Nachname, Vorname:
Matrikelnummer:

TU Dortmund 28.03.2024

Höhere Mathematik III (P/ET/IT/MP/I-I)

Klausur 2

Wintersemester 2023/24

Prof. Dr. B. Schweizer Tim Schubert

Informationen zur Klausur

- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten
- Die Klausur umfasst 8 Aufgaben, es können bis zu 100 Punkte erreicht werden
- Die Klausur ist in jedem Fall bestanden, wenn 50 Punkte erreicht werden
- Es sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen
- Benutzen Sie keinen Rotstift und keinen Bleistift
- Tragen Sie auf jede Seite Ihren Namen und auf das Deckblatt zusätzlich Ihre Matrikelnummer ein
- Schreiben Sie Ihre Antworten unter die Aufgabe und, falls notwendig, auf die Rückseite der Aufgabenseite. Falls der Platz nicht reicht, so verwenden Sie die Zusatzblätter am Ende des Klausurenblocks; in diesem Fall: Vorne ein klarer Hinweis darauf.

Täuschungsversuche

Spickzettel, Reden mit dem Nachbarn, Hinübersehen zum Nachbarn wird als Täuschungsversuch gewertet. Wir sind streng mit elektronischen Geräten wie Smartphones, Taschenrechner, Smartwatches und Ähnlichem: Wenn wir ein solches Gerät an Ihrem Platz sehen, so wird dies ebenfalls als Täuschungsversuch gewertet.

Bei einem Täuschungsversuch wird die Klausur als nicht bestanden gewertet.

Die nachfolgende Tabelle ist für die Korrektur durch uns, bitte tragen Sie hier nichts ein!

1	2	3	4	5	6	7	8		Σ
von 12	von 12	von 12	von 14	von 12	von 14	von 14	von 10		von 100

Nachname, Vorname:

Aufgabe 1. [12 Punkte]
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f\colon D \to \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$.

a) Wann nennt man f in z_0 *komplex differenzierbar*?

b) Formulieren Sie die *Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*. Beweisen Sie, dass für eine komplex differenzierbare Funktion $f = u + \mathrm{i}v$ die Funktionen u und v die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllen.

c) Wann nennt man $u : D \to \mathbb{R}$ *harmonisch?*

d) Es seien u, v harmonisch auf D. Wann heißen die Funktionen *zueinander konjugiert harmonisch*?

Nachname, Vorname:

Aufgabe 2. [12 Punkte]
Gegeben seien der Würfel $W := [0,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$ mit dem äußeren Normalenfeld n und das Vektorfeld

$$v\colon W \to \mathbb{R}^3,\ v(x_1, x_2, x_3) := (x_1^2\,,\ x_2 x_3\,,\ x_2)\,.$$

Berechnen Sie das Integral $\int_{\partial W} v \cdot n$

a) direkt, mit der Formel für Flächenintegrale,

b) mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

Nachname, Vorname:

Aufgabe 3. [12 Punkte]

a) Formulieren Sie die *Mittelwerteigenschaft holomorpher Funktionen.*

b) Wir wollen die Mittelwerteigenschaft überprüfen: Es seien $\delta > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$. Berechnen Sie mit Hilfe der Parametrisierung $z = z_0 + re^{\mathrm{i}\phi}$ das Integral

$$\int_{B_\delta(z_0)} f(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Passt das Ergebnis zur Mittelwerteigenschaft?

Nachname, Vorname:

Aufgabe 4. [14 Punkte]
Wir nennen eine rationale Funktion

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad ad-bc \neq 0$$

eine *Möbiustransformation.*

a) Seien f und g die Möbiustransformationen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{und} \qquad g(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Komposition $g \circ f$ wieder eine Möbiustransformation ist.

b) Zeigen Sie: Für jede Möbiustransformation $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ existiert eine inverse Möbiustransformation ϕ, also:

$$f \circ \phi = \phi \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}\,.$$

Nachname, Vorname:

Aufgabe 5. [12 Punkte]
Die Laplace-Transformierte einer Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ ist definiert durch

$$F(s) := \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt\,,$$

falls das Integral existiert. Berechnen Sie die Laplace-Transformierten $F_i(\cdot)$ der Funktionen

a) $f_1(t) := \sin(\omega t)$ für $\omega \in \mathbb{R}$,

b) $f_2(t) := t^2$.

Nachname, Vorname:

Aufgabe 6. [14 Punkte]
Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$$

mit Hilfe des Residuensatzes.

Nachname, Vorname:

Aufgabe 7. [14 Punkte]
Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$y'' - 2y' - 3y = -e^{2x}$$

mit den Randbedingungen $y(0) = 0 = y'(1)$.
Hinweis: Nutzen Sie zur Berechnung der partikulären Lösung den Ansatz

$$y_p(x) = ae^{2x}\,.$$

Nachname, Vorname:

Aufgabe 8. [10 Punkte]
Wir betrachten das Intervall $I := [-1, 1]$ und darauf die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ für $x \le 0$ und $f(x) = -1$ für $x \ge 0$. Diese Funktion hat die Darstellung als Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi x) , \qquad \text{mit } b_k = \frac{2}{k\pi}((-1)^k - 1) .$$

Gesucht ist eine Lösung $u : I \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Diffusionsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u &= \Delta u && \text{in } I \times (0, \infty) , \\ u(-1, t) &= 0 = u(-1, t) && \text{für alle } t > 0 , \\ u(x, 0) &= f(x) && \text{für alle } x \in (-1, 1) . \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung an, verwenden Sie eine Fourier-Reihe mit expliziten Koeffizienten.
Anmerkung: Leiten Sie entweder die Lösung her oder überprüfen Sie die Lösungseigenschaft der angegebenen Funktion.

Nachname, Vorname:
Matrikelnummer:

Nachname, Vorname:
Matrikelnummer: