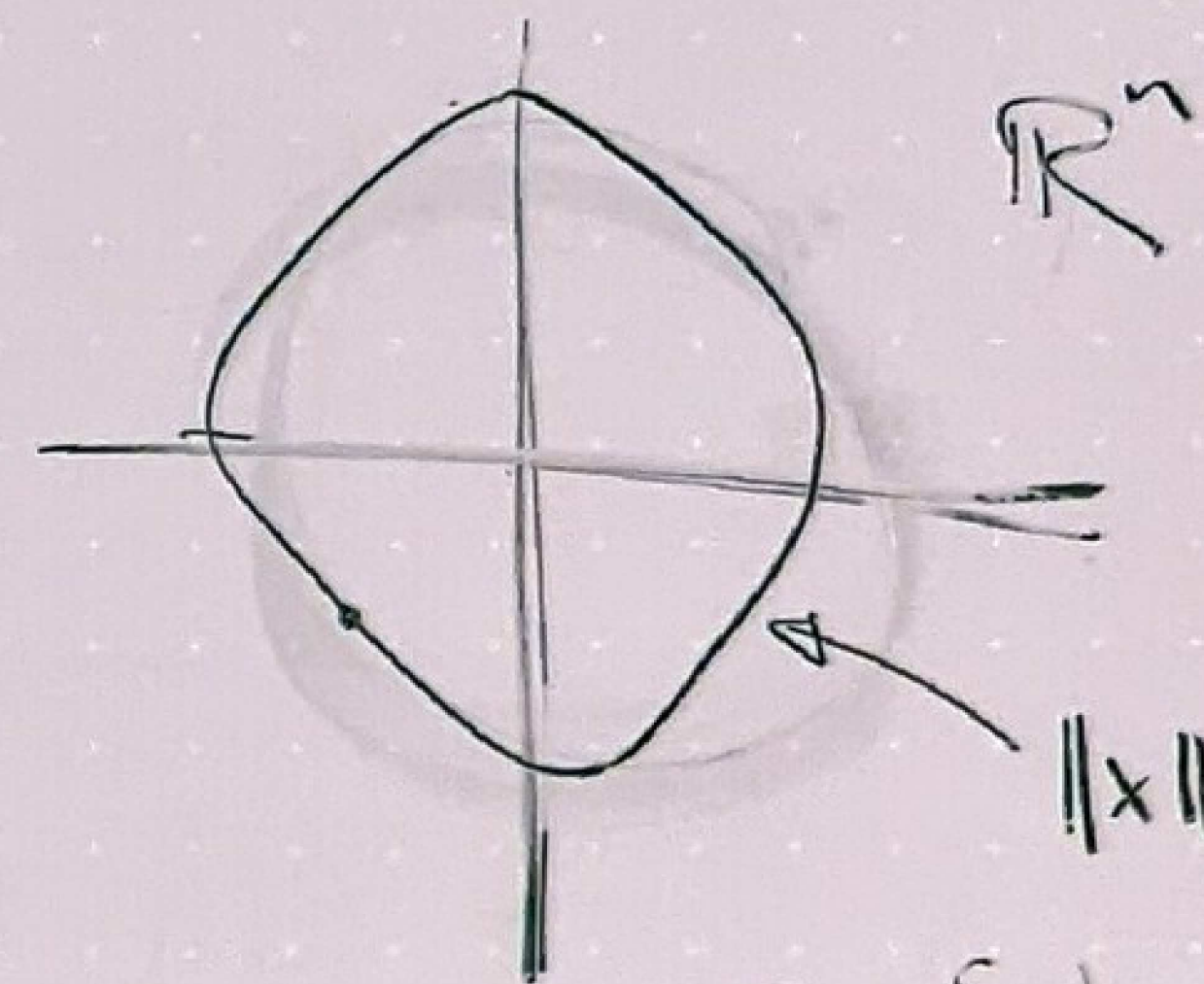
$$\frac{1}{C} \|x\|_B \leq \|x\|_A \leq C \|x\|_B \quad \forall x \in X$$

In diesem Fall: $x_j \xrightarrow{\|\cdot\|_A} x \Leftrightarrow x_j \xrightarrow{\|\cdot\|_B} x$

Bemerkenswerter Satz:

Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent.

Beweis: Einfach mit: St. Fkt. nehmen auf Kompakta
ihre Minimum an.



$$c_0 := \inf_{x \in S} \|x\|_B > 0$$

$$S := \{x \mid \|x\|_A = 1\} \quad 0 \notin S$$

Etwas konkreter:

10

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^p \leq n \left(\max_k |x_k| \right)^p$$

$$\Rightarrow \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$$

$$\max_k |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^p = \|x\|_p^p$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p$$

Young & Hölder & Minkowski

Young: $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$

$$p, q \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Dann gilt

$$ab \leq$$

Bew: $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

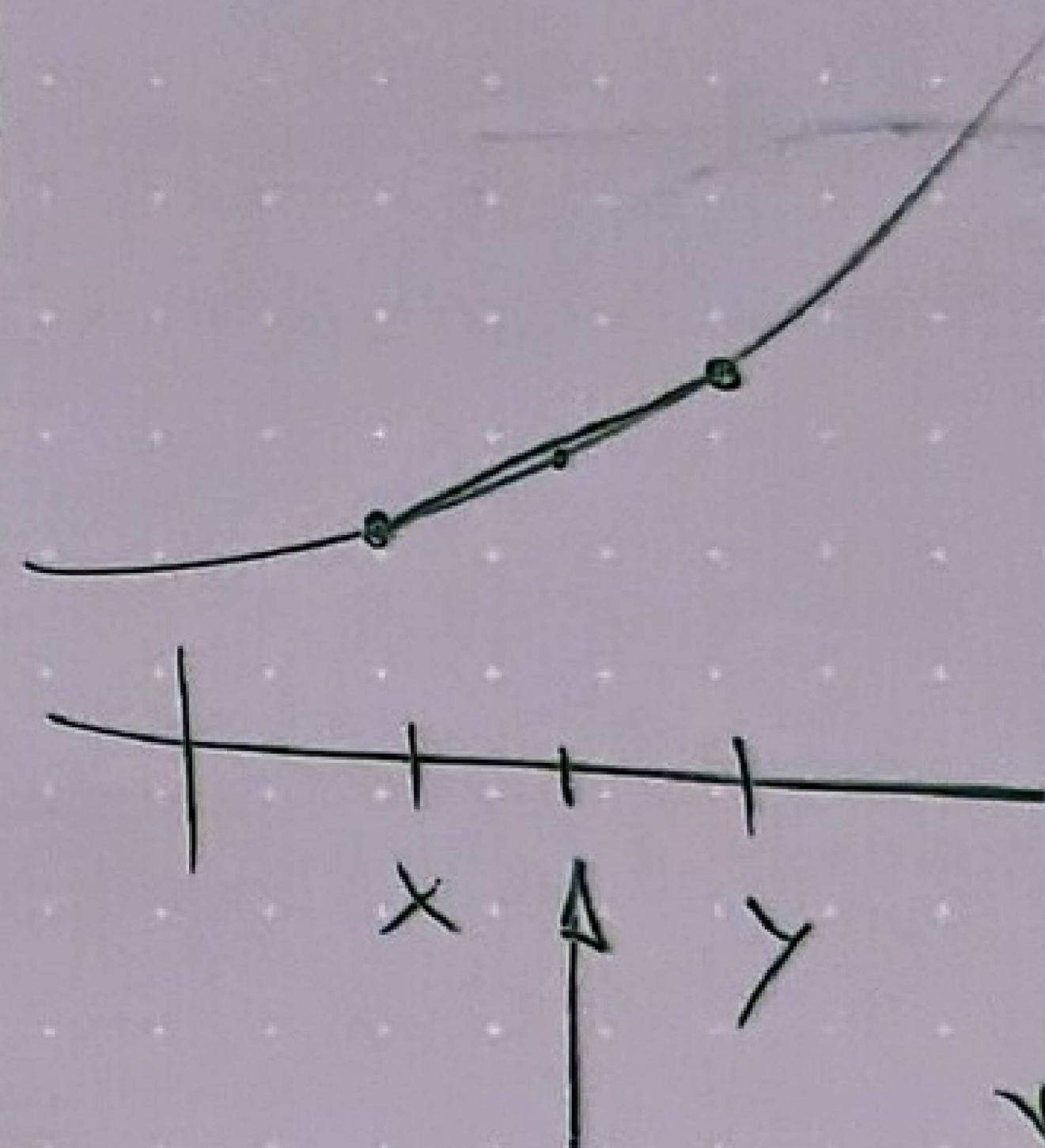
convex

$$(\exp'' = \exp \geq 0)$$

Also

$$\exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right)$$

$$\leq \frac{1}{p} \exp(x) + \frac{1}{q} \exp(y)$$



$$x = \ln(a^p)$$

$$y = \ln(b^q)$$

$$\text{r.S.} \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

$$\text{L.S.: } \frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q$$

$$= \ln a + \ln b$$

$$= \ln(ab)$$

Vektorraum (Addieren)

normierter VR $(\|\cdot\|)$

vollst. norm. VR = Banachraum = BR

(jede Cauchy-Folge konvergiert)

Auf ℓ^2 ist $\|\cdot\|_{\ell^1}$ keine Norm

$$\|x\|_{\ell^1} = \sum_k |x_k|$$

Bsp: $x_k = \frac{1}{k}$
2013-12-06

Umgekehrt:

ℓ^1 mit $\|\cdot\|_{\ell^2}$

ist norm. VR, aber kein BR

So ähnlich:

$$X = C^0([a,b])$$

$$\|f\|_{\infty} := \sup_x |f(x)|$$

Damit ist X
ein BR

①

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$p \in [1, \infty)$$

Damit ist X norm. VR,
kein BR.

Young: $a, b \geq 0$,

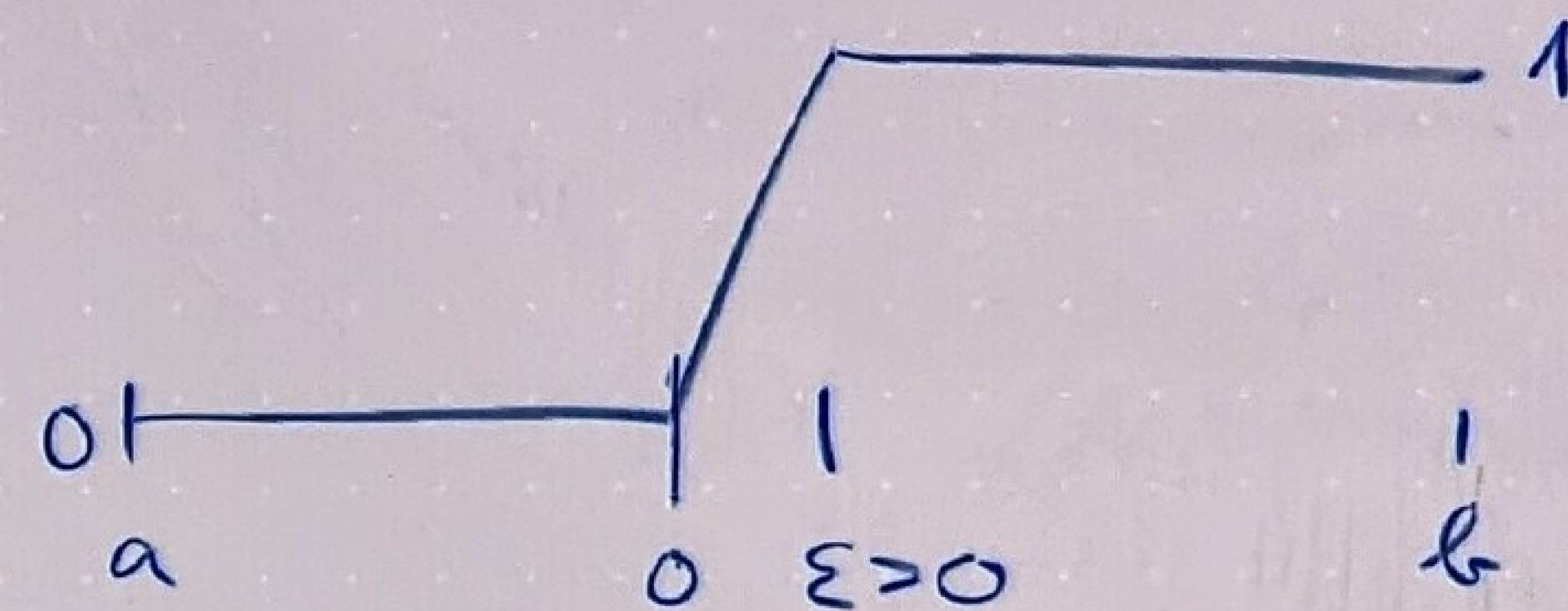
$$p, q \in (1, \infty)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

p dual zu q

Bsp:



$$\epsilon = \frac{1}{k} \rightarrow 0$$

Young, Hölder, Minkowski

Hölder (hier: $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$)
 $D \subset \mathbb{R}^n$

Gilt auch für Folgen

$$p, q \in (1, \infty), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Beh: $\int_D f \cdot g \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

