Kapitel 35 – Potentialgleichung

Ziel: Modelliere die Wärmeausbreitung in einem Gebiet $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $n = 2$ oder $n = 3$.

Variablen:

- $u : K \to \mathbb{R}$ die Temperaturverteilung
- $\vec{j} : K \to \mathbb{R}^n$ der Wärmefluss (in welche Richtung wird Wärmeenergie transportiert und wie viel)

Gleichungen:

- Sei $V \subset K$ ein beliebiges Volumen mit äußerem Normalenvektor $\vec{n}$. Da sich die Wärmeverteilung nicht ändert, wird insgesamt keine Wärmeenergie in das Volumen V hineintransportiert, d.h. (im Fall $n = 3$)
$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{n}\, dS = 0 \overset{\text{Gauß}}{\Leftrightarrow} \int_V \text{div}\vec{j}\, d(x, y, z) = 0$$
Da $V \subset K$ beliebig war, gilt
$$\text{div}\,\vec{j} = 0 \quad \text{in } K$$
- Wärmeenergie strömt von wärmeren in kältere Regionen, mit einer Flussrate, die proportional zum Temperaturgradienten ist,
$$\vec{j} = -a\nabla u \quad \text{in } K$$
Dabei ist $a > 0$ die Leitfähigkeit des Materials.
- Insgesamt: $\text{div}(-a\nabla u) = 0 \Leftrightarrow \Delta u = 0$ in K.

Definition 35.1 (Potentialgleichung)

Die POTENTIALGLEICHUNG *oder* LAPLACE-GLEICHUNG *lautet*

$$\Delta u = 0 \quad \textit{in } K$$

Die Lösungen der Potentialgleichung heißen HARMONISCHE FUNKTIONEN.

Als Verallgemeinerung betrachtet man auch die POISSON-GLEICHUNG *(inhomogene Laplace-Gleichung)*

$$\Delta u = f$$

Die Gleichung wird auf einem Gebiet $K \subset \mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ betrachtet.

- Der Rand ∂K besteht aus endlich vielen regulären Kurven ($G \subset \mathbb{R}^2$) oder orientierten Flächenstücken ($G \subset \mathbb{R}^3$).
- $\vec{n}$: sei der äußere Normalenvektor auf ∂K (mit Länge 1)
- $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = \nabla u \cdot \vec{n}$ sei die Richtungsableitung nach der äußeren Normalen

Harmonische Funktionen haben besondere Eigenschaften. Wir formulieren diese in Dimension $n = 3$. Sie gelten entsprechend auch für $n = 2$.

Satz 35.2 (Mittelwerteigenschaft I)

Sei $u : K \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta u = 0$ in K. Dann gilt

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{|\partial B_r(\vec{x})|} \int_{\partial B_r(\vec{x})} u \, dS$$

für jede Kugel $B_r(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid |\vec{x} - \vec{y}| < r\}$ mit $\overline{B_r(\vec{x})} \subset K$.
Dabei ist $|\partial B_r(\vec{x})| = \int_{\partial B_r(\vec{x})} 1 \, dS$.

Beweis: Definiere die Funktion

$$\Phi(r) := \frac{1}{|\partial B_r(\vec{x})|} \int_{\partial B_r(\vec{x})} u \, dS$$

und zeige, dass $\Phi'(r) = 0$. Folglich gilt

$$\Phi(r) = \lim_{s \to 0+} \Phi(s) = u(\vec{x}).$$

Satz 35.3 (Mittelwerteigenschaft II)

Sei $u : K \to \mathbb{R}$ *zweimal stetig differenzierbar mit* $\Delta u = 0$ *in* K *und* $B_r(\vec{x}) \subset K$. *Sei weiterhin* $\varphi : [0, r] \to \mathbb{R}$ *eine integrierbare Gewichtsfunktion mit* $\int_{B_r(0)} \varphi(|\vec{x}|)\, d\vec{x} = 1$. *Dann gilt*

$$u(\vec{x}) = \int_{B_r(\vec{x})} u(\vec{y})\varphi(|\vec{y} - \vec{x}|)\, d\vec{y}.$$

Der Beweis verwendet die ZWIEBELINTEGRATION und Satz 35.2, wonach (in Dimension $n = 3$)

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(\vec{x})} u(\vec{y})\varphi(|\vec{y} - \vec{x}|)\, d\vec{y} &= \int_0^r \int_{\partial B_1(0)} u(\vec{x} + s\vec{z})\varphi(s)\, dS(\vec{z})\, s^2\, ds \\
&= \int_0^r u(\vec{x})|\partial B_1(0)|\varphi(s) s^2\, ds \\
&= u(\vec{x}) \int_{B_r(0)} \varphi(|\vec{y}|)\, d\vec{y} = u(\vec{x}).
\end{aligned}$$

Harmonische Funktionen sind unendlich oft differenzierbar.

Satz 35.4 (Regularität)

Sei $u : K \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $\Delta u = 0$ in K. Dann ist u unendlich oft stetig differenzierbar.

Beweis: Man verwendet die Mittelwerteigenschaft aus Satz 35.3 mit einer unendlich oft differenzierbaren Gewichtsfunktion φ und zeigt, dass alle Ableitungen auf die Gewichtsfunktion φ "fallen".

Die Mittelwerteigenschaft liefert das folgende wichtige Prinzip:

Satz 35.5 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen)

$K \subset \mathbb{R}^2$ (oder $\mathbb{R}^3$) sei ein beschränktes Gebiet, u eine in K zweimal stetig differenzierbare harmonische Funktion, die auf $\overline{K}$ definiert und stetig ist. Dann nimmt u sein Maximum auf ∂K an.

Hieraus folgt schon die Eindeutigkeit der Lösung des Dirichlet-Problems:

Satz 35.6 (Eindeutigkeit)

Sei K ein beschränktes Gebiet (in $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$). Dann hat das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } K \\ u(\vec{x}) &= g(\vec{x}) && x \in \partial K \qquad \text{stetige Randbed.} \end{aligned}$$

mit stetiger Funktion g höchstens eine Lösung.

Beweis: Seien u_1, u_2 zwei Lösungen. Dann erfüllt die Differenz $w := u_1 - u_2$

$$1)\ \Delta w = 0 \quad \text{in } K \qquad 2)\ w(\vec{x}) = 0 \quad \text{für } x \in \partial K.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt $w = 0$, also $u_1 = u_2$.

35.7 (Randwertprobleme)

Die folgenden Randwertprobleme werden gestellt:

(a) Dirichlet-Problem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } K \\ u(\vec{x}) = g(\vec{x}) & x \in \partial K \qquad \textit{Randbed.} \end{cases}$$

(b) Neumann-Problem:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \textit{in } K \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = h(\vec{x}) & x \in \partial K \qquad \textit{Randbed.} \end{cases}$$

(c) gemischtes Problem: *mit* $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (\textit{in } K) \\ au(\vec{x}) + b\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}) = k(\vec{x}) & x \in \partial K \qquad \textit{Randbed.} \end{cases}$$

Die Lösungsmethoden Methoden hängen stark vom Gebiet K ab.

35.8 (Dirichlet-Problem auf einer Kreisscheibe)

$K \subset \mathbb{R}^2$ sei die Kreisscheibe um 0 mit Radius $r_0 > 0$.
Das Dirichlet-Problem in Polarkoordinaten lautet

$$u_{xx} + u_{yy} = U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi} = 0, \qquad 0 < r < r_0,\ 0 < \varphi < 2\pi. \qquad \text{(A)}$$

Dabei ist $u(x,y) = U(r,\varphi)$ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Damit U wohldefiniert ist, verlangen wir

$$\begin{cases} U(0,\varphi) = \text{const}, & 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \\ U(r,0) = U(r,2\pi), & 0 < r \leqslant r_0. \end{cases} \qquad \text{(B)}$$

Die Dirichlet-Randbedingung für $(x,y) \in \partial K$ gibt schließlich

$$U(r_0,\varphi) = g(\varphi), \qquad g \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}. \qquad \text{(C)}$$

Wir haben folgende Aussage hergeleitet:

Satz 35.9 (Lösung des Dirichlet-Problems)

Gegeben sei das Dirichlet-Problem auf der Kreisscheibe vom Radius $r_0 > 0$ *um den Nullpunkt. Die Randbedingung laute in Polarkoordinaten*

$$U(r_0, \varphi) = g(\varphi),$$

wobei g *stetig und periodisch mit der Periode* 2π *sei und die Fourier-Reihe gegen* g *konvergiere. Dann ist eine Lösung des Dirichlet-Problems gegeben durch*

$$u(x, y) = U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \varphi)} \, d\theta.$$

Das obige Integral nennt man das Poisson-Integral *von* g.
$u(x, y)$ *ist eine harmonische Funktion im Innern der Kreisscheibe.*
Es gilt

$$\lim_{r \to r_0 -} U(r, \varphi) = g(\varphi) \quad \text{für alle } \varphi\,.$$

Bemerkungen

(1) Für $r = 0$ folgt sofort die Mittelwerteigenschaft I der harmonischen Funktion u:

$$u(0,0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(r_0, \theta)\, d\theta.$$

(2) Man erkennt auch folgendermaßen, dass $u(x,y)$ harmonisch ist:
Mit $z = x + iy = re^{i\varphi}$ gilt

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \left[\frac{1}{2} + \mathrm{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{r_0^n} e^{-in\theta} \right) \right] d\theta$$

also ist u der Realteil einer holomorphen Funktion im Innern der Kreisscheibe (vgl. Funktionentheorie)

Wir betrachten hier beliebige Raumdimensionen $n \in \mathbb{N}$.

Definition 35.10 (Kugelsymmetrisches Randwertproblem)

Ein Randwertproblem der Form

$$\begin{aligned} \Delta u(\vec{x}) &= f(|\vec{x}|) \quad \text{in } K \\ u(\vec{x}) &= g(|\vec{x}|) \quad \text{auf } \partial K \end{aligned}$$

auf rotationssymmetrischen Gebieten $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt KUGELSYMMETRISCHES RANDWERTPROBLEM.

Rotationssymmetrische Gebiete sind etwa

- $B_r = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{x}| < r\}$
- $B_r \backslash \overline{B_s} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid s < |\vec{x}| < r\}$

Ansatz für die Lösung:

$$u(\vec{x}) = \varphi(|\vec{x}|), \quad \vec{x} \in K \backslash \{0\}$$

mit einer Funktion $\varphi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Dann gilt mit $r := |\vec{x}|$

$$\Delta u(\vec{x}) = \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = r^{1-n}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\varphi'(r)\right)$$

Kapitel 36 – Diffusionsgleichung

Diffusionsgleichung

Definition 36.1 (Diffusionsgleichung)

Gegeben sei ein Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$ *und* $c > 0$. *Sei* $u : M \times (0, \infty)$ *eine (genügend oft differenzierbare) Funktion des Ortes* $\vec{x} \in M$ *sowie der Zeit* $t \in (0, \infty)$. *Wir bilden die partiellen Ableitungen* u_t *nach der Zeitvariablen und* Δu *nach der Ortsvariablen.*

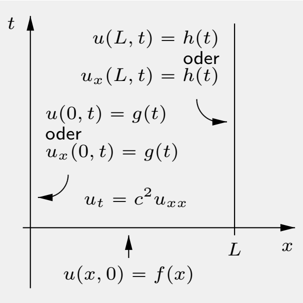
u *erfüllt die* Wärmeleitungsgleichung *oder* Diffusionsgleichung *(engl. heat equation), wenn gilt*

$$u_t(\vec{x}, t) - c^2 \Delta u(\vec{x}, t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \vec{x} \in M,\ t \in (0, \infty).$$

Hierdurch wird oft die Temperaturverteilung in einem Körper modelliert.

Für $x \in \mathbb{R}$: Eine Funktion $u(x, t)$ mit $u_t - c^2 u_{xx} = 0$ beschreibt die Spannung in einem Kabel oder die Temperatur in einem dünnen Stab zur Zeit $t > 0$.

Anfangs-und Randbedingungen



- Die Temperaturverteilung zur Zeit $t = 0$ ist bekannt:

  $u(\vec{x}, 0) = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in M,$ Anfangsbedingung

- Die Temperatur oder der Wärmefluss am Rand $\Gamma = \partial M$ des Gebietes sind bekannt, also entweder

  $u(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in \Gamma, \ \ t > 0,$ Dirichlet-Randbedingung

  oder

  $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}(\vec{x}, t) = g(\vec{x}, t), \qquad \vec{x} \in \Gamma, \ \ t > 0,$ Neumann-Randbedingung

Wiederholung: $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ ist die Richtungsableitung von u am Rand von M in Richtung der äußeren Normalen.

Lösung des Anfangs-Randwertproblem in 1D

Wir beschreiben die Lösung im eindimensionalen Fall.

Mit $M = (0, L)$ (Stab der Länge L) lautet das Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in (0,L), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,L), \qquad \text{(Anfangsbedingung)} \\ \left.\begin{aligned} u(0,t) &= g(t) \\ u(L,t) &= h(t) \end{aligned}\right\} & t > 0, \qquad \text{(Dirichlet-Randbedingung)} \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, & x \in (0,L), \quad t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in (0,L), \qquad \text{(Anfangsbedingung)} \\ \left.\begin{aligned} u_x(0,t) &= g(t) \\ u_x(L,t) &= h(t) \end{aligned}\right\} & t > 0. \qquad \text{(Neumann-Randbedingung)} \end{cases}$$

Satz 36.2 (Grundlösungen der Diffusionsgleichung)

Die Funktionen

$$\psi_s(x,t) = e^{-c^2 st}(A_s \cos(\sqrt{s}x) + B_s \sin(\sqrt{s}x)) \qquad \textit{mit} \;\; s > 0,$$

$$\psi_0(x,t) = A_0 + B_0 x, \qquad (\textit{für} \;\; s = 0),$$

sowie

$$\psi_s(x,t) = e^{-c^2 st}(A_s e^{\sqrt{|s|}x} + B_s e^{-\sqrt{|s|}x}) \qquad \textit{mit} \;\; s < 0$$

erfüllen die Diffusionsgleichung $u_t - c^2 u_{xx} = 0$.

Bemerkung: Die Funktionen ψ_s mit $s \geqslant 0$ sind auf dem Definitionsbereich $[0, L] \times [0, \infty)$ beschränkt.

Satz 36.3 (Lösung des Anfangs-Randwertproblems mit Dirichlet-Randbedingungen)

Das Anfangs-Randwertproblem

$$u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad x \in (0,L), \quad t \in (0,\infty),$$

mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \qquad t \in (0,\infty)$$

wird zu jeder Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in (0,L),$$

mit quadrat-integrierbarer Funktion f gelöst durch die Funktion

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-c^2(k\pi/L)^2 t}$$

mit den reellen Koeffizienten

$$b_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx, \qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Bemerkungen zur Konvergenz der Reihe:

- Für $t = 0$: Die Reihe konvergiert gegen f im Sinne der Konvergenz im quadratischen Mittel. Falls f stetig ist, die Randbedingung $f(0) = f(L) = 0$ erfüllt und sogar stückweise stetig differenzierbar ist, konvergiert die Reihe sogar punktweise gegen f.

- Für $t > 0$: Die Reihe konvergiert gleichmäßig gegen die stetige Funktion $u(x, t)$: denn die Koeffizienten b_k sind beschränkt (sie bilden sogar eine Nullfolge wegen der Parseval-Identität), also ist

  $$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| e^{-c^2 (k\pi/L)^2 t}$$

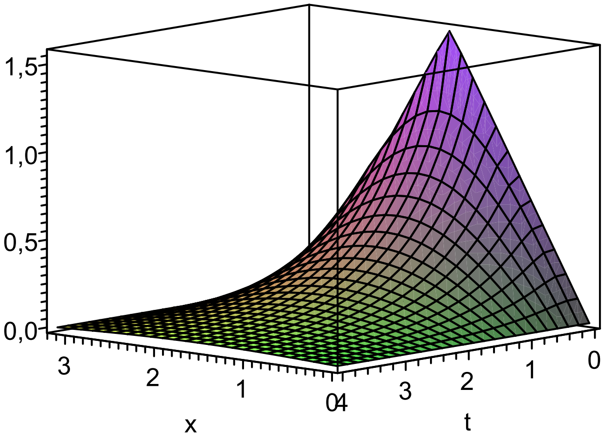
  eine konvergente Majorante. Man zeigt sogar:

Satz 36.4 (Eigenschaften der Lösung)

Die Lösung $u(x, t)$ der Diffusionsgleichung zu quadrat-integrierbarer Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$ und homogenen Dirichlet-Randbedingungen ist im Streifen $(0, L) \times (0, \infty)$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Es gilt

$$\lim_{t \to \infty} u(x, t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in [0, L].$$

(Abkühlung des gesamten Stabes der Länge L auf 0 Grad.)


1,5
1,0
0,5
0,0
3
2
1
0
x
4
3
2
1
0
t

Satz 36.5 (Lösung des Anfangs-Randwertproblems mit Neumann-Randbedingungen)

Das Anfangs-Randwertproblem

$$u_t(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0, \qquad x \in (0,L), \quad t \in (0,\infty),$$

mit homogenen Neumann-Randbedingungen

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(L,t) = 0, \qquad t \in (0,\infty)$$

wird zu jeder Anfangsbedingung

$$u(x,0) = f(x), \qquad x \in (0,L),$$

mit quadrat-integrierbarer Funktion f gelöst durch die Funktion

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right) e^{-c^2(k\pi/L)^2 t}$$

mit den reellen Koeffizienten

$$a_k = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{k\pi}{L}x\right)dx, \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

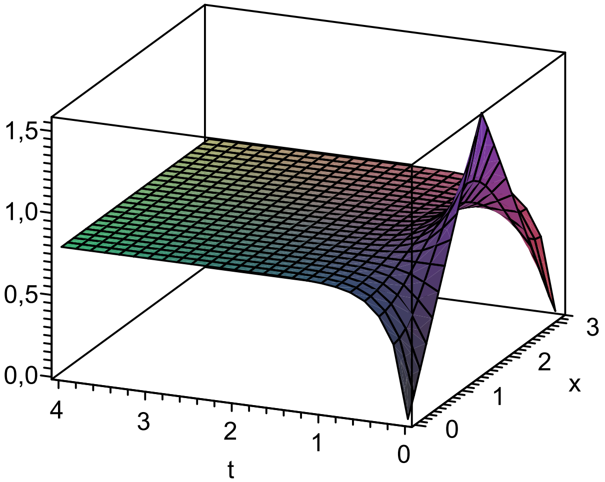
Die Bemerkungen zur Konvergenz der Reihe gelten wie bei Dirichlet-Randbedingungen.

Satz 36.6 (Eigenschaften der Lösung)

Die Lösung $u(x,t)$ der Diffusionsgleichung zu quadrat-integrierbarer Anfangsbedingung $u(0,t) = f(x)$ und homogenen Neumann-Randbedingungen ist im Streifen $[0,L] \times (0,\infty)$ beliebig oft stetig partiell differenzierbar. Es gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \quad \textit{für alle} \;\; x \in [0,L].$$

(Temperaturausgleich entlang des Stabes der Länge L auf den Mittelwert der Anfangstemperatur.)


1,5
1,0
0,5
0,0
4
3
2
1
0
t
0
1
2
3
x

Wie die Laplace-Gleichung erfüllt auch die Diffusionsgleichung ein Maximumprinzip.

Notation: Für ein Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$ und $T > 0$ definieren wir

- $M_T := M \times (0, T)$ den Raum-Zeit-Zylinder
- $\Gamma := (\partial M \times [0, T]) \cup (\overline{M} \times \{0\})$ den parabolischen Rand

Satz 36.7 (Parabolisches Maximumprinzip)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und sei u eine auf M_T zweimal stetig differenzierbare und auf $\overline{M}_T$ stetige Funktion, die die Diffusionsgleichung

$$\partial_t u - c^2 \Delta u = 0 \quad \text{in } M_T$$

erfüllt. Dann nimmt u sein Maximum auf dem parabolischen Rand Γ an.

Wie können inhomogene Randbedingungen realisiert werden?

Antwort: Mit Hilfe der allgemeinen Grundlösungen ψ_s und η_s in **??**. Dabei verwenden wir nur die beschränkten Grundlösungen mit $s \geqslant 0$.
Zunächst werden Dirichlet-Randbedingungen behandelt:

Satz 36.8

(i) *Falls die Funktion h die Darstellung als Parameterintegral*

$$h(t) = \int_0^\infty B(s) \sin(\sqrt{s}L) e^{-c^2 st} \, ds,$$

mit einer stetigen und beschränkten Funktion B besitzt, so ist

$$u_R(x,t) = \int_0^\infty B(s) \sin(\sqrt{s}x) e^{-c^2 st} \, ds$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung zu den Randwerten

$$u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = h(t), \qquad t > 0.$$

(ii) Falls die Funktion g die Darstellung als Parameterintegral

$$g(t) = \int_0^\infty A(s) \sin(\sqrt{s} L) e^{-c^2 st} \, ds,$$

mit einer stetigen und beschränkten Funktion A besitzt, so ist

$$u_L(x,t) = \int_0^\infty A(s) \sin(\sqrt{s}(L - x)) e^{-c^2 st} \, ds$$

eine Lösung der Diffusionsgleichung zu den Randwerten

$$u(0,t) = g(t), \quad u(L,t) = 0, \qquad t > 0.$$

Bemerkung:

- Ersetzt man jeweils $\sin$ durch $\cos$, erhält man Lösungen mit inhomogenen Neumann-Randbedingungen.
- Statt des Parameterintegrals kann auch eine endliche Summe oder unendliche Reihe solcher Grundlösungen vorliegen.

Zusammensetzen der Lösung (Superposition):

Satz 36.9 (Diffusionsgleichung mit inhomogenen Randbedingungen)

Die Diffusionsgleichung mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ *und inhomogenen Randbedingungen*

$$\begin{aligned} R_0(u;t) &= \alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = g(t), \\ R_L(u;t) &= \gamma u(L,t) + \delta u_x(L,t) = h(t) \end{aligned}$$

wird wie folgt gelöst:

1. *Bestimme eine Lösung* u_R *der Diffusionsgleichung zu den Randwerten* $R_0(u;t) = 0$, $R_L(u;t) = h(t)$. *(ohne Anfangsbedingung)*

2. *Bestimme eine Lösung* u_L *der Diffusionsgleichung zu den Randwerten* $R_0(u;t) = g(t)$, $R_L(u;t) = 0$. *(ohne Anfangsbedingung)*

3. *Bestimme die (eindeutige) Lösung* u_A *der Anfangs-Randwertaufgabe zu den homogenen Randwerten* $R_0(u;t) = R_L(u;t) = 0$ *und der Anfangsbedingung*

$$u(x,0) = f(x) - u_R(x,0) - u_L(x,0).$$

Die Gesamtlösung ist dann $u = u_A + u_R + u_L$.

Zur Durchführung des 1. Schrittes (inhomogene RB am rechten Rand) ist es erforderlich, die Funktion $h(t)$ als Parameterintegral

$$h(t) = \int_0^\infty \underbrace{B(s)\sin(\sqrt{s}\color{red}{L}\color{black})}_{=:F(s)} e^{-c^2 st}\, ds$$

darzustellen. Dieses Integral beschreibt die Laplace-Transformation einer gesuchten Funktion $F(s) = B(s)\sin(\sqrt{s}L)$.

Kapitel 37 – Wellengleichung

Die Wellengleichung

Definition 37.1 (Wellengleichung)

Gegeben sei ein Gebiet $M \subset \mathbb{R}^n$ *und* $c > 0$. *Sei* $u : M \times (0, \infty)$ *eine (genügend oft differenzierbare) Funktion des Ortes* $\vec{x} \in M$ *sowie der Zeit* $t \in (0, \infty)$. *Wir bilden die partiellen Ableitungen* u_t, u_{tt} *nach der Zeitvariablen und* Δu *nach der Ortsvariablen.*

u *erfüllt die* WELLENGLEICHUNG *(engl. wave equation), wenn gilt*

$$u_{tt}(\vec{x}, t) - c^2 \Delta u(\vec{x}, t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad \vec{x} \in M,\ t \in (0, \infty).$$

Hierdurch wird oft die Ausbreitung von Wellen in der Akustik, Elektrotechnik etc. modelliert., z.B. schwingende Saiten eines Instruments oder eine schwingende Membran.

Im Folgenden wird der Fall $n = 1$, also $\vec{x} = x \in \mathbb{R}$ exemplarisch behandelt.

Zwei Fälle:

- $M = \mathbb{R}$, also keine Ränder
- $M = (0, L)$, zusätzliche Randbedingungen in $x = 0$ und $x = L$

Satz 37.2 (Allgemeine Lösung im Ganzraum)

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

hat die Form

$$u(x,t) = h_1(x+ct) + h_2(x-ct)$$

mit zweimal differenzierbaren reellen Funktionen h_1 *und* h_2*.*

Satz 37.3 (Lösung der Wellengleichung im Ganzraum)

Das Cauchyproblem

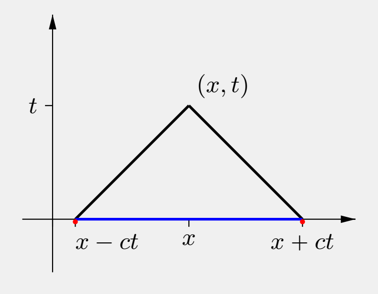
$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f_1(x), \qquad u_t(x,0) = f_2(x)$$

hat die (eindeutige) Lösung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(f_1(x+ct) + f_1(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} f_2(\xi)\, d\xi.$$

Die obige Darstellung der Lösung heißt D'ALEMBERT'SCHE FORMEL.



Der Wert der Lösung u im Punkt (x,t) hängt ab

(1) von den Werten der Funktion f_1 in den Punkten $x \pm ct$

(2) von der Werten der Funktion f_2 im Intervall $[x-ct, x+ct]$.

Bemerkungen:

- Die Lösung $u(x,t)$ der Wellengleichung hat für $t > 0$ keine höhere "Glattheit" als die 1. Anfangsbedingung: Hat f_1 einen Sprung bei x_1, so hat $u(x,t)$ (für festes t) im allgemeinen zwei Sprünge bei $x_1 + ct$ und $x_1 - ct$.
- Sprünge in der 2. Anfangsbedingung f_2 liefern i.a. noch stetige Lösungen: Hat f_2 einen Sprung bei x_2, so entsteht durch die Integration eine stetige Funktion, die an den Stellen $x_2 \pm ct$ nicht differenzierbar ist ("Kanten" in $u(x,t)$).
- Wachstum von $u(x,t)$:
  - Im Fall $f_2 = 0$ ist $|u(x,t)| \leqslant \|f_1\|_\infty$ für alle $t > 0$.
  - Im allgemeinen Fall gilt

    $$|u(x,t)| \leqslant \|f_1\|_\infty + t\|f_2\|_\infty, \qquad 0 < t < 2L/c.$$

    D.h. die Welle kann mit wachsender Zeit $0 < t < 2L/c$ linear anschwellen.

37.4 (Anfangs-Randwertproblem zur Wellengleichung in 1D)

Sei $M = (0, L)$ ein beschränktes Intervall im $\mathbb{R}$. Gesucht ist eine Funktion u, die die Wellengleichung

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \quad \textit{in } (0, L) \times (0, \infty) \qquad (\textit{mit } \ c > 0),$$

sowie eine der beiden Anfangs-Randbedingungen erfüllt:

$$\begin{cases} u(x,0) = f_1(x), & x \in (0,L), \quad \text{(1. Anfangsbedingung)} \\ u_t(x,0) = f_2(x), & x \in (0,L), \quad \text{(2. Anfangsbedingung)} \\ \left.\begin{array}{l} u(0,t) = g(t) \\ u(L,t) = h(t) \end{array}\right\} & t > 0, \quad \text{(Dirichlet-Randbedingung)} \end{cases}$$

oder

$$\begin{cases} u(x,0) = f_1(x), & x \in (0,L), \quad \text{(1. Anfangsbedingung)} \\ u_t(x,0) = f_2(x), & x \in (0,L), \quad \text{(2. Anfangsbedingung)} \\ \left.\begin{array}{l} u_x(0,t) = g(t) \\ u_x(L,t) = h(t) \end{array}\right\} & t > 0. \quad \text{(Neumann-Randbedingung)} \end{cases}$$

Man erhält ganz analog zur Diffusionsgleichung die folgenden Lösungen der Wellengleichung (ohne Berücksichtigung von Anfangs- und Randbedingungen):

Satz 37.5 (Grundlösungen der Wellengleichung)

Es sei $\mu \in \mathbb{R}$, $s = \sqrt{|\mu|}/c$. Dann lösen die Funktionen

$$\begin{aligned}
\psi_s(x,t) &= c_1 \cos(sx)\cos(sct) + c_2 \cos(sx)\sin(sct) + \\
&\quad\; c_3 \sin(sx)\cos(sct) + c_4 \sin(sx)\sin(sct) \\
&= C_1 \cos(s(x+ct)) + C_2 \sin(s(x+ct)) \\
&\quad\; + C_3 \cos(s(x-ct)) + C_4 \sin(s(x-ct)) \quad \textit{für} \;\; \mu < 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_0(x,t) &= c_1 + c_2 x + c_3 t + c_4 xt \\
&= C_1 + C_2(x+ct) + C_3(x-ct) + C_4[(x+ct)^2 - (x-ct)^2] \quad \textit{für} \;\; \mu = 0
\end{aligned}$$

sowie

$$\psi_s(x,t) = C_1 e^{s(x+ct)} + C_2 e^{-s(x+ct)} + C_3 e^{s(x-ct)} + C_4 e^{-s(x-ct)} \quad \textit{für} \;\; \mu > 0$$

die Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$.

Durch Überlagerung der periodischen beschränkten Grundlösungen erhält man

Satz 37.6 (Lösung zum ARWP mit homogene Dirichlet-Randbedingungen)

Die Funktionen f_1 und f_2 werden ungerade fortgesetzt und in eine Sinusreihe entwickelt:

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{L} \qquad \textit{und} \qquad f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Dann ist die Lösung des Anfangsrandwertproblems mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen gegeben durch

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi ct}{L} + b_k \frac{L}{k\pi c} \sin \frac{k\pi ct}{L} \right) \sin \frac{k\pi x}{L}.$$

Analoge Formeln für die Neumann-Randbedingungen erhält man aus:

Satz 37.7 (Lösung zum ARWP mit homogene Neumann-Randbedingungen)

Die Grundlösungen der Wellengleichung mit homogenen Neumann-Randbedingungen sind

$$\psi_0(x,t) = c_1 + c_2 t,$$

sowie

$$\psi_k(x,t) = \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\left(c_1 \cos\left(\frac{k\pi ct}{L}\right) + c_2 \sin\left(\frac{k\pi ct}{L}\right)\right), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Die Anfangsbedingungen $u(x,0) = f_1(x)$, $u_t(x,0) = f_2(x)$ werden durch Überlagerung mit den Koeffizienten der Cosinus-Reihen von f_1 und f_2 gebildet; hier müssen die Funktionen also gerade fortgesetzt werden zur Periodenlänge $2L$.

Kapitel 38 – Distributionen

Bezeichnungen

Definition 38.1

Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

- *der* TRÄGER *einer Funktion (englisch "support") ist definiert durch*

$$\textit{supp}\,\varphi = \overline{\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(\vec{x}) \neq 0\}}$$

- $C_c(\Omega)$ *ist der Raum aller stetigen Funktionen $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ mit kompaktem Träger.*
- $C^\infty(\Omega)$ *ist der Raum aller Funktionen $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$, die unendlich oft differenzierbar sind.*
- *der Raum der* TESTFUNKTIONEN *ist*

$$\mathcal{D}(\Omega) := C_c^\infty(\Omega) := C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega).$$

Motivation

Die FUNDAMENTALLÖSUNG $\Phi : \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ mit $n \geqslant 2$ ist definiert durch

$$\Phi(\vec{x}) := \begin{cases} -\frac{1}{2\omega_2} \ln(|\vec{x}|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n} |\vec{x}|^{-(n-2)} & \text{für } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Wissen schon (aus der Übung):

- $\nabla\Phi(\vec{x}) = -\frac{1}{n\omega_n} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \frac{1}{|\vec{x}|^{n-1}} = -\frac{1}{|\partial B_{|\vec{x}|}|} \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$,
- $-\Delta\Phi = 0$.

Frage: Lässt sich $-\Delta\Phi$ auf ganz $\mathbb{R}^n$ interpretieren?

Antwort: Betrachte dazu $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_\epsilon} \nabla\Phi \cdot \nabla\Psi \, d\vec{x} = \Psi(\vec{0}).$$

In diesem Sinne:

$$-\Delta\Phi = \delta_0 \quad \text{mit } \delta_0(\Psi) = \Psi(0).$$

Definition 38.2 (Distributionen)

Eine DISTRIBUTION *auf* Ω *ist eine lineare Abbildung von* $\mathcal{D}(\Omega)$ *nach* $\mathbb{C}$, *die zusätzliche Stetigkeitseigenschaften besitzt.*

Die Menge der Distributionen auf Ω *wird mit* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *bezeichnet.*

Genauer: Eine lineare Abbildung $u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$ erfüllt die obige Stetigkeitseigenschaft, wenn zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ ein $c = c(K) > 0$ und ein $m = m(K) \in \mathbb{N}_0$ existieren, so dass:

$$|u(\phi)| \leqslant c\|\varphi\|_{C^m(\Omega)}$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit supp $\varphi \subset K$.

38.3 (Beispiele)

- $\delta_0 : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *mit* $\delta_0(\phi) = \varphi(0)$.
- $\epsilon_j : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *mit* $\epsilon_j(\varphi) = \partial_j\varphi(0)$ *für* $j = 1, \ldots, n$.
- *Sei* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *lokal integrierbar, d.h.* $f \in L_1(K)$ *für jede kompakte Menge* $K \subset \mathbb{R}^n$. *Dann ist* $\langle f \rangle$ *mit* $\langle f \rangle(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \, d\vec{x}$ *eine Distribution.*

Vorüberlegung: Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ so, dass f und $\partial_j f$ absolut integrierbar sind und

$$\langle f \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi \, d\vec{x}.$$

Dann gilt mit partieller Integration

$$\langle \partial_j f \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j f \varphi \, d\vec{x} = -\int_{\mathbb{R}^n} f \partial_j \varphi \, d\vec{x} = -\langle f \rangle(\partial_j \varphi).$$

Definition 38.4

Ist $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ eine Distribution und $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Testfunktion, so definiert man

$$(\partial_j u)(\varphi) := -u(\partial_j f).$$

Konsequenz: in diesem Sinn sind Distributionen beliebig oft differenzierbar. Die partiellen Ableitungen sind stets vertauschbar.

Definition 38.5 (Konvergenz von Distributionen)

Eine Folge von Distributionen u_k in $\mathcal{D}'(\Omega)$ konvergiert gegen eine Distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt:

$$u_k(\varphi) \to u(\varphi) \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wie schreiben dann $u_k \to u$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Beispiele:

1) Sei a_k eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $a_k \to a \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $\delta_{a_k} \to \delta_a$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
2) Es gelte $a_k \to a$ in $\mathbb{R}$. Sei H_{a_k} die verschobene Heaviside-Funktion gegeben durch $H_{a_k}(x) := H(x - a_k)$. Dann gilt
$$\langle H_{a_k} \rangle \to \langle H_a \rangle \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$
3) Seien $f_k, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar mit $\int_{\mathbb{R}^n} |f_k - f| \, d\vec{x} \to 0$ für $k \to \infty$. Dann gilt
$$\langle f_k \rangle \to \langle f \rangle \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Definition 38.6 (Dirac-Folge)

Eine Folge $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *absolut integrierbarer Funktionen* $\psi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *heißt* DIRAC-FOLGE, *wen für alle* $k \in \mathbb{N}$ *gilt*

1) $\psi_k(\vec{x}) \geqslant 0$ *für alle* $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$,
2) $\int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(\vec{x})\, d\vec{x} = 1$,
3) *Für alle* $\delta > 0$ *ist* $\lim\limits_{k\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_\delta} \psi_k(\vec{x})\, d\vec{x} = 0$

Für Dirac-Folgen gilt die folgende distributionelle Konvergenz.

Satz 38.7 (Distributionelle Konvergenz von Dirac-Folgen)

Für Dirac-Folgen ψ_k *gilt*

$$\langle \psi_k \rangle \to \delta_0 \quad \textit{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Zurück zur Fundamentallösung

$$\Phi(\vec{x}) := \begin{cases} -\frac{1}{2\omega_2}\ln(|\vec{x}|) & \text{für } n = 2, \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n}|\vec{x}|^{-(n-2)} & \text{für } n \geqslant 3. \end{cases}$$

Beachte: Der Wert $\Phi(\vec{0})$ spielt keine Rolle und kann beliebig gewählt werden, da $\{\vec{0}\}$ eine Nullmenge ist.

Satz 38.8 (Lokale Integrierbarkeit)

Die Funktionen Φ und $\nabla\Phi$ sind lokal integrierbar auf $\mathbb{R}^n$.

Mit der Rechnung am Anfang des Kapitels folgt die folgende Lösungseigenschaft von Φ.

Satz 38.9 (Lösungseigenschaft der Fundamentallösung)

Die Fundamentallösung Φ löst die Poisson-Gleichung

$$-\Delta\langle\Phi\rangle = \delta_0$$

im Distributionssinn auf $\mathbb{R}^n$. Man schreibt auch kurz $-\Delta\Phi = \delta_0$.

Mit Hilfe der Fundamentallösung Φ lassen sich Lösungen der Poissongleichung als Faltung darstellen.

Satz 38.10 (Lösungseigenschaft der Faltung)

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Dann löst die Funktion

$$u(\vec{x}) = (\Phi * f)(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y})\Phi(\vec{x} - \vec{y})\, d\vec{y}$$

die Poissongleichung $-\Delta u = f$ im Distributionssinn auf $\mathbb{R}^n$.

Bemerkung: Die Funktion u ist unendlich oft differenzierbar.

Beweisidee (nur formal):

$$\begin{aligned} -\Delta u_{\vec{x}}(\vec{x}) &= -\Delta_{\vec{x}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y})\Phi(\vec{x} - \vec{y})\, d\vec{y} \right) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) \left(-\Delta_{\vec{x}} \Phi(\vec{x} - \vec{y}) \right) \, d\vec{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) \left(-\Delta_{\vec{y}} \Phi(\vec{y} - \vec{x}) \right) \, d\vec{y} = \delta_{\vec{x}}(f) = f(\vec{x}). \end{aligned}$$

Speziell im Fall $n = 3$ erhält man die folgende Darstellungsformel.

Satz 38.11 (Lösung der Poisson-Gleichung im $\mathbb{R}^3$)

Sei $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Dann löst die Funktion

$$u(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} f(\vec{y})\, d\vec{y}$$

die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ im $\mathbb{R}^3$.

Ausblick: Die Formel aus Satz **??** ist nur im Ganzraum $\mathbb{R}^3$ gültig. Für Randwertprobleme auf beschränkten Gebieten nutzt man die Idee der GREEN'SCHEN FUNKTION.

Dirichlet-Problem: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet. Gesucht ist eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u(\vec{x}) &= 0 \quad \vec{x} \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Greensche Funktion

Definition 38.12 (Green'sche Funktion)

Eine Funktion $G : \bar{\Omega} \times \Omega \to \mathbb{R}$ *heißt* GREEN'SCHE FUNKTION ZUM GEBIET Ω, *falls*

1) *Für jedes* $\vec{x} \in \Omega$*:*

$$-\Delta_{\vec{y}} G(\vec{x}, \vec{y}) = \delta_{\vec{x}}$$

im Distributionssinn auf Ω*.*

2) *Für alle* $\vec{x} \in \partial\Omega$*:*

$$G(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \quad \textit{für alle } \vec{y} \in \Omega.$$

Für einige Gebiete wie

- Kugeln
- Halbräume, also z.B. $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$

kann die Green'sche Funktion explizit angegeben werden.

Eine Green'sche Funktion erlaubt die Darstellung von Lösungen von Dirichlet-Problemen. Wir beschränken uns hier auf $n = 3$. Die Resultate bleiben auch in anderen Dimensionen gültig.

Satz 38.13 (Darstellungsformel für Dirichlet-Probleme)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und G eine Green'sche Funktion für Ω. Dann löst

$$u(\vec{x}) = \int_\Omega G(\vec{x}, \vec{y}) f(\vec{y}) \, d\vec{y}$$

das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u(\vec{x}) &= 0 \quad \vec{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$