Angenommen, Beh. gilt

$$\text{für } f, g \text{ mit } \|f\|_p = 1, \|g\|_q = 1.$$

Dann, für alle f, g : $\exists: f \neq 0 \neq g$

$$\int_D f \cdot g = \|f\|_p \|g\|_q \int \frac{f}{\|f\|_p} \cdot \frac{g}{\|g\|_q}$$

Ungl.
für norm.
Fkt $\leq \|f\|_p \|g\|_q = 1$

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_p} \right\|_p = \frac{1}{\|f\|_p} \|f\|_p = 1$$

(3)

Seien f, g normiert ($\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$)

$$\int_D f g \leq \int_D |f(x)| \cdot |g(x)| dx$$

Wähle für jedes: $|f(x)| = a$ und $|g(x)| = b$

$$\leq \int_D \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q dx$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

(4)

Minkowski = Dreiecksungl.

Beh: $\left(\int_D |f+g|^p \right)^{1/p}$
 $\leq \left(\int_D |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_D |g|^p \right)^{1/p}$

also: $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

$$\begin{aligned}
 (L.S.)^p &\leq \int_{\mathbb{D}} (|f| + |g|) (|f+g|)^{p-1} \\
 &= \int_{\mathbb{D}} \underbrace{|f| |f+g|^{p-1}} + |g| |f+g|^{p-1}
 \end{aligned}$$

Dual zu p ist q mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$$

$$q = \frac{p}{p-1}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Hölder} \\
 &\leq_{p, q} \left(\int_{\mathbb{D}} |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{D}} (|f+g|)^{p-1} \right)^{\frac{p}{p-1}} + I_2 \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$= \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$$

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}$$

□

Die Räume $L^p(D)$

$D \subset \mathbb{R}^n$, z.B.: $D = (0, T) \subset \mathbb{R}$

$p \in [1, \infty)$, z.B.: $p = 2$

$L^p(D)$ ist ein Raum von Funktionen
 $\{f: D \rightarrow \mathbb{R}\}$

oder auch
nach $\mathbb{C}$
oder $\mathbb{R}^m$

⑥

$L^p(D)$ ist die Vervollständigung
von $C^0(D)$ bzgl. $\|\cdot\|_p$.

(alle f in C^0 und alle
"Grenzfunktionen")

$L^p(D)$ ist ein Banachraum

z.B.: $L^2((0, T))$

Integrale:

Für jedes $f \in L^p(D)$ gibt es

(aus Vollständigkeit) $\int_D |f| \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(gilt nicht für Riemann: $\frac{1}{x}$ auf $(0,1)$)

und $\frac{1}{\sqrt{x}}$



Hätten gerne

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2$$

Aber: Riemann-Integral
ex. nicht.

(nur als ungentl. Int.)

Lebesgue $\Rightarrow$ Rechnung ok.

Bsp: $f(x) = x^\alpha$ auf $(0,1)$

$$\int_0^1 |x^\alpha|^p dx < \infty$$

$$\Leftrightarrow \alpha p > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 0 \\ p < \frac{1}{|\alpha|} \end{cases}$$

Für kleine p ist $f \in L^p$.

Nullmengen

$N \subset D$ heißt Nullmenge, falls

$$\int_D \mathbb{1}_N = 0$$

$$\mathbb{1}_N(x) := \begin{cases} 1 & x \in N \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

N Nullmenge $\Leftrightarrow$ Integrale sehen N nicht.

Konvergenzsätze helfen: Abz. Vereinigungen von Nullmengen sind Nullm. ⑧

Bsp: $\mathbb{Q} \cap (0,1) \subset (0,1)$

ist Nullmenge

Ein Punkt ist Nullmenge.

Eigentlich ist es so: $L^p(D)$ besteht aus

Äquivalenzklassen von Funktionen.

$$f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$$

Identifiziere f mit g ($f \sim g$)

(in $L^p(D)$ gilt: $f = g$)

falls: $\exists$ Nullmenge N :

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in D \setminus N$$

Also: $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ ③

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann, in $L^p((0,1))$:

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$$

Insbes.: $\int_{(0,1)} \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ existiert und $= 0$

Bem: $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ ist nicht Riemann-intbar

Messbarkeit

Als Warnung: Es gibt
Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$,

die nicht messbar sind

$$\leadsto \nexists \int_D f \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Konstruktion ist sehr theoretisch
& kompliziert

Räume mit Skalarprodukt ⁽¹⁰⁾

X ein norm. VR (über $\mathbb{R}$)

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left(\forall x, y \in X: \langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \right)$$

linear, $\langle u, x \rangle$ und $\langle u, y \rangle$, $\langle x, x \rangle > 0$

Symmetrie

$$\forall x \neq 0$